Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 237-242
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143110

Hans汉斯

基于递进结构的广义Nekrasov矩阵的判定

刘一博

北京指南针科技发展股份有限公司资源中心，北京

收稿日期：2025年2月17日；录用日期：2025年3月9日；发布日期：2025年3月18日

摘　要

本文通过递进结构选取正对角矩阵因子的元素，利用Nekrasov矩阵的性质以及不等式的放缩技巧，给出了一类新的Nekrasov矩阵的判定方法。

关键词

非奇异H-矩阵，Nekrasov矩阵，广义对角占优矩阵

Determination of Generalized Nekrasov Matrices Based on Progressive Structure

Yibo Liu

Resource Center, Beijing Compass Technology Development Co., Ltd., Beijing

Received: Feb. 17th, 2025; accepted: Mar. 9th, 2025; published: Mar. 18th, 2025

Abstract

This article presents a new method for determining a class of Nekrasov matrices by selecting the elements of diagonal matrix factors through a progressive structure, utilizing the properties of Nekrasov matrices and scaling techniques of inequalities.

Keywords

Nonsingular H-Matrices, Nekrasov Matrices, Generalized Strictly Diagonally Dominate Matrices

文章引用: 刘一博. 基于递进结构的广义 Nekrasov 矩阵的判定[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 237-242.
DOI: 10.12677/aam.2025.143110

1. 引言

Nekrasov 矩阵是一类具有重要作用和意义的特殊矩阵，其在数值代数、控制理论、电力系统理论、经济学理论乃至统计学等众多领域中都有着广泛的应用。近些年，中外很多学者在这方面取得了研究成果[1]-[7]。如何简洁有效地判定一个矩阵是否为 Nekrasov 矩阵具有重要的理论和现实意义。不过判定广义 Nekrasov 矩阵的结论中有很多是基于非奇异 H-矩阵中的思路，沿袭了判别非奇异 H-矩阵的方法，没有对 $l_i(A)$ 部分进行充分考虑(见文献[8]-[12])。本文从 Nekrasov 矩阵富有特色的递进结构分析，给出了基于递进结构的 Nekrasov 矩阵的新的判定方法。为了叙述方便，下面列出一些记号及相关定义：

我们用 $C^{n\times n}$ 表示 n 阶复方阵集，用 N 表示指标集 $\{1,2,\cdots,n\}$。设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，记 $P_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$，$S_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$。若 $|a_{ii}|>r_i(A)$，$i\in N$，则称 A 为严格(行)对角占优矩阵，记为 $A\in D$。若存在正的对角矩阵 X 使得 AX 为严格对角占优矩阵，则称 A 为广义严格对角占优矩阵(非奇异 H-矩阵)，记为 $A\in D^*$。

下面我们引入 Nekrasov 矩阵的定义。

定义 1.1 令 $R_1(A)=r_1(A)$ 并且 $R_i(A)=\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$，$\forall i\in N\setminus\{1\}$。如果矩阵 $A\in C^{n\times n}=(a_{ij})$ 满足

$$|a_{ii}|\geq R_i(A),\ \forall i\in N \tag{1.1}$$

则 A 被称为弱 Nekrasov 矩阵，如果(1.1)中所有不等式都是严格不等式，则 A 为 Nekrasov 矩阵。若存在正的对角矩阵 D 使得 AD 为 Nekrasov 矩阵，称矩阵 A 为广义 Nekrasov 矩阵，记为 $A\in N^*$。广义 Nekrasov 矩阵等价于广义对角占优矩阵。令

$$l_i(A)=\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}，\ 于是\ R_i(A)=l_i(A)+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|。$$

如果矩阵 A 是严格对角占优矩阵，根据 Nekrasov 矩阵的结构特点有 $r_i(A)\geq R_i(A)$，$\forall i\in N$，从而 A 显然属于 Nekrasov 矩阵。众所周知 Nekrasov 矩阵是非奇异 H-矩阵的重要子类。我们需要以下符号：

$$R_1^1(A)=P_1(A),\quad R_1^k(A)=\sum_{j\neq 1,k}^{n}|a_{1j}|+|a_{1k}|\frac{R_k(A)}{|a_{kk}|},\quad k>1$$

$$R_i^k(A)=\sum_{j\neq 1}^{i-1}|a_{ij}|\frac{R_j^k(A)}{|a_{jj}|}+\sum_{j=i+1,\neq k}^{n}|a_{ij}|+|a_{ik}|\frac{R_k(A)}{|a_{kk}|},\quad i\in N\setminus\{1,k\}$$

$$R_k^k(A)=\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|\frac{R_j^k(A)}{|a_{jj}|}+\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|,$$

$$\delta_i(A)=\frac{R_i^i(A)}{|a_{ii}|}，\ 因为\ R_i^i(A)\leq R_i(A)，\ 所以有\ \delta_i(A)\leq\frac{R_i(A)}{|a_{ii}|}。$$

$$N_1(A)=\{i\in N\mid 0<|a_{ii}|\leq R_i(A)\},\quad N_2(A)=\{i\in N\mid |a_{ii}|>R_i(A)\};$$

显然 $N = N_1(A) \oplus N_2(A)$，在不产生混淆的情况下 $N_1(A), N_2(A), \delta_i(A)$ 可以相应地简写为 N_1, N_2, δ_i。本文总是假定矩阵 A 中的每个指标对应的 $P_i(A)$ 以及 $|a_{ii}|$ 非零。

2. 基于迭代结构的 Nekrasov 矩阵的新判定

本节我们给出判定广义 Nekrasov 矩阵的新方法，改进了现有的若干结论。并通过举例说明它的有效性。我们需要以下技术性引理。

引理 2.1 [2] 设 $A \in C^{n\times n} = (a_{ij})$， $X = diag(x_1, \cdots, x_n)$，并且 $x_i \le 1$， $\forall i \in N$，则对于矩阵有

$$R_i(AX) \le R_i(A), \quad \forall i \in N \tag{2.1}$$

给定矩阵 A，以及 $i, j \in N$。令 $A_i = AD_i$，其中对角矩阵 $D_i = diag(d_1, \cdots, d_n)$，并且 $d_j = \begin{cases} 1, & j \ne i \\ \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|}, & j = i \end{cases}$。

我们得到以下结论：

引理 2.2 设 $A \in C^{n\times n} = (a_{ij})$，对于任意正整数 $i \in N$ 有

$$R_j(A_i) = R_j^i(A), \quad \forall j = 1, 2, \cdots, i \tag{2.2}$$

证明：当 $i = 1$ 时， $j = 1$，显然有 $R_1(A_1) = R_1^1(A)$。下面讨论 $i > 1$ 的情形。首先我们考虑 $j < i$ 的情况。当 $j = 1$ 时，则 $R_1(A_i) = \sum_{j=2,\ne i}^{n} |a_{1j}| + |a_{1i}| \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|} = R_1^i(A)$。因此(2.2)成立。

设 $a < i-1$ 为正整数，假设当 $j = 2, \cdots, a$ 时(2.2)式都成立，则当 $j = a+1$ 时可以得到：

$$\begin{aligned} R_j(A_i) &= \sum_{k=1}^{j-1} \left|(A_i)_{jk}\right| \frac{R_k(A_i)}{\left|(A_i)_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1}^{n} \left|(A_i)_{jk}\right| \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| \frac{R_k(A_i)}{|a_{kk}|} + \sum_{k=j+1,\ne i}^{n} |a_{jk}| + |a_{ji}| \frac{R_i(A)}{|a_{ii}|} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| \frac{R_k^i(A)}{|a_{kk}|} + \sum_{k=j+1,\ne i}^{n} |a_{jk}| + |a_{ji}| \frac{R_i(A)}{|a_{ii}|} \\ &= R_j^i(A) \end{aligned}$$

我们用数学归纳法证明了当 $\forall j = 1, 2, \cdots, i-1$，(2.2)均成立。

现在我们证明 $R_i(A_i) = R_i^i(A)$：

$$\begin{aligned} R_i(A_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} \left|(A_i)_{ij}\right| \frac{R_j(A_i)}{\left|(A_i)_{jj}\right|} + \sum_{j=i+1}^{n} \left|(A_i)_{ij}\right| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A_i)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j^i(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\ &= R_i^i(A) \end{aligned}$$

至此我们完成了引理 2.2 的证明。

下面给出本文的主要结论。

定理 2.1 设 $A \in C^{n\times n} = (a_{ij})$，若对于 $\forall i \in N_1$，以下不等式都成立，

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right|\frac{R_j(A)}{\left|a_{jj}\right|} + \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n}\left|a_{ij}\right| + \sum_{j=i+1,\in N_2}^{n}\left|a_{ij}\right|\delta_j \tag{2.3}$$

则矩阵 $A \in D^*$。

证明： 令 $\gamma_i = \dfrac{\left|a_{ii}\right| - \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n}\left|a_{ij}\right| - \sum_{j=i+1,\in N_2}^{n}\left|a_{ij}\right|\delta_j}{\sum_{j=i+1,\in N_2}^{n}\left|a_{ij}\right|}$（若 $\sum_{j=i+1,\in N_2}^{n}\left|a_{ij}\right| = 0$，则取 $\gamma_i = 1$），令 $\gamma = \dfrac{1}{2}\min\left\{\min_{i\in N_1}\gamma_i, \min_{i\in N_2} 1 - \dfrac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|}\right\}$。显然有 $0 < \gamma < \min_{i\in N_1}\gamma_i$ 并且 $\delta_i(A) + \gamma < 1$，$\forall i \in N_2$。

令正对角矩阵 $X = diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1 \\ \delta_i(A) + \gamma, & i \in N_2 \end{cases},$$

构造矩阵 $B = AX$，我们将证明 $B \in N$。不过在此之前我们先给出两个不等式。

令 $D_i^\gamma = diag(d_1^\gamma, d_2^\gamma, \cdots, d_n^\gamma)$ 其中 $d_j^\gamma = \begin{cases} 1, & j \neq i \\ \dfrac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|} + \gamma, & j = i \end{cases}$，构造矩阵 $A_i^\gamma = AD_i^\gamma$。

根据矩阵的构造很容易得出：

$$R_j(B) \le R_j(A_i^\gamma),\quad i \in N_2, j < i \tag{2.4}$$

我们将用数学归纳法证明对于任意 $i \in N_2, j < i$，都有

$$R_j(A_i) + \gamma R_j(A) \ge R_j(A_i^\gamma) \tag{2.5}$$

我们假设 $i > 1$，否则不存在正整数 $j < i$。

当 $j = 1$ 时，

$$\begin{aligned} R_1(A_i) + \gamma R_1(A) &= \sum_{k=2}^{n}\left|(A)_{1k}\right| + \gamma P_1(A) \\ &= \sum_{k=2,\neq i}^{n}\left|a_{1k}\right| + \left|a_{1i}\right|\frac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|} + \gamma\sum_{k=2}^{n}\left|a_{1k}\right| \\ &\ge \sum_{k=2,\neq i}^{n}\left|a_{1k}\right| + \left|a_{1i}\right|\left(\frac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|} + \gamma\right) \\ &= R_1(A_i^\gamma) \end{aligned}$$

设 $a < i-1$ 为正整数，假设当 $j = 2,3,\cdots,a$ 时，(2.5)都成立，则当 $j = a+1$ 时，有

$$\begin{aligned} & R_j(A_i) + \gamma R_j(A) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1}\left|(A_i)_{jk}\right|\frac{R_k(A_i)}{\left|(A_i)_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1}^{n}\left|(A)_{jk}\right| + \gamma\left(\sum_{k=1}^{j-1}\left|a_{jk}\right|\frac{R_k(A)}{\left|a_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1}^{n}\left|a_{jk}\right|\right) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1}\left|a_{jk}\right|\frac{R_k(A_i)}{\left|a_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1,\neq i}^{n}\left|a_{jk}\right| + \left|a_{ji}\right|\frac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|} + \gamma\left(\sum_{k=1}^{j-1}\left|a_{jk}\right|\frac{R_k(A)}{\left|a_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1}^{n}\left|a_{jk}\right|\right) \\ &\ge \sum_{k=1}^{j-1}\left|a_{jk}\right|\frac{R_k(A_i) + \gamma R_k(A)}{\left|a_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1,\neq i}^{n}\left|a_{jk}\right| + \left|a_{ji}\right|\left(\frac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|} + \gamma\right) \\ &\ge \sum_{k=1}^{j-1}\left|a_{jk}\right|\frac{R_k(A_i^\gamma)}{\left|a_{kk}\right|} + \sum_{k=j+1,\neq i}^{n}\left|a_{jk}\right| + \left|a_{ji}\right|\left(\frac{R_i(A)}{\left|a_{ii}\right|} + \gamma\right) = R_j(A_i^\gamma) \end{aligned}$$

现在我们开始定理 2.1 的证明。当 $i \in N_1$ 时，如果 $\sum_{j=i+1,\in N_2}^{n} |a_{ij}| \neq 0$，应用引理 2.1 可以得到：

$$
\begin{aligned}
|b_{ii}| = |a_{ii}| &> \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1,\in N_2}^{n} |a_{ij}| \delta_j + \gamma \sum_{j=i+1,\in N_2}^{n} |a_{ij}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1,\in N_2}^{n} |a_{ij}| (\delta_j + \gamma) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \frac{R_j(A)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \frac{R_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| = R_i(B)
\end{aligned}
$$

如果 $\sum_{j=i+1,\in N_2}^{n} |a_{ij}| = 0$，则有 $|a_{ij}| = 0$，$\forall j > i, j \in N_2$，从而可得：

$$
\begin{aligned}
|b_{ii}| = |a_{ii}| &> \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n} |a_{ij}| \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \frac{R_j(A)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n} |b_{ij}| \\
&\geq \sum_{j=1,\in N_1}^{i-1} |b_{ij}| \frac{R_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=i+1,\in N_1}^{n} |b_{ij}| = R_i(B)
\end{aligned}
.
$$

当 $i \in N_2$ 时，应用(2.2)、(2.4)、(2.5)可得

$$
\begin{aligned}
|b_{ii}| = |a_{ii}| (\delta_i + \gamma) &> |a_{ii}| \delta_i + R_i(A) \gamma = R_i^i(A) + R_i(A) \gamma \\
&= R_i(A_i) + R_i(A) \gamma = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A_i)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + R_i(A) \gamma \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A_i)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + \gamma \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(A_i) + \gamma R_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{R_j(B)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \frac{R_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| = R_i(B)
\end{aligned}
$$

于是我们得到 $|b_{ii}| > R_i(B)$，$\forall i \in N$，所以 $B \in N$，从而 $A \in D^*$。

例 2.1 观察矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

$R_1(A) = 10$，$R_2(A) = 8$，$R_3(A) = 4$，$R_4(A) = 5.5$。因为 $R_4(A) = 5.5 > 5 = |a_{44}|$，所以文[8]定理 1、2、3，文[10]定理 1 都不能判断矩阵 A 是否为非奇异 H-矩阵。根据定理 2.1 有 $N_1 = \{1, 2, 4\}$，$N_2 = \{3\}$，于是

$$A_3 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 0.5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$R_1(A_3) = 7, \quad R_2(A_3) = 5.5, \quad R_3(A_3) = 4.$$

3. 结论

放缩矩阵是研究非奇异 H-矩阵的一个重要工具。本文从 Nekrasov 矩阵的结构特点入手，构造一类新的放缩矩阵，得到了判断非奇异 H-矩阵的一个新的充分条件。该结论在一定条件下改进了已有成果。

参考文献

[1] Li, W. (1998) On Nekrasov Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **281**, 87-96. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(98)10031-9

[2] Lyu, Z., Zhou, L.X. and Liu, J.Z. (2021) A Generalization of S-Nekrasov Matrices. *Journal of Mathematical Inequalities*, **15**, 1093-1100. https://doi.org/10.7153/jmi-2021-15-74

[3] Li, C., Liu, Q., Gao, L. and Li, Y. (2015) Subdirect Sums of Nekrasov Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 208-218. https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1032198

[4] Liu, J., Zhang, J., Zhou, L. and Tu, G. (2018) The Nekrasov Diagonally Dominant Degree on the Schur Complement of Nekrasov Matrices and Its Applications. *Applied Mathematics and Computation*, **320**, 251-263. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.09.032

[5] Peña, J.M. (2010) Diagonal Dominance, Schur Complements and Some Classes of H-Matrices and P-Matrices. *Advances in Computational Mathematics*, **35**, 357-373. https://doi.org/10.1007/s10444-010-9160-5

[6] 高磊, 井霞, 王亚强. S-Nekrasov 矩阵的逆矩阵无穷范数的新上界[J]. 高等学校计算数学学报, 2018, 40(2): 97-109.

[7] 李艳艳. Nekrasov 矩阵的线性互补问题含参数的上界[J]. 文书学院学报, 2023, 37(5): 63-66.

[8] 郭爱丽, 刘建州. 广义 Nekrasov 矩阵的充分条件[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(3): 189-195.

[9] 郭爱丽, 刘建州. 广义 Nekrasov 矩阵的判定[J]. 工程数学学报, 2009, 26(4): 697-702.

[10] 郭爱丽, 周立新. 广义 Nekrasov 矩阵的一类递进判别法[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2014, 31(2): 30-36.

[11] 石玲玲, 徐仲, 陆全, 等. 广义 Nekrasov 矩阵的新迭代判别法[J]. 数值计算与计算机应用, 2013, 34(2): 117-122.

[12] 石玲玲. 广义 Nekrasov 矩阵的一组细分迭代判定条件[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(8): 227-232.