

求解非线性退化抛物方程的HWENO-LW格式

孔莹莹, 刘红霞

太原理工大学数学学院, 山西 晋中

收稿日期: 2025年2月17日; 录用日期: 2025年3月9日; 发布日期: 2025年3月19日

摘 要

本文构造了基于Lax-Wendroff时间离散的有限差分HWENO (Hermite加权本质非振荡)格式, 用于求解非线性退化抛物方程。与传统的Runge-Kutta时间离散方法相比, Lax-Wendroff方法在提高计算效率的同时, 能够在解的光滑区域实现时空一致的高阶精度。通过数值算例, 验证了该方法的有效性。

关键词

HWENO格式, Lax-Wendroff时间离散, 非线性退化抛物方程, 有限差分方法

HWENO-LW Scheme for Solving Nonlinear Degenerate Parabolic Equations

Yingying Kong, Hongxia Liu

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Feb. 17th, 2025; accepted: Mar. 9th, 2025; published: Mar. 19th, 2025

Abstract

This paper constructs a finite difference HWENO (Hermite Weighted Essentially Non-Oscillatory) scheme based on Lax-Wendroff time discretization for solving nonlinear degenerate parabolic equations. Compared to traditional Runge-Kutta time discretization methods, the Lax-Wendroff method improves computational efficiency while achieving high-order accuracy in both space and time in smooth regions of the solution. The effectiveness of the method is validated through numerical examples.

Keywords

HWENO Scheme, Lax-Wendroff Time Discretization, Nonlinear Degenerate Parabolic Equations, Finite Difference Method



1. 引言

对流扩散方程是粘性流体力学及其他实际问题中常见的一类基本运动方程, 在环境科学, 流体力学, 气体动力学等领域有着广泛应用。非线性抛物方程是其中一类重要的方程, 常用于描述非线性质量传递、多孔介质的毛吸附、热辐射扩散、不可压缩流体运动力学等问题。非线性抛物方程解具有双曲守恒律方程解的类似性质, 即真解会随着时间的推移, 出现间断和陡峭的过渡层, 使得精确解很难获得, 同样给数值求解带来了很大困难, 比如陡峭界面和紧支集界面以有限的速度传播。

近年来, 流体力学领域的高精度数值计算方法取得了快速发展, 并广泛应用于工程实践。常见的数值方法包括 TVD 格式[1], ENO 格式[2]以及 WENO 格式[3]-[8], 2005 年 Qiu 等人提出了 HWENO 格式[9] [10], 并应用于 Euler 方程和 Hamilton-Jacobi 方程的求解。该方法通过 Hermite 插值多项式提高数值模板的紧凑性, 同时保持数值格式的稳定性。此外, 针对 Euler 方程, Hamilton-Jacobi 方程和浅水波方程等问题, 需选择适当的时间离散方法, 如具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 法、线性多步法[11]或类似于 Lax-Wendroff 格式[12]的 Lax-Wendroff 时间离散[13]-[15]方法, 以实现时空全离散的数值求解。

本文结合 Lax-Wendroff 时间离散方法与 HWENO 格式来求解非线性退化抛物方程。Lax-Wendroff 方法能实现时空一致的高阶精度。与同阶 WENO 格式相比, 在相同模板条件下, 除原函数点信息外, HWENO 格式还具有导函数点的信息, 从而使得在相同精度的格式条件下, HWENO 格式所需模板点数更少。例如, 六阶 WENO 格式需要六个模板点, 而六阶 HWENO 仅需四个模板点。本文设计的六阶 HWENO 格式基于四点模板, 通过三个三点四次函数的非线性组合来近似节点处的二阶导数。为了确保格式的稳定性, 对 HWENO 格式构造过程中出现的负线性权重进行了特殊处理。数值结果验证了该格式的六阶精度及无振荡特性。

2. 非线性退化抛物方程的空间离散

2.1. 大模板上的空间重构

考虑一维情况下的非线性退化抛物方程,

$$\begin{cases} u_t = l(u)_{xx}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

为了简化计算, 采用均匀网格 $\{x_i\}, 1 \leq i \leq N$ 进行离散化, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ 表示计算单元, 且 $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ 是常数。为了构造 HWENO 格式, 将方程(1)两边对 x 求导, 从而得到下列方程组:

$$\begin{cases} u_t = l(u)_{xx}, & u(x, 0) = u_0(x), \\ v_t = z(u, v)_{xx}, & v(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

方程组(2)的守恒有限差分半离散形式为:

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\hat{l}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{l}_{i-\frac{1}{2}} \right), \\ \frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{z}_{i-\frac{1}{2}} \right). \end{cases} \quad (3)$$

定义函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases} l(u(x))_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} \varphi(\xi) d\xi d\eta, \\ z(u(x), v(x))_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} \varphi'(\xi) d\xi d\eta, \end{cases}$$

在模板 $S = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ 上, 利用函数点及导函数点得到埃尔米特插值多项式, 得到数值通量:

$$\begin{aligned} \hat{l}_{i+\frac{1}{2}} &= p\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{54}(-135l(u_i) + 135l(u_{i+1}) - 7l(u_{i-1}) + 7l(u_{i+2})) \\ &\quad + \frac{\Delta x}{36}(-z(u_{i-1}, v_{i-1}) - 33z(u_i, v_i) - 33z(u_{i+1}, v_{i+1}) - z(u_{i+2}, v_{i+2})), \\ \hat{z}_{i+\frac{1}{2}} &= p'\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\Delta x}(l(u_i) + l(u_{i+1}) - l(u_{i-1}) + l(u_{i+2})) \\ &\quad + \frac{1}{4}(-z(u_{i-1}, v_{i-1}) - 9z(u_i, v_i) + 9z(u_{i+1}, v_{i+1}) + z(u_{i+2}, v_{i+2})). \end{aligned}$$

2.2. HWENO 格式对原函数方程的重构

在小模板点 $s_0 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, $s_1 = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$, $s_2 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ 上利用函数点值及导函数点值构造埃尔米特多项式, 满足:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} \int_{I_{i+j}} \left(\int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} h_0(\xi) d\xi \right) d\eta &= l(u_j), \frac{1}{\Delta x^2} \int_{I_{i+j}} \left(\int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} h'_0(\xi) d\xi \right) d\eta = z(u_j, v_j), j = -1, 0, 1; \\ \frac{1}{\Delta x^2} \int_{I_{i+j}} \left(\int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} h_1(\xi) d\xi \right) d\eta &= l(u_j), \frac{1}{\Delta x^2} \int_{I_{i+j}} \left(\int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} h'_1(\xi) d\xi \right) d\eta = z(u_j, v_j), j = 0, 1, 2; \\ \frac{1}{\Delta x^2} \int_{I_{i+j}} \left(\int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} h_2(\xi) d\xi \right) d\eta &= l(u_j), j = -1, 0, 1, 2; \\ \frac{1}{\Delta x^2} \int_{I_{i+j}} \left(\int_{\eta-\frac{\Delta x}{2}}^{\eta+\frac{\Delta x}{2}} h'_2(\xi) d\xi \right) d\eta &= z(u_j, v_j), j = -1, 2. \end{aligned}$$

由 $p^{(m)}(x) = h_m\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h_m\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)$ 得到四阶多项式

$$p^{(0)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), p^{(1)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), p^{(2)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

利用 $p\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{m=0}^2 d_m p^{(m)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, 得到线性权 $d_0 = \frac{11}{7}, d_1 = \frac{11}{7}, d_2 = -\frac{15}{7}$, 从而求得光滑指示子

$$\beta_m = \sum_{l=1}^2 \Delta x^{2l-1} \int_{I_i} \left(\frac{d^l}{dx^l} p^{(m)}(x) \right)^2 dx. \quad (4)$$

为确保格式的稳定性, 采用特殊方法[16]将负线性权重转换为正线性权重

$$\tilde{\sigma}_m^+ = \frac{1}{2}(d_m + \alpha |d_m|), \tilde{\sigma}_m^- = \tilde{\sigma}_m^+ - d_m, m = 0, 1, 2,$$

得到最终线性权 $\sigma_m^\pm = \tilde{\sigma}_m^\pm / \sum_{m=0}^2 \tilde{\sigma}_m^\pm$ 。基于光滑指示子定义非线性权

$$\omega_m^\pm = \frac{\tilde{\omega}_m^\pm}{\sum_{l=0}^2 \tilde{\omega}_l^\pm}, \omega_l^\pm = \frac{\sigma_l^\pm}{(\varepsilon + \beta_l)^2}, m, l = 0, 1, 2.$$

本文取 $\varepsilon = 10^{-6}$ 。将正负项线性组合, 得到最终的非线性权

$$\omega_m = \gamma^+ \omega_m^+ - \gamma^- \omega_m^-, m = 0, 1, 2.$$

从而得

$$\hat{l}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^2 \omega_m p_{i+\frac{1}{2}}^{(m)}.$$

2.3. HWENO 格式对导函数方程的重构

类似地, 在与 2.2 节相同的小模板点上使用函数点值及导函数点值构造埃尔米特四阶多项式, 得到 $p^{(0)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), p^{(1)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), p^{(2)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, 此时线性权为 $d'_0 = \frac{3}{7}, d'_1 = \frac{3}{7}, d'_2 = \frac{1}{7}$, 从而得到最终估计

$$\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^2 \omega'_m p_{i+\frac{1}{2}}^{(m)}.$$

2.4. Mapped 非线性权重

对上述非线性权进行精度分析,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^2 (\omega_m - d_m) p_{i+\frac{1}{2}}^{(m)} &= \theta_{i+\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^2 (\omega_m - d_m) + \Delta x^6 \sum_{m=0}^2 A_m (\omega_m - d_m) + \sum_{m=0}^2 (\omega_m - d_m) O(\Delta x^7), \\ \sum_{m=0}^2 (\omega'_m - d'_m) p_{i+\frac{1}{2}}^{(m)} &= \theta'_{i+\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^2 (\omega'_m - d'_m) + \Delta x^5 \sum_{m=0}^2 B_m (\omega'_m - d'_m) + \sum_{m=0}^2 (\omega'_m - d'_m) O(\Delta x^6), \end{aligned}$$

由于 $\sum_{m=0}^2 \omega_m = \sum_{m=0}^2 d_m = 1, \sum_{m=0}^2 \omega'_m = \sum_{m=0}^2 d'_m = 1$, 为了在光滑区域确保原函数和导函数均达到六阶精度, 根据精度分析, 非线性权需满足以下条件:

$$\begin{aligned} \omega_m - d_m &= O(\Delta x^2), \\ \omega'_m - d'_m &= O(\Delta x^3), \end{aligned} \quad (5)$$

对光滑指示子进行精度分析, 将其带入非线性权, 得到

$$\begin{aligned} \sigma_m^\pm &= \omega_m^\pm \left(\sum_{k=0}^2 \frac{\sigma_k^\pm}{(\varepsilon + \beta_k)^2} \right) (\varepsilon + \beta_k)^2 \\ &= \omega_m^\pm \left(\frac{1}{D^2} (1 + O(\Delta x^2)) \right) \left(D (1 + O(\Delta x^2)) \right)^2 \\ &= \omega_m^\pm + O(\Delta x^2), m = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \omega_m - d_m &= O(\Delta x^2), \\ \omega'_m - d'_m &= O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

发现导函数方程的非线性权不满足精度条件(5), 利用特殊处理方法[17]对非线性权进行处理

$$g_m(\omega') = \frac{\omega'(d'_m + d_m'^2 - 3d'_m\omega' + \omega'^2)}{d_m'^2 + \omega'(1 - 2d'_m)}, m = 0, 1, 2.$$

取 $\delta'_m = g_m(\omega'_m)$, 定义最终非线性权

$$\omega_m^{(M)} = \frac{\delta'_m}{\sum_{m=0}^2 \delta'_m}, m = 0, 1, 2. \quad (6)$$

导函数估计的最终形式为

$$\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^2 \omega_m^{(M)} p_{i+\frac{1}{2}}^{(m)}$$

对映射后的非线性权进行精度分析

$$\begin{aligned} \delta'_m &= g_m(d'_m) + g'_m(d'_m)(\omega'_m - d'_m) + \frac{g''_m(d'_m)}{2}(\omega'_m - d'_m)^2 + \dots \\ &= d'_m + O(\Delta x^3) + \frac{g'''_m(d'_m)}{24}O(\Delta x^4), \end{aligned}$$

根据 $\frac{1}{\sum_{m=0}^2 \delta'_m} = \frac{1}{1 + O(\Delta x^3)} = 1 + O(\Delta x^3)$, 将其代入(6)得到

$$\begin{aligned} \omega_m^{(M)} &= \left(d'_m + O(\Delta x^3) + \frac{g'''_m(d'_m)}{24}O(\Delta x^4) \right) (1 + O(\Delta x^3)) \\ &= d'_m + O(\Delta x^3) + \frac{g'''_m(d'_m)}{24}O(\Delta x^4). \end{aligned}$$

通过分析, 映射后的非线性权能够满足精度要求(5), 因此可以保持 HWENO 格式在不连续区域的非振荡性, 并在连续区域达到六阶精度, 相关验证结果将在后续的数值试验中给出。

3. Lax-Wendroff 时间离散

设时间步长为 Δt , u^n 表示第 n 时间层, $u^{(r)}$ 表示 u 的 r 阶时间导数, 则 u, v 在时间方向上的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t u' + \frac{\Delta t^2}{2} u'' + \dots + \frac{\Delta t^r}{r!} u^{(r)} + O(\Delta t^{r+1}), \\ v^{n+1} &= v^n + \Delta t v' + \frac{\Delta t^2}{2} v'' + \dots + \frac{\Delta t^r}{r!} v^{(r)} + O(\Delta t^{r+1}). \end{aligned}$$

上述展开式的精度可以进行选择, 本文取 $r = 4$, 可参考文献[14]。Lax-Wendroff 时间离散方法的构造过程如下:

第一步, 利用 HWENO 格式求解得到一阶导数 u', v' 。

第二步, 先通过偏微分方程求解二阶导数, 再通过插值进行近似, 得到:

$$\begin{aligned} u''_i &\approx -\frac{1}{12\Delta x^2}(\phi_{i-2} - 16\phi_{i-1} + 30\phi_i - 16\phi_{i+1} + \phi_{i+2}) \\ v''_i &\approx -\frac{1}{12\Delta x^2}(\varphi_{i-2} - 16\varphi_{i-1} + 30\varphi_i - 16\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}). \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\phi &= l'(u)u', \\ \varphi &= l''(u)vu' + l'(u,v)v'.\end{aligned}$$

第三步, 类似的, 对于三阶导数:

$$\begin{aligned}u_i''' &\approx -\frac{1}{12\Delta x^2}(\phi_{i-2} - 16\phi_{i-1} + 30\phi_i - 16\phi_{i+1} + \phi_{i+2}) \\ v_i''' &\approx -\frac{1}{12\Delta x^2}(\varphi_{i-2} - 16\varphi_{i-1} + 30\varphi_i - 16\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2})\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\phi &= l'(u)u'' + l''(u)(u')^2, \\ \varphi &= l'''(u)v(u')^2 + l''(u)(2v'u' + vu'') + l'(u)v''.\end{aligned}$$

第四步, 对于四阶导数:

$$\begin{aligned}u_i^{(4)} &\approx -\frac{1}{12\Delta x^2}(\phi_{i-2} - 16\phi_{i-1} + 30\phi_i - 16\phi_{i+1} + \phi_{i+2}) \\ v_i^{(4)} &\approx -\frac{1}{12\Delta x^2}(\varphi_{i-2} - 16\varphi_{i-1} + 30\varphi_i - 16\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2})\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\phi &= l'(u)u''' + 3l''(u)u''u' + l'''(u)(u')^3, \\ \varphi &= l'''(u)v'(u')^2 + 2l''(u)v'u'u'' + l^{(4)}(u)(u')^3v + 2(l''(u)v'u'' + l''(u)v''u' + l'''(u)(u')^2v') \\ &\quad + l''(u)vu''' + l''(u)v'u'' + l'''(u)v'u'u'' + l'(u)v''' + l''(u)v''u'.\end{aligned}$$

利用此方法, 可以得到时空同步的数值离散格式。其原理与 Lax-Wendroff 格式类似, 即通过空间导数替代泰勒展开中的时间导数, 因此称为 Lax-Wendroff 时间离散。理论上, 这种离散格式能够实现任意阶精度, 但随着精度的提升, 计算量也会相应增加。

4. 数值试验

本节利用大量数值算例验证格式的精度及稳定性。为了确保在精度测试中空间误差占主导地位, 我们选取适合的 CFL 数为 0.35, 进行数值试验使用的计算机硬件配置: 联想 AMD Ryzen 5 2500U。

4.1. 精度验证

我们首先验证六阶有限差分 HWENO 格式在求解周期边界热传导方程初值问题时的精度。

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \sin(x), -\pi \leq x < \pi \end{cases} \quad (7)$$

方程(7)的精确解为

$$u^e(x, t) = e^{-t} \sin(x).$$

在表 1 中, 我们展示了 $T=2$ 时使用 HWENO-LW 与 HWENO-RK 格式求解的数值结果, 表 2 则给出了两种格式的计算时间。结果表明, 两种格式都能达到预期的精度阶, 且计算精度相近。然而, 根据表 2 中的结果, HWENO-LW 格式的计算时间比 HWENO-RK 节省了约 $\frac{1}{3}$, 说明 Lax-Wendroff 格式在计算效

率上更具优势。

Table 1. The order of accuracy of the HWENO scheme
表 1. HWENO 格式的精度阶

N	HWENO-LW				HWENO-RK			
	L^1 error	order	L^∞ error	order	L^1 error	order	L^∞ error	order
10	1.79E-05		2.75E-05		3.36E-06		5.18E-06	
20	3.03E-07	5.89	4.79E-07	5.84	5.25E-08	6.00	8.31E-08	5.96
40	4.79E-09	5.98	7.55E-09	5.99	8.09E-10	6.02	1.27E-09	6.03
80	7.51E-11	6.00	1.18E-10	6.00	1.26E-11	6.00	1.98E-11	6.01
160	1.16E-12	6.02	1.82E-12	6.02	1.98E-13	5.99	3.11E-13	5.99

Table 2. The computational time of the HWENO scheme
表 2. HWENO 格式的计算时间

	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	$N = 160$
HWENO-LW	0.015625	0.046875	0.781250	2.046875	10.546875
HWENO-RK	0.046875	0.125000	1.625000	4.734375	13.062500

4.2. 对流扩散 Buckley-Leverett 方程

研究标量对流扩散方程即 Buckley-Leverett 方程[18]

$$u_t + F(u)_x = \varepsilon (\tau(u)u_x)_x, \varepsilon \tau(u) \geq 0.$$

该模型常用来模拟地下石油勘探中的两相流。

这里我们取参数 $\varepsilon = 0.01$ ，非凸的流通量函数 $F(u)$

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2},$$

和

$$\tau(u) = \begin{cases} 4u(1-u), & 0 \leq u \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

初值条件为

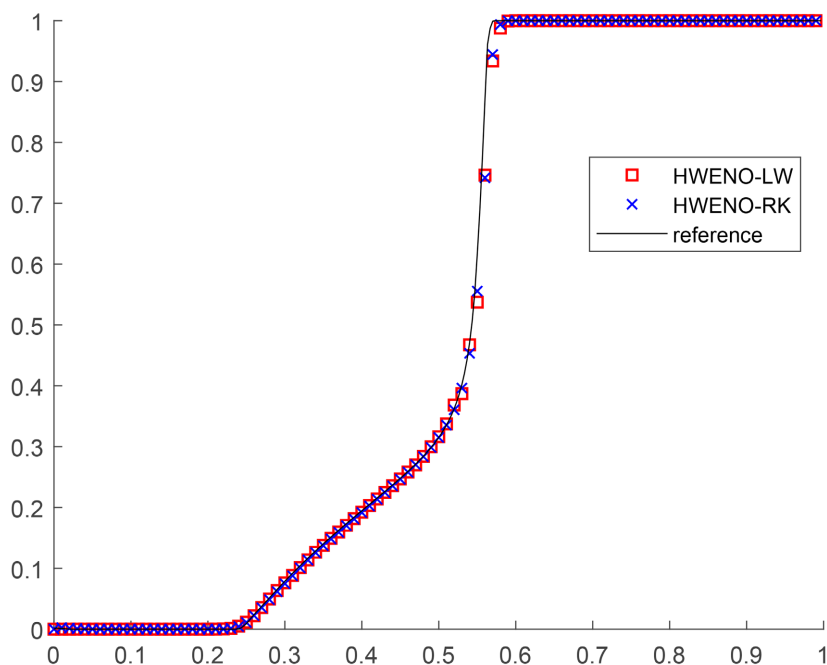
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1, & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$u(0, t) = 1$ 为边界条件。

对于对流项, 采用五阶有限差分 HWENO 格式和 Lax-Friedrichs 数值流通量分裂。图 1 给出了 $T = 0.2$ ，计算区域 $[0, 1]$ 被分成 $N = 100$ 个一致网络时的数值解，并与[18]的数值结果进行对比，结果表明 HWENO-LW 与 HWENO-RK 格式均能精确地收敛到正确的熵解，并且在间断处保持了无振荡特性。从表 3 的运行时间可知，HWENO-LW 格式的计算效率更高。

Table 3. The computational time of the HWENO scheme for solving the Buckley-Leverett equation**表 3.** HWENO 格式求解 Buckley-Leverett 方程的解的运行时间

时间	HWENO-LW	HWENO-RK
$N = 100$	15.254 s	20.568 s

**Figure 1.** The solution of the Buckley-Leverett equation**图 1.** Buckley-Leverett 方程的解

4.3. 强退化对流扩散方程

考虑强退化对流扩散方程[18]

$$u_t + F(u)_x = \varepsilon(\tau(u)u_x)_x, \varepsilon\tau(u) \geq 0.$$

参数 $\varepsilon = 0.1$, $F(u) = u^2$, 及

$$\tau(u) = \begin{cases} 0, & |u| \leq 0.25, \\ 1, & |u| > 0.25, \end{cases}$$

初值条件为

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 0.4 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.4, \\ -1, & \frac{1}{\sqrt{2}} - 0.4 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

计算区域为 $[-2, 2]$ 。图 2 给出了 $T = 0.7$, 网格数取 $N = 100$ 时的数值计算结果。 $\square$ 表示 HWENO-LW 格式数值计算结果, $\times$ 表示 HWENO-RK 格式的计算结果, 与数值结果[18]一致, 并且在间断处是本质无振荡的。

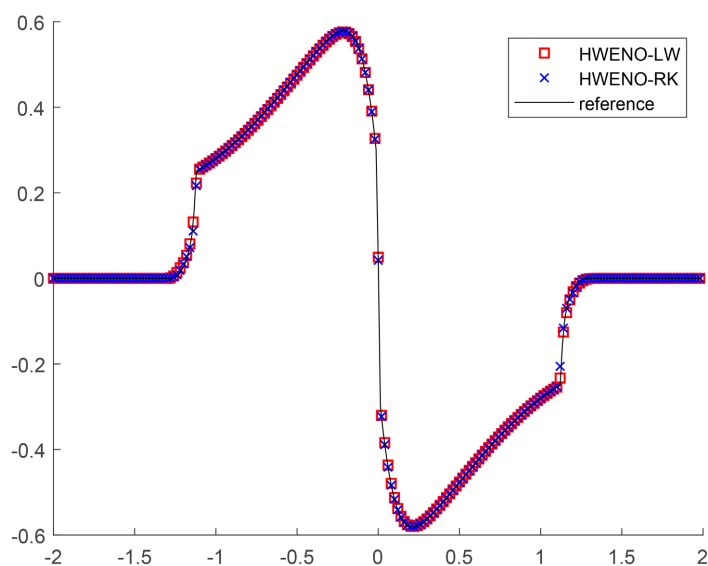


Figure 2. The solution of the Riemann problem
图 2. 黎曼问题的解

4.4. 二维多孔介质方程

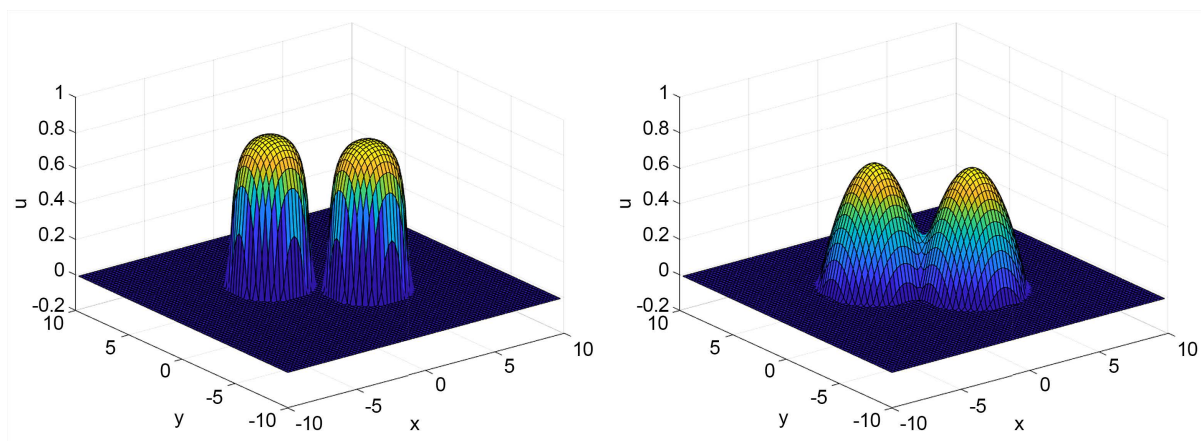
对于高维问题在实际实现中, 可以逐维分别进行 HWENO 离散。这里我们数值模拟二维多孔介质方程[19]

$$u_t = (u^2)_{xx} + (u^2)_{yy},$$

其中初值条件 $u(x, y, 0)$ 为两个凸包

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} \frac{-1}{e^{6-(x-2)^2-(y+2)^2}}, & (x-2)^2 + (y+2)^2 < 6, \\ \frac{-1}{e^{6-(x+2)^2-(y-2)^2}}, & (x+2)^2 + (y-2)^2 < 6, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

计算区域为 $[-10, 10] \times [-10, 10]$ 。图 3 中从左到右分别给出了 $T = 0, 0.5, 1.0, 4.0$ 时的数值解, 其中计算区域分成 80×80 的均匀网络, 数值结果同[19]中一致。



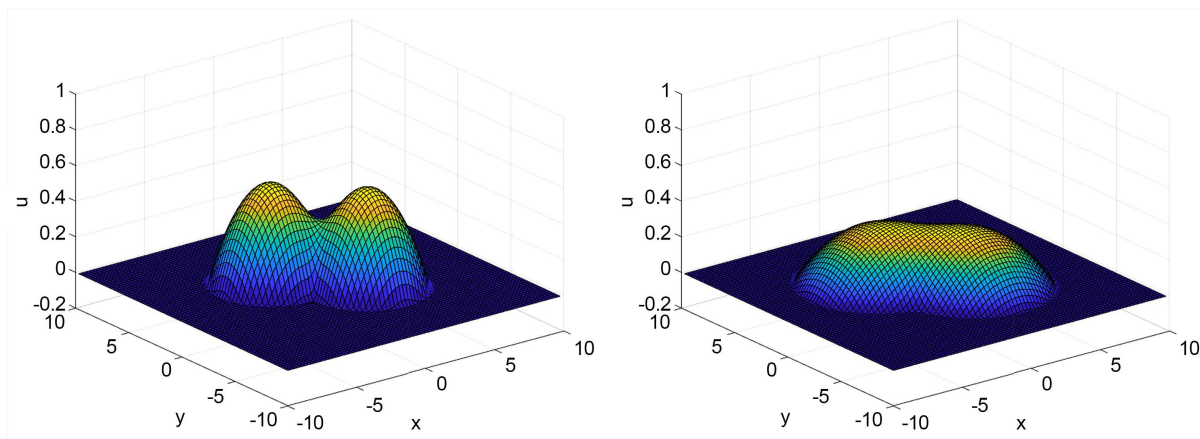


Figure 3. The solution of the two-dimensional porous media equation

图 3. 二维多孔介质方程的解

5. 结论

本文采用 Lax-Wendroff 时间离散的有限差分 HWENO 格式来求解非线性退化抛物方程。具体来说, HWENO 方法用于处理空间导数项, 而通过将空间导数替换为 Taylor 展开中的时间导数项, 构造了 Lax-Wendroff 时间离散方法, 从而得到了 HWENO-LW 格式。数值实验表明, 与传统的 Runge-Kutta 时间离散方法相比, Lax-Wendroff 方法在保持精度的同时显著提高了计算效率, 证明了该方法的有效性和工程应用前景。

基金项目

该工作得到了中国山西省自然科学基金(第 202103021224041 号)的部分支持。

参考文献

- [1] Harten, A. (1997) High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, **135**, 260-278. <https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5713>
- [2] Harten, A. and Osher, S. (1987) Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes. I. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **24**, 279-309. <https://doi.org/10.1137/0724022>
- [3] Jiang, G. and Shu, C. (1996) Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, **126**, 202-228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
- [4] Balsara, D.S. and Shu, C. (2000) Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes with Increasingly High Order of Accuracy. *Journal of Computational Physics*, **160**, 405-452. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6443>
- [5] Qiu, J. and Shu, C. (2002) On the Construction, Comparison, and Local Characteristic Decomposition for High-Order Central WENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, **183**, 187-209. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7191>
- [6] Liu, X., Osher, S. and Chan, T. (1994) Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*, **115**, 200-212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
- [7] Friedrich, O. (1998) Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for the Interpolation of Mean Values on Unstructured Grids. *Journal of Computational Physics*, **144**, 194-212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5988>
- [8] Hu, C. and Shu, C. (1999) Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes. *Journal of Computational Physics*, **150**, 97-127. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6165>
- [9] Qiu, J. and Shu, C. (2005) Hermite WENO Schemes and Their Application as Limiters for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method II: Two-Dimensional Case. *Computers & Fluids*, **34**, 642-663. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.05.005>
- [10] Qiu, J. and Shu, C. (2005) Hermite WENO Schemes for Hamilton-Jacobi Equations. *Journal of Computational Physics*,

- 204, 82-99. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.10.003>
- [11] Shu, C. (1988) Total-Variation-Diminishing Time Discretizations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **9**, 1073-1084. <https://doi.org/10.1137/0909073>
- [12] Lax, P. and Wendroff, B. (2005) Systems of Conservation Laws. In: *Selected Papers*, Volume I, Springer, 263-283.
- [13] Qiu, J. and Shu, C. (2003) Finite Difference WENO Schemes with Lax-Wendroff-Type Time Discretizations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **24**, 2185-2198. <https://doi.org/10.1137/s1064827502412504>
- [14] Qiu, J. (2007) Hermite WENO Schemes with Lax-Wendroff type Time Discretizations for Hamilton-Jacobi Equations. *Journal of Computational Mathematics*, **25**, 131-144.
- [15] Qiu, J. (2007) WENO Schemes with Lax-Wendroff Type Time Discretizations for Hamilton-Jacobi Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **200**, 591-605. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.01.022>
- [16] Shi, J., Hu, C. and Shu, C. (2002) A Technique of Treating Negative Weights in WENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, **175**, 108-127. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6892>
- [17] Henrick, A.K., Aslam, T.D. and Powers, J.M. (2005) Mapped Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes: Achieving Optimal Order near Critical Points. *Journal of Computational Physics*, **207**, 542-567. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.023>
- [18] Kurganov, A. and Tadmor, E. (2000) New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *Journal of Computational Physics*, **160**, 241-282. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6459>
- [19] Cavalli, F., Naldi, G., Puppo, G. and Semplice, M. (2007) High-Order Relaxation Schemes for Nonlinear Degenerate Diffusion Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **45**, 2098-2119. <https://doi.org/10.1137/060664872>