

几乎单群与区传递Steiner 5-设计

曾玲玲¹, 尹立红², 龚罗中^{3*}

¹长沙师范学院图书馆, 湖南 长沙

²湖南省沅江市南大膳镇中心小学, 湖南 沅江

³长沙师范学院数学科学学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2025年2月4日; 录用日期: 2025年2月26日; 发布日期: 2025年3月4日

摘要

研究具有几乎单型的区传递自同构群的区传递Steiner 5-设计的分类问题。利用二齐次置换群分类定理证明了: 一个具有几乎单型区传递自同构群 G 的Steiner 5-设计 D , 则要么是一个 $5-(12, 6, 1)$ 设计且自同构群 $G \cong M_{12}$ 或者是一个 $5-(24, 8, 1)$ 且自同构群 $G \cong M_{24}$, 要么设计的自同构群 G 的基柱 $\text{Socle}(G)$ 只能是典型单群。

关键词

区传递, 区组设计, 二齐次置换群

Almost Simple Groups and Block-Transitive Steiner 5-Designs

Lingling Zeng¹, Lihong Yin², Luozhong Gong^{3*}

¹Library of Changsha Normal University, Changsha Hunan

²Central Primary School of Nanda Town, Yuanjiang Hunan

³School of Mathematical Sciences, Changsha Normal University, Changsha Hunan

Received: Feb. 4th, 2025; accepted: Feb. 26th, 2025; published: Mar. 4th, 2025

Abstract

The classification problem of block-transitive Steiner 5-designs with an almost simple block-transitive automorphism group is studied. By using the classification theorem of 2-homogeneous permutation groups, it is proved that if the Steiner 5-design has an almost simple block-transitive

*通讯作者。

文章引用: 曾玲玲, 尹立红, 龚罗中. 几乎单群与区传递 Steiner 5-设计[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 10-15.
DOI: 10.12677/aam.2025.143087

automorphism group, then either it is a $5-(12,6,1)$ design and the automorphism $G \cong M_{12}$ or it is a $5-(24,8,1)$ design and the automorphism $G \cong M_{24}$, or the socle of the automorphism G , $\text{Socle}(G)$ can only be a classical simple group.

Keywords

Block-Transitive, Block Design, 2-Homogeneous Permutation Group

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

一个 $t-(v, k, \lambda)$ 设计是指一个点集合 X 和区组集合 $\tilde{B}$ 相关联的二元组 $D = (X, \tilde{B})$, 满足 $\tilde{B}$ 中区组是 X 的一个 k -子集且 X 中任意 t 个点恰好包含在 λ 个 $\tilde{B}$ 的区组中。

点集合 X 中元素的个数记为 v , 区组集合 $\tilde{B}$ 中包含的区组的个数记为 b , 包含给定点 $\alpha \in X$ 的区组的个数记作 r . 如果 $0 < t < k < v - t$, 则称 D 是非平凡的。

D 的点集合上的一个置换 π 称为 D 的一个自同构, 如果它把 D 的区组仍然变为区组. D 的全体自同构组成一个群, 称为 D 的全自同构群, 记为 $\text{Aut}(D)$ 。

设 $G \leq \text{Aut}(D)$, 如果 G 作用在 D 的点集合(区组集合)上传递, 则称 G 点-传递(区-传递). 如果 G 作用在 D 的旗集合(一个旗是指一个点-区对 (α, B) , $\alpha \in X$, $B \in \tilde{B}$)上传递, 则称 G 旗-传递。

t -设计的构造和分类问题, 是组合设计中一个有趣而有意义的问题。对于旗传递的 Steiner t -设计, 人们已经完成了完全的分类(见文献[1]-[7])。对于区传递的 t -设计的分类问题, P. Cameron 和 C. Praeger 在文献[8]中证明了不存在 $t > 7$ 的区传递 t -设计, 且猜想不存在区传递 6-设计。最近几十年, Steiner 2-设计的区传递自同构群的研究取得了一系列的好的结果(参见文献[9]-[12])。对与区传递 3-设计的分类, 最近刘与他的学生甘, 蓝, 尹等给出了区传递 Steiner 3-设计的自同构群分类的规约定理, 将其自同构群规约到了仿射型和几乎单型两种情形, 并分类了设计的自同构群的基柱 $\text{Socle}(G)$ 为例外李型单群和交错群的区传递 Steiner 3-设计(见[13]-[15])。关于区传递 t -设计的其他研究结论可参见文献[16] [17]。当 $t = 4, 5$ 时的 t -设计的相关研究还不多。

本文继续前人的工作, 研究区传递 5-设计的分类问题, 证明了如下主要定理。

主要定理: 设 D 是一个非平凡的 $5-(v, k, 1)$ 设计。如果 D 具有一个几乎单型区传递自同构群 G , 则要么 $D = 5-(12, 6, 1)$ 且 $G \cong M_{12}$ 或者 $D = 5-(24, 8, 1)$ 且 $G \cong M_{24}$, 要么 G 的基柱 $\text{Socle}(G)$ 只能是典型单群。

这一结果是区传递 Steiner 5-设计的自同构群分类了重要组成部分。

2. 预备引理

这一节主要介绍本文将要用到的一些符号和基本结论。

如果 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 $t-(v, k, \lambda)$ 设计, 其中 $t \geq 2$, 那么对于任意 $x \in X$, 关于 x 的导出设计是 $D_x = (X_x, \tilde{B}_x, I_x)$, 这里 $X_x = X \setminus \{x\}$, $\tilde{B}_x = \{B \setminus \{x\} \mid B \in \tilde{B}, (x, B) \in I\}$ 且 $I_x = I|_{X_x \times \tilde{B}_x}$ 。显然, D_x 是一个 $(t-1)-(v-1, k-1, \lambda)$ 设计。

对于任意的 $x \in X$, 用 $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大的正整数。

引理 2.1 [8] 设 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 t -(v, k, λ) 设计, 其中 $t \geq 2$, $G \leq \text{Aut}(D)$, 则

(a) 如果 G 在 D 上区传递, 那么 G 在 D 上是点 $\lfloor t/2 \rfloor$ -齐次的;

(b) 如果 G 在 D 上旗传递, 那么 G 在 D 上是点 $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$ -齐次的。

引理 2.2 [7] 设 G 是非空集合 X 上的一个 2-齐次置换群。若 G 包含一个单的正规子群 N , 且 $N \leq G \leq \text{Aut}(N)$, 则 N 与 $|X| = v$ 必是下列情形之一:

- (1) $A_v, v \geq 5$;
- (2) $\text{PSL}(2, 11); v = 11$;
- (3) $\text{PSL}(2, 8); v = 28$;
- (4) $M_v; v = 11, 12, 22, 23, 24$;
- (5) $M_{11}; v = 12$;
- (6) $A_7; v = 15$;
- (7) $\text{HS}; v = 176$;
- (8) $\text{Co}_3; v = 276$;
- (9) $\text{Sz}(q), q = 2^{2e+1} > 2; v = q^2 + 1$;
- (10) $\text{Re}(q), q = 3^{2e+1}; v = q^3 + 1$;
- (11) $\text{PSL}(d, q), d \geq 2; v = \frac{q^d - 1}{q - 1}, (d, q) \neq (2, 2), (2, 3)$;
- (12) $\text{PSU}(3, q^2), q > 2; v = q^3 + 1$;
- (13) $\text{Sp}(2d, 2), d \geq 3; v = 2^{2d-1} \pm 2^{d-1}$ 。

由文献[18]知这些 2-齐次置换群也是 2-传递的。

引理 2.3 [19] 设 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 t -(v, k, λ) 设计, 则:

(a) $bk = vr$;

(b) $\binom{v}{t} \lambda = b \binom{k}{t}$;

(c) 对任意 $1 \leq s < t$, 一个 t -(v, k, λ) 设计, 也是一个 s -(v, k, λ_s) 设计, 其中

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1) \cdots (v-t+1)}{(k-s)(k-s-1) \cdots (k-t+1)}$$

(d) 特别地, 如果 $t = 4$, 那么 $r(k-1)(k-2)(k-3) = \lambda(v-1)(v-2)(v-3)$ 。

引理 2.4 [9] 设 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 t -(v, k, λ) 设计, 那么如下的关系式成立:

(a) $v \geq (k-t+1)(k-t+2)$;

(b) $\lambda \cdot (v-t+1) \geq (k-t+1)(k-t+2)$, 这里 $t > 2$ 。

引理 2.5 [6] 设 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 4-($v, k, 1$) 设计, 那么

$$k \leq \left\lfloor \sqrt{v} + \frac{5}{2} \right\rfloor$$

引理 2.6 [20] 设 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 t -设计, 满足 $k \geq t+1 \geq 4$ 。若 $G \leq \text{Aut}(D)$ 是 t -传递的, 则要么

(1) D 是由 $\text{AG}(d, 2)$ 的点和平面组成, $G = \text{Z}_2^d \times \text{GL}(d, 2)$ 或 $G = \text{Z}_2^d \times A_7$ 且 $d = 4$;

(2) D 的区是 $\{\infty\} \cup GF(q)$ 在 $PGL(2, q^e)$, $e \geq 2$ 下的像的全体, 且 $PSL(2, q^e) \trianglelefteq G$;

要么

(3) D 是 $3-(22, 6, 1)$, $4-(11, 5, 1)$, $4-(23, 7, 1)$, $5-(12, 6, 1)$ 或 $5-(24, 8, 1)$, 且 $M_v \trianglelefteq G$, 这里 M_v 是相应的马休群。

引理 2.7 [15] 设 $D = (X, \tilde{B}, I)$ 是一个 G -区传递 $t-(v, k, 1)$ 设计, $t \geq 3$ 。令 H 是 G 的一个子群, 则

(a) 若 $|H| = t$ 且在 X 上半正则, 那么 $k | v$;

(b) 若 $|H| = t$ 且在 X 上拟半正则, 那么 $k | v-1$ 或 $k-1 | v-1$;

(c) 若 $|H| = t-1$ 且在 X 上拟半正则, 那么 $k-1 | v-1$ 。

3. 主要定理的证明

注意到引理 2.1 的结论, 我们只需对 2-齐次的几乎单型的置换群进行讨论。设 G 是一个作用在 $v(v > 11)$ 个点的有限集合 X 上的 2-齐次置换群。因此, 我们只需对引理 2.2 中的 13 种情形分别进行讨论。下面我们来证明我们的结论。

情形 1: $N = A_v, v > 5$ 。

因为 D 是一个非平凡的 $5-(v, k, 1)$ 设计, 所以 $v > 10$ 。从而, G 作用在 X 上是 5-传递的。由引理 2.6 知, 这样的 5-设计不存在。

情形 2: $N = M_v, v = 11, 12, 22, 23, 24$ 。

由引理 2.5 知, 在这种情形下, D 只可能是 $5-(11, 6, 1)$, $5-(12, 6, 1)$, $5-(22, 6, 1)$, $5-(22, 7, 1)$, $5-(22, 8, 1)$, $5-(23, 6, 1)$, $5-(23, 8, 1)$, $5-(24, 6, 1)$, $5-(24, 7, 1)$, $5-(24, 8, 1)$ 。由引理 2.3(c) 知以上设计只有 $5-(12, 6, 1)$, $5-(24, 6, 1)$, $5-(24, 8, 1)$ 才可能构成设计。因为 M_{12}, M_{24} 是 5-传递的, 故由引理 2.6 知 $D = 5-(12, 6, 1)$ 且 $G \cong M_{12}$ 或者 $D = 5-(24, 8, 1)$ 且 $G \cong M_{24}$ 。

情形 3: $N = M_{11}, v = 12$ 。

由文献[6]知, 这一情形不可能成立。

情形 4: $N = A_v, v = 15$ 。

由引理 2.5 知, 此时的 D 只可能是 $5-(15, 6, 1)$ 和 $5-(15, 7, 1)$ 设计。这两个设计的参数都不满足引理 2.3(c), 故是不存在的。

情形 5: $N = HS, v = 176$ 。

由引理 2.5 知, $k \leq 16$ 。除了 $k = 6, 8$, 其他的 k 值都不满足引理 2.3(c), 故 D 只可能是 $5-(176, 6, 1)$ 和 $5-(176, 8, 1)$ 设计, 由文献[17]知, 这种设计不存在。

情形 6: $N = Co_3, v = 276$ 。

由引理 2.5 知, $k \leq 20$ 。除了 $k = 6$, 其他的 k 值都不满足引理 2.3(c)。因此, D 只可能是 $5-(276, 6, 1)$ 设计, 由文献[17]知, 这种设计不存在。

情形 7: $N = PSL(2, 11), v = 11$ 。

由引理 2.5 知, $k \leq 6$ 。这些 k 都不满足 $k-4 | v-4 = 7$, 这与引理 2.3(c) 矛盾。

情形 8: $N = PSL(2, 8), v = 28$ 。

此时, $G = PSL(2, 8) : (G \cap \langle \alpha \rangle)$, 其中 α 是 $GF(8)$ 的域自同构。由 $PSL(2, q)$ 的子群结构知识可知, $PSL(2, 8)$ 中有 4 阶子群恰好固定 X 中的一个公共固定点。从而 G 中存在一个 4 阶子群 H 恰好固定 X 中的一个点, 即就是说 H 在 X 上拟正则。由引理 2.7, $k-1 | v-1 = 27$ 。而由引理 2.5 知, $k \leq 8$, 这些值显然不满足以上的整除关系, 这是一个矛盾。

情形 9: $N = Sz(q), v = q^2 + 1, q = 2^{2e+1} > 2$ 。

此时, $Aut(N) = Sz(q): \langle \alpha \rangle$, 这里 α 表示 Frobenius 自同 $GF(q) \mapsto GF(q), x \mapsto x^2$ 。因此, 由 Dedekind 定律, $G = Sz(q): (G \cap \langle \alpha \rangle)$, 并且 $|G| = (q^2 + 1)q^2(q^2 - 1)a, a \mid 2e + 1$ 。由引理 2.3(b) 和 G 的 2-传递性可推出,

$$(q^3 - 3)(q^3 - 2)(q + 1) = k(k - 1)(k - 2)(k - 3)(k - 4) \frac{a}{|G_B|}, \quad (1)$$

这里 B 是属于 $\tilde{B}$ 一个区。

对于任意的 $g \in G$, 设 $|Fix_X(g)| \geq 3$ 。令 $x \in Fix_X(g)$, P 是 $Sz(q)_x$ 的一个正规的 Sylow 2-子群, 它正则的作用在集合 $X \setminus \{x\}$ 上。定义 $C := C_P(g)$ 。如果 $y, z \in Fix_X(g) \setminus \{x\}$, 那么存在 $h \in P$, 使得 $z = y^h$ 。因此, $y^{hg} = y^h = y^{gh}$, 于是, 我们可得 $[h^{-1}, g^{-1}] \in G_{xy} \cap [P, G_x] \leq P_y = 1$ 。从而 $h \in C$, 因此 C 点传递的作用于集合 $Fix_X(g) \setminus \{x\}$ 上。因为 $|Fix_X(g)| \geq 3$, 故 $|Fix_X(g)| \equiv 1 \pmod{2}$ 。

显然, 集合 $Fix_X(g)$ 左乘 $C_{Sz(q)}(g)$ 是不变的, 且群 $C_{Sz(q)}(g)$ 作用在集合 $Fix_X(g)$ 上。因为 $x \in Fix_X(g)$ 是可以任意选择的, 从而群 $C_{Sz(q)}(g)$ 作用在集合 $Fix_X(g)$ 上是点传递的。

因此, $|Fix_X(g)| \mid |Sz(q)|$ 。由于 3 不能够整除 $|Sz(q)| = (q^2 + 1)q^2(q^2 - 1)$, 从而 $|Fix_X(g)| \neq 3$ 。再由 $|Fix_X(g)| \equiv 1 \pmod{2}$, 可得 $|Fix_X(g)| \geq 5$ 。

因为 G 的区传递性, 我们可以选择某个合适的唯一区组进行讨论。显然, $\langle \alpha \rangle \leq Aut(N)_{0,1,\infty}$ 。从而 $\langle \alpha \rangle$ 必稳定某 5 个点。故由 Steiner 5-设计的定义可知, $G \cap \langle \alpha \rangle \leq G_B$, 从而 $a \mid |G_B|$ 。因 G 2-传递, 从而 $|G_{xy}| = (q - 1)a$ 。故 G 的 4 阶元最多稳定 X 中的一个点, 而 $v = q^2 + 1$ 为奇数, 故 G 的 4 阶元恰好稳定 X 中的一个点。由引理 2.7, 我们有 $k - 1 \mid v - 1$, 从而 $(k - 1, a) = 1$ 。由(1)可得, $k - 1 \mid 2|G_B|$, 且 $a \mid \frac{2|G_B|}{k - 1}$ 。于是

$$(q^2 - 3)(q^2 - 2)(q + 1) \leq 2k(k - 2)(k - 3)(k - 4).$$

这与引理 2.5 矛盾。

情形 10: $N = Re(q), q = 3^{2e+1}; v = q^3 + 1$ 。

此时, $Aut(N) = Re(q): \langle \alpha \rangle$, 这里 α 表示 Frobenius 自同 $GF(q) \mapsto GF(q), x \mapsto x^2$ 。因此, 由 Dedekind 定律, $G = Re(q): (G \cap \langle \alpha \rangle)$, 并且 $|G| = (q^3 + 1)q^3(q^3 - 1)a, a \mid 2e + 1$ 。由引理 2.3(b) 和 G 的 2-传递性可推出

$$(q^3 - 3)(q^3 - 2)(q^2 + q + 1) = k(k - 1)(k - 2)(k - 3)(k - 4) \frac{a}{|G_B|}, \quad (2)$$

这里 B 是属于 $\tilde{B}$ 一个区。

于是

$$(q^3 - 3)(q^3 - 2)(q^2 + q + 1) \leq k(k - 1)(k - 2)(k - 3)(k - 4)a,$$

这与引理 2.5 得到的 $k \leq \sqrt{q^3 + 1} + \frac{7}{2} < q^{\frac{3}{2}} + 4$ 矛盾。

综合以上讨论, 本文的主要定理得证。

基金项目

本论文是第三作者的湖南省教育厅科研重点项目(No. 23A0737)和第一作者的长沙师范学院科研课题(No. XJYB 202336)的阶段性成果。

参考文献

- [1] Huber, M. (2009) Flag-Transitive Steiner Designs. Birkhäuser.
- [2] Zhou, S. and Dong, H. (2009) Alternating Groups and Flag-Transitive Triplanes. *Designs, Codes and Cryptography*, **57**, 117-126. <https://doi.org/10.1007/s10623-009-9355-2>
- [3] Dong, H. and Zhou, S. (2011) Alternating Groups and Flag-Transitive $2-(v, k, 4)$ Symmetric Designs. *Journal of Combinatorial Designs*, **19**, 475-483. <https://doi.org/10.1002/jcd.20294>
- [4] Dai, S., Gong, L. and Li, S. (2019) A Note on Flag-Transitive $3-(v, k, 2)$ Designs. *Utilitas Mathematica*, **111**, 67-74.
- [5] 龚罗中, 刘伟俊, 唐建雄, 谭琼华. 旗传递 $5-(v, k, 2)$ 设计的分类[J]. 数学杂志, 2014, 34(3): 553-561.
- [6] Huber, M. (2007) The Classification of Flag-Transitive Steiner 4-Designs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **26**, 183-207. <https://doi.org/10.1007/s10801-006-0053-0>
- [7] Huber, M. (2007) A Census of Highly Symmetric Combinatorial Designs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **26**, 453-476. <https://doi.org/10.1007/s10801-007-0065-4>
- [8] Cameron, P.J. and Praeger, C.E. (1993) Block-Transitive t -Designs, II: Large t . In: de Clerck, F. and Hirschfeld, J., Eds., *Finite Geometries and Combinatorics*, Cambridge University Press, 103-120. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526336.012>
- [9] Cameron, P.J. (1985) Parallelisms of Complete Designs. London Math. Soc. Lecture Note Series 23, Cambridge Univ. Press.
- [10] Liu, W., Li, H. and Ma, C. (2001) Suzuki Groups and $2-(v, k, 1)$ Designs. *European Journal of Combinatorics*, **22**, 513-519. <https://doi.org/10.1006/eujc.2000.0413>
- [11] Li, H. and Liu, W. (2001) Line-Primitive Linear Spaces with $\frac{k}{(k,v)} \leq 10$. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **93**, 153-167. <https://doi.org/10.1006/jcta.2000.3079>
- [12] Liu, W. (2003) Finite Linear Spaces Admitting a Projective Group $PSU(3, q)$ with Q Even. *Linear Algebra and Its Applications*, **374**, 291-305. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(03\)00610-4](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(03)00610-4)
- [13] Lan, T., Liu, W. and Yin, F. (2023) Block-Transitive $3-(v, k, 1)$ Designs Associated with Alternating Groups. *Designs, Codes and Cryptography*, **91**, 2791-2807. <https://doi.org/10.1007/s10623-023-01215-7>
- [14] Gan, Y. and Liu, W. (2023) Block-Transitive Automorphism Groups of Steiner 3-Designs. *Discrete Mathematics*, **346**, Article ID: 113534. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113534>
- [15] Lan, T., Liu, W. and Yin, F. (2024) Block-Transitive $3-(v, k, 1)$ Designs on Exceptional Groups of Lie Type. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **59**, 879-897. <https://doi.org/10.1007/s10801-024-01315-0>
- [16] Alltop, W. (1971) 5-Designs in Affine Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **39**, 547-551. <https://doi.org/10.2140/pjm.1971.39.547>
- [17] 庞旋, 詹小秦, 区传递 Steiner t -设计与散在单群[J]. 浙江大学学报(理学版), 2024, 51(3): 265-272.
- [18] Kantor, W.M. (1972) K-Homogeneous Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **124**, 261-265. <https://doi.org/10.1007/bf01113919>
- [19] Shen, H. (2008) Theory of Combinatorial Designs. Shanghai Jiao Tong University Press.
- [20] Kantor, W.M. (1985) Homogeneous Designs and Geometric Lattices. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **38**, 66-74. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(85\)90022-6](https://doi.org/10.1016/0097-3165(85)90022-6)