Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 156-162
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143102

一类新的DZT矩阵的放缩矩阵及在行列式计算中的应用

张峻伟[1]，王　超[1]，鲍宇轩[1]，王　石[1]，吴沐青[1]，吕振华[2]

[1]沈阳航空航天大学民用航空学院，辽宁 沈阳
[2]沈阳航空航天大学理学院，辽宁 沈阳

收稿日期：2025年2月11日；录用日期：2025年3月4日；发布日期：2025年3月11日

摘　要

DZT矩阵是一类重要的非奇异H-矩阵，本文构造了一类新的DZT矩阵的放缩矩阵，新的放缩性矩阵在估计DZT矩阵的行列式中有重要应用。

关键词

DZT矩阵，放缩矩阵，行列式

A New Scaling Matrix of DZT Matrices and Its Application in Determinant Calculation

Junwei Zhang[1], Chao Wang[1], Yuxuan Bao[1], Shi Wang[1], Muqing Wu[1], Zhenhua Lyu[2]

[1]College of Civil Aviation, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning
[2]College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Feb. 11th, 2025; accepted: Mar. 4th, 2025; published: Mar. 11th, 2025

Abstract

The class of DZT matrices is an important subclass of nonsingular H-matrices. This paper presents a new scaling matrix of DZT matrices. The new scaling matrix has important applications in estimating the determinant of the DZT matrix.

Keywords

DZT Matrix, Scaling Matrix, Determinant

文章引用: 张峻伟, 王超, 鲍宇轩, 王石, 吴沐青, 吕振华. 一类新的 DZT 矩阵的放缩矩阵及在行列式计算中的应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 156-162. DOI: 10.12677/aam.2025.143102

1. 引言

非奇异性 H-矩阵是理论和实践中重要的矩阵，在计算数学，控制理论，动态系统理论以及弹性动力学等许多领域都有广泛的应用。2018 年，Zhao，Liu 和 Li 等引入了一类新的矩阵类——DZT 矩阵，并证明 DZT 矩阵为非奇异性 H-矩阵的子类[1]。最近，关于 DZT 矩阵的性质被广泛关注，如逆矩阵的无穷范数的界[2]，舒尔补[3]，子直和[4] [5]等。

非奇异 H-矩阵的放缩矩阵在非奇异性 H-矩阵的理论研究与实际应用中均有重要作用，比如行列式的估计，求解大型线性方程组，估计逆矩阵的无穷范数等。Zeng，Liu 和 Mo 等给出了一类 DZT 矩阵的放缩矩阵[3]。本文，我们给出一类新的 DZT 矩阵的放缩矩阵，并利用其得到了 DZT 矩阵的行列式的上下界。算例说明了所得结果的正确性。

2. 预备知识

令 $C^{n\times n}$ 表示 n 阶复矩阵的全体，记 $\langle n\rangle=\{1,2,\cdots,n\}$，对任意的 $A\in C^{n\times n}$，定义如下符号：

$$r_i(A)=\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}| \tag{2.1}$$

$$r_i^S(A)=\sum_{j\neq i,j\in S}^{n}|a_{ij}| \quad (\text{其中 } S \text{ 为} \langle n\rangle \text{的非空子集}) \tag{2.2}$$

$$N^+(A)=\{i\in\langle n\rangle:|a_{ii}|>r_i(A)\} \tag{2.3}$$

$$N^-(A)=\{i\in\langle n\rangle:|a_{ii}|\le r_i(A)\} \tag{2.4}$$

$$\Gamma_i(A)=\left\{j\in\langle n\rangle-\{i\}:\left(|a_{ii}|-r_i^{\langle n\rangle-\{j\}}(A)\right)|a_{jj}|>|a_{ij}|r_j(A)\right\},i\in\langle n\rangle \tag{2.5}$$

定义 2.1. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对所有 $i\in\langle n\rangle$，都有 $|a_{ii}|>r_i(A)$，即矩阵 A 的主对角线元素的绝对值严格大于同行其它元素绝对值之和，则称 A 是严格对角占优(SDD)矩阵。

定义 2.2. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若存在正对角矩 $X=diag(x_1x_2\cdots x_n)$，使矩阵 AX 是 SDD 矩阵，则称 A 为非奇异 H-矩阵。

定义 2.3. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，当任意的 $i\in\langle n\rangle$，满足 $i\in N^+(A)$，或者满足 $\Gamma_i(A)\neq\varnothing$，则称矩阵 A 为 DZT 矩阵。

引理 2.1. SDD 矩阵是 DZT 矩阵的子类，DZT 矩阵是非奇异 H-矩阵的子类。

引理 2.2. 设 $a,b,c>0$，$a\ge b+c$，则

$$\frac{c}{a-b}\le\frac{b+c}{a}.$$

本文总是假设 $a_{ii}\neq 0$，$N^-(A)\neq\varnothing$。

引理 2.3. 设 A 是一个 DZT 矩阵，存在对角矩阵 $W=diag(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，其中

$$w_i=\begin{cases}1, & i\in N^-(A),\\ \dfrac{r_i(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon, & i\in N^+(A),\end{cases}$$

使得 AD 是一个 SDD 矩阵。

3. 一类新的 DZT 矩阵的放缩矩阵

对任意的 $A\in C^{n\times n}$，符号 $r_i(A), r_i^S(A), N^+(A), N^-(A), \Gamma_i(A)$ 如(2.1)~(2.5)定义。同时定义如下符号：

$$\gamma=\max_{i\in N^+(A)}\frac{\sum\limits_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{j\in N^+(A),j\neq i}|a_{ij}|},\tag{3.1}$$

$$\delta_i(A)=\frac{\sum\limits_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|+\gamma\sum\limits_{j\in N^+(A),j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}, i\in N^+(A).\tag{3.2}$$

引理 3.1. 设 $A\in C^{n\times n}$， γ 与 $\delta_i(A)$ 分别由式(3.1)与(3.2)定义，则

$$0\le\delta_i(A)\le\gamma<1,\tag{3.3}$$

$$\delta_i(A)\le\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, i\in N^+(A).\tag{3.4}$$

证明：由引理 2.2 可知

$$\frac{\sum\limits_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{j\in N^+,j\neq i}|a_{ij}|}\le\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|},\quad i\in N^+(A),$$

所以 $\gamma=\max\limits_{i\in N^+(A)}\dfrac{\sum\limits_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{j\in N^+,j\neq i}|a_{ij}|}\le\max\limits_{i\in N^+(A)}\dfrac{r_i(A)}{|a_{ii}|}<1$。

对于任意的 $i\in N^+(A)$，都有 $0\le\delta_i(A)$ 和 $0\le\dfrac{r_i(A)}{|a_{ii}|}<1$。根据(3.1)，可以看出

$$\gamma\ge\frac{\sum\limits_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{j\in N^+(A),j\neq i}|a_{ij}|},\quad i\in N^+(A),$$

则可知

$$\gamma\left(|a_{ii}|-\sum_{j\in N^+(A),j\neq i}|a_{ij}|\right)\ge\sum_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|,\quad i\in N^+(A),$$

所以

$$\gamma(|a_{ii}|)\ge\sum_{j\in N^-(A)}|a_{ij}|+\gamma\sum_{j\in N^+(A),j\neq i}|a_{ij}|,\quad i\in N^+(A),$$

$$\gamma \ge \frac{\sum_{j\in N^-(A)} |a_{ij}| + \gamma \sum_{j\in N^+(A), j\ne i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad i \in N^+(A),$$

即 $\gamma \ge \delta_i(A)$。因此(3.3)成立。

由于 $0 \le \gamma < 1$，所以

$$\delta_i(A) = \frac{\sum_{j\in N^-(A)} |a_{ij}| + \gamma \sum_{j\in N^+(A), j\ne i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \le \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, i \in N^+(A).$$

因此(3.4)成立。证毕。

现定义对角矩阵 $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，其中

$$d_i = \begin{cases} 1, & i \in N^-(A), \\ \delta_i(A) + \varepsilon, & i \in N^+(A), \end{cases} \tag{3.5}$$

以及

$$0 < \varepsilon < \min_{i\in N^-(A)} \frac{|a_{ii}| - \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| - \sum_{j\in N^+(A)} \delta_j(A)|a_{ij}|}{\sum_{j\in N^+(A)} |a_{ij}|}. \tag{3.6}$$

注 3.1：(3.6)中 ε 的定义是有意义的。这是因为，对于任意 $i \in N^-(A), j_0 \in \Gamma_i(A)$，都有

$$|a_{ii}| > r_i^{\langle n\rangle - \{j_0\}}(A) + \frac{r_{j_0}(A)}{|a_{j_0 j_0}|}|a_{ij_0}|.$$

则

$$\begin{aligned}
&|a_{ii}| - \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| - \sum_{j\in N^+(A)} \delta_j(A)|a_{ij}| \\
&> r_i^{\langle n\rangle - \{j_0\}}(A) + \frac{r_{j_0}(A)}{|a_{j_0 j_0}|}|a_{ij_0}| - \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| - \sum_{j\in N^+(A)} \delta_j(A)|a_{ij}| \\
&= \sum_{j\ne i, j_0} |a_{ij}| + \frac{r_{j_0}(A)}{|a_{j_0 j_0}|}|a_{ij_0}| - \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| - \sum_{j\in N^+(A)} \delta_j(A)|a_{ij}| \\
&= \left(\sum_{j\in N^+(A), j\ne j_0} |a_{ij}| + \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| \right) + \frac{r_{j_0}(A)}{|a_{j_0 j_0}|}|a_{ij_0}| \\
&\quad - \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| - \left(\sum_{j\in N^+(A), j\ne j_0} \delta_j(A)|a_{ij}| + \delta_{j_0}(A)|a_{ij_0}| \right) \\
&= \left(\sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| - \sum_{j\in N^-(A), j\ne i} |a_{ij}| \right) + \left(\sum_{j\in N^+(A), j\ne j_0} |a_{ij}| - \sum_{j\in N^+(A), j\ne j_0} \delta_j(A)|a_{ij}| \right) \\
&\quad + \left(\frac{r_{j_0}(A)}{|a_{j_0 j_0}|}|a_{ij_0}| - \delta_{j_0}(A)|a_{ij_0}| \right) \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

因此 ε 的定义有意义。

定理 3.1. 设 A 是 $n\times n$ 阶的 DZT 矩阵， $D=diag\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)$，其中 d_i 和 ε 分别如(3.5)与(3.6)定义，则 AD 是一个 SDD 矩阵。

证明：令 $B=AD$，则

$$\left|b_{ii}\right|=\begin{cases}\left|a_{ii}\right|, & i\in N^-\left(A\right),\\ \sum\limits_{j\in N^-(A)}\left|a_{ij}\right|+\gamma\sum\limits_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\varepsilon\left|a_{ii}\right|, & i\in N^+\left(A\right).\end{cases}$$

且

$$r_i\left(B\right)=\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|=\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|d_j=\sum_{j\in N^-,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\left(\delta_j\left(A\right)+\varepsilon\right).$$

当 $i\in N^+\left(A\right)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\left|b_{ii}\right|-r_i\left(B\right)&=\sum_{j\in N^-(A)}\left|a_{ij}\right|+\gamma\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\varepsilon\left|a_{ii}\right|-\left(\sum_{j\in N^-,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\left(\delta_j\left(A\right)+\varepsilon\right)\right)\\&=\left(\gamma-\delta_j\left(A\right)\right)\sum_{j\in N^+(A),j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\left(\left|a_{ii}\right|-\sum_{j\in N^+(A)}\left|a_{ij}\right|\right)\varepsilon\\&>0.\end{aligned}$$

当 $i\in N^-\left(A\right)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\left|b_{ii}\right|-r_i\left(B\right)&=\left|a_{ii}\right|-\left(\sum_{j\in N^-,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\left(\delta_j\left(A\right)+\varepsilon\right)\right)\\&=\left|a_{ii}\right|-\left(\sum_{j\in N^-,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\delta_j\left(A\right)+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\varepsilon\right).\end{aligned}$$

根据**(3.6)**可知

$$\left|a_{ii}\right|-\left(\sum_{j\in N^-,j\neq i}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\delta_j\left(A\right)+\sum_{j\in N^+,j\neq i}\left|a_{ij}\right|\varepsilon\right)>0,$$

所以

$$\left|b_{ii}\right|-r_i\left(B\right)>0,i\in N^-\left(A\right).$$

综上所述，对任意，均满足 $\left|b_{ii}\right|-r_i\left(B\right)>0$。证毕。

注 3.2：由引理 3.1 和引理 2.3 可知， $d_i\leq w_i$，对任意 $i\in\langle n\rangle$。这就意味着运用我们构造的这个矩阵 D 去估算 DZT 矩阵的行列式或者逆无穷范数，可能会得出更好的界。

4. DZT 矩阵的行列式估计

引理 4.1 [6]. 设 $A\in C^{n\times n}$，如果存在一个对角矩阵 $X=diag\left(x_1x_2\cdots x_n\right)$，使得 AX 为 SDD 矩阵，则有

$$\prod_{i=1}^n\left(\left|a_{ii}\right|-\frac{1}{x_i}\sum_{j=i+1}^n x_j\left|a_{ij}\right|\right)\leq\left|\det A\right|\leq\prod_{i=1}^n\left(\left|a_{ii}\right|+\frac{1}{x_i}\sum_{j=i+1}^n x_j\left|a_{ij}\right|\right).$$

定理 4.1. 设 A 是一个 DZT 矩阵， $D=diag\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)$，其中 d_i 和 ε 分别如(3.5)与(3.6)定义，则

$$\prod_{i=1}^n\left(\left|a_{ii}\right|-\frac{1}{d_i}\sum_{j=i+1}^n d_j\left|a_{ij}\right|\right)\leq\left|\det A\right|\leq\prod_{i=1}^n\left(\left|a_{ii}\right|+\frac{1}{d_i}\sum_{j=i+1}^n d_j\left|a_{ij}\right|\right).$$

证明：由引理 4.1 和定理 3.1 可知，结论显然成立。证毕。

推论 4.1. 设 A 是一个 DZT 矩阵，若 $r_i(A)\neq 0, i\in N^+(A)$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\left|a_{ii}\right|-\frac{1}{d_i}\sum_{j=i+1}^{n}d_j\left|a_{ij}\right|\right)\leq\left|\det A\right|\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\left|a_{ii}\right|+\frac{1}{d_i}\sum_{j=i+1}^{n}d_j\left|a_{ij}\right|\right),$$

其中

$$d_i=\begin{cases}1, & i\in N^-(A),\\ \delta_i(A), & i\in N^+(A).\end{cases}$$

证明：若 $r_i(A)\neq 0, i\in N^+(A)$，则

$$\delta_i(A)\neq 0, i\in N^+(A).$$

在定理 4.1 中的 $\varepsilon\to 0$，即得结论。证毕。

推论 4.2. 设 A 是一个具有非负对角元的实 DZT 矩阵且 $r_i(A)\neq 0, i\in N^+(A)$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_{ii}-\frac{1}{d_i}\sum_{j=i+1}^{n}d_j\left|a_{ij}\right|\right)\leq\det A\leq\prod_{i=1}^{n}\left(a_{ii}+\frac{1}{d_i}\sum_{j=i+1}^{n}d_j\left|a_{ij}\right|\right),$$

其中

$$d_i=\begin{cases}1, & i\in N^-(A),\\ \delta_i(A), & i\in N^+(A).\end{cases}$$

例：我们考虑如下 DZT 矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}-2&3&0&1&0&0\\2&7&0&0&0&0\\1&1&3&0&0&0\\1&0&0&3&0&0\\1&1&1&1&5&0\\1&1&1&1&1&10\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}20&2&0&4&2\\4&16&2&0&2\\12&0&10&2&2\\6&8&0&12&2\\2&2&2&2&10\end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix}24&0&1&2&3\\8&12&1&2&4\\4&2&36&3&0\\10&0&4&18&6\\6&0&2&2&50\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}32&4&1&7\\1&30&3&3\\9&1&8&3\\1&8&9&12\end{bmatrix}$$

Table 1. The determinants of A_1 to A_4 and their estimated values

表 1. $A_1\sim A_4$ 的行列式及其估计值

DZT 矩阵	真实值	由推论 4.1 估算的界
A_1	10,050	$[2550,10050]$
A_2	329,472	$[88.49,1691673.85]$
A_3	8,543,488	$[354841.96,33290926.14]$
A_4	73,495	$[87.28,487103.21]$

我们将这四个矩阵的行列式的绝对值与由推论 4.1 估算的界进行比较，见表 1。可知，所举出的 DZT 矩阵的行列式的真实值全部在估算的界之间，可见我们结论的正确性。

参考文献

[1] Zhao, J., Liu, Q., Li, C. and Li, Y. (2018) Dashnic-Zusmanovich Type Matrices: A New Subclass of Nonsingular H-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **552**, 277-287. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.04.028

[2] Li, C., Cvetković, L., Wei, Y. and Zhao, J. (2019) An Infinity Norm Bound for the Inverse of Dashnic-Zusmanovich Type Matrices with Applications. *Linear Algebra and Its Applications*, **565**, 99-122. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.12.013

[3] Zeng, W., Liu, J. and Mo, H. (2023) Schur Complement-Based Infinity Norm Bound for the Inverse of Dashnic-Zusmanovich Type Matrices. *Mathematics*, **11**, 2254. https://doi.org/10.3390/math11102254

[4] Dai, P. and Pan, D. (2022) Subdirect Sum of Dashnic-Zusmanovich Type Matrices. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, **39**, 979-996.

[5] Liu, L., Chen, X., Li, Y. and Wang, Y. (2021) Subdirect Sums of Dashnic-Zusmanovich Matrices. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **173**, 103057. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2021.103057

[6] Huang, T. and Liu, X. (2005) Estimations for Certain Determinants. *Computers & Mathematics with Applications*, **50**, 1677-1684. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.06.011