

至少具有两条对称轴的平面凸域的 对称轴的基本性质

成开劲, 梅 红, 罗 淼*

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2025年2月19日; 录用日期: 2025年3月11日; 发布日期: 2025年3月20日

摘 要

本文研究了二维平面上面积不为零且至少具有两条对称轴的轴对称凸域所具有的一些性质, 并主要通过反证法证明了相关的结论。

关键词

平面轴对称凸域, 对称轴, 对称轴的夹角

The Basic Properties of the Symmetry Axis of a Plane Convex Domain with at Least Two Symmetry Axes

Kaijin Cheng, Hong Mei, Miao Luo*

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Feb. 19th, 2025; accepted: Mar. 11th, 2025; published: Mar. 20th, 2025

Abstract

This article investigates some properties of axisymmetric convex domains with non-zero area and at least two symmetry axes on a two-dimensional plane and proves the relevant conclusions mainly through the method of contradiction.

*通讯作者。

文章引用: 成开劲, 梅红, 罗淼. 至少具有两条对称轴的平面凸域的对称轴的基本性质[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 326-330. DOI: 10.12677/aam.2025.143119

Keywords

Plane Axisymmetric Convex Domain, Axis of Symmetry, Angle of Symmetry Axis

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

轴对称是几何图形的一个重要性质，在艺术与生活中都有十分广泛的应用。轴对称图形有很多，其中有不少图形具有两条或两条以上的对称轴。经过查阅资料，大部分文献说明的均是轴对称图形本身具有的性质，极少有文献说明对称轴之间的关系，如文献[1]说明了对称轴的夹角问题，但没有相关文献描述平面轴对称凸域的对称轴之间的其他关系(如位置关系等)。因此，本文旨在探究具有至少两条对称轴的平面凸域的对称轴之间的关系，期望得出一些具有普遍性的性质。

2. 预备知识

定义 1 [2]: 设 C 为欧氏平面 R^2 上一非空子集。如果任意 $A \in C$ 且 $B \in C$ 时，连结 A, B 两点的线段上的点也属于 C ，则称 C 为凸集。并将凸集 C 的边界记为 ∂C 。有界闭凸集称为凸域。

定义 2 [3]: 平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合，则称该图形为轴对称图形，直线为该图形的对称轴。

定义 3: 若两条直线交于一点，则在两直线交点处形成的四个角中，不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的角称为这两条直线的夹角。

性质 1 [3]: 在轴对称图形中，对应点所连的线段被对称轴垂直平分，对应线段相等，对应角相等。

引理 1: 平面轴对称凸域的对称轴必穿过凸域。

引理 2: 平面轴对称凸域的边界点的对称点必为其边界点。

3. 主要结论及其证明

定理 1: 若平面轴对称凸域具有至少两条对称轴，则任意两条对称轴必相交。

证明: 反证法: 如图 1 所示，假设平面凸域 K 存在两条平行对称轴 l_1, l_2 ，且它们之间的距离为 $d(d > 0)$ 。不失一般性，不妨将两条对称轴的位置关系以左右来进行讨论。

① 当对称轴 l_1 在对称轴 l_2 的右侧时，存在一点 $A \in \partial K$ ，使得点 A 到直线 l_1 的距离最大。

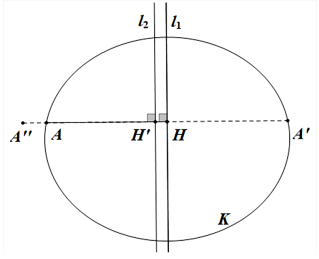


Figure 1. Position relationship of symmetry axis
图 1. 对称轴的位置关系

作点 A 关于对称轴 l_1 的对称点 A' ，再作点 A' 关于对称轴 l_2 的对称点 A'' ，连接 $A'A''$ ，交直线 l_1 于 H ，交直线 l_2 于 H' 。由对称可得，点 A 在线段 $A'A''$ 上，且有

$$|A''H| = |A'H'| + d = |A'H'| + d = |A'H| + 2d = |AH| + 2d > |AH|。$$

另一方面由引理 2 可得， $A'' \in \partial K$ ，即凸域 K 的边界上存在一点 A'' ，点 A'' 到直线 l_1 的距离大于点 A 到直线 l_1 的距离，这与点 A 到直线 l_1 的距离最大矛盾，所以假设不成立，即对称轴 l_1 与对称轴 l_2 不平行，故它们相交。

② 当对称轴 l_1 在对称轴 l_2 的左侧时，同理也能证明对称轴 l_1 与对称轴 l_2 相交。

综上可得，若一个平面凸域具有至少两条对称轴，则任意两条对称轴必相交。

定理 2: 若平面轴对称凸域具有至少两条对称轴，则任意两条对称轴的交点必为凸域内点。

证明: 反证法：如图 2 所示，假设平面凸域 K 的两条不重合的对称轴的交点 A 不是凸域 K 的内点，即点 $A \in \partial K$ 或 $A \notin K$ 。

由引理 1 可知，直线 l_1 与直线 l_2 必将凸域 K 划分为三个部分。设这三个部分的面积分别为 S_1 ， S_2 ， S_3 。

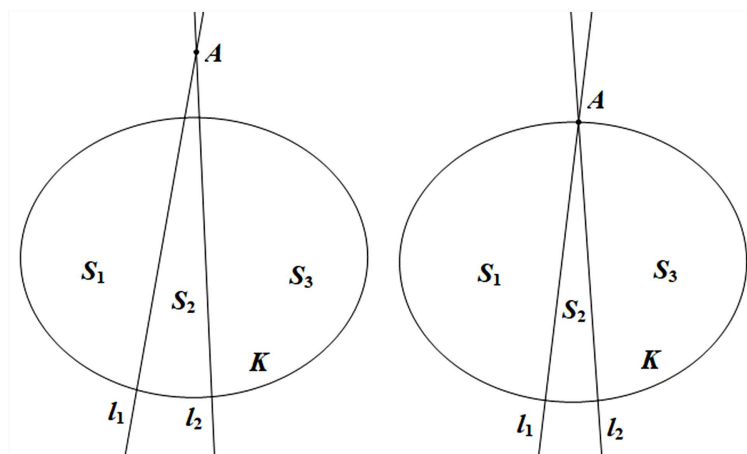


Figure 2. Intersection position of symmetry axis
图 2. 对称轴的交点位置

由定义 2 可知，轴对称图形的对称轴将该图形分成面积相等的两个部分。则有方程组

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = S_3, \\ S_2 + S_3 = S_1. \end{cases}$$

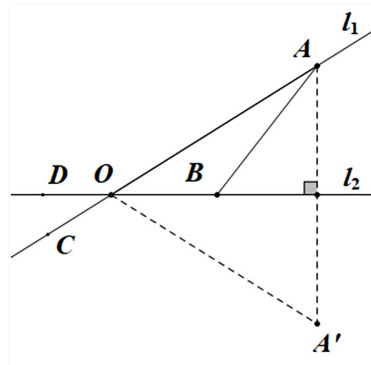
将两个等式左边加左边，右边加右边可得， $S_1 + S_3 + 2S_2 = S_1 + S_3$ 。

化简得 $S_2 = 0$ 。

这一结果说明直线 l_1 与直线 l_2 重合，这与 l_1 与 l_2 不重合相矛盾。因此，若一个平面凸域具有至少两条对称轴，则任意两条对称轴的交点必为凸集内点。

定理 3: 设 l_1 ， l_2 是平面轴对称凸域 K 的两条对称轴，它们的交点为 O ，夹角为 α ，且与 ∂K 的交点分别为点 A ， C 与点 B ， D 。若 $\angle AOB = \alpha$ ，则 $\triangle AOB$ 必为直角三角形或锐角三角形。

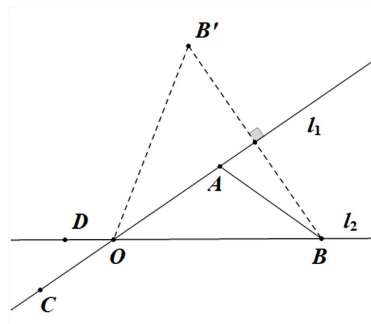
证明: 如图 3 所示，设 K 是一平面凸域，且具有至少两条对称轴，任取其中两条对称轴分别记为 l_1 ， l_2 ，且它们的交点为 O ，夹角为 α ，对称轴 l_1 交 ∂K 于 A ， C 两点，对称轴 l_2 交 ∂K 于 B ， D 两点，不妨取 $\angle AOB = \alpha$ 。

Figure 3. $\angle ABO$ is an obtuse angle图 3. $\angle ABO$ 为钝角

(1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 显然 $\triangle AOB$ 为直角三角形。

(2) 当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 由定义 3 可知, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。反证法: 假设 $\triangle AOB$ 为钝角三角形, 不妨先假设 $\angle OBA$ 为钝角, 如图 3 所示。

作点 A 关于对称轴 l_2 的对称点 A' , 则由引理 2 可知, $A' \in \partial K$, 连接 OA' , AA' 。显然点 B 位于 $\triangle OAA'$ 的内部, 即点 B 为凸域 K 的内点, 这与 $B \in \partial K$ 矛盾, 因此 $\angle OBA$ 不为钝角。则此时只能 $\angle OAB$ 为钝角。

Figure 4. $\angle BAO$ is an obtuse angle图 4. $\angle BAO$ 为钝角

下证 $\angle OAB$ 也不为钝角:

如图 4 所示, 类似地作点 B 关于对称轴 l_1 的对称点 B' , 则由引理 2 可知, $B' \in \partial K$ 。连接 OB' , BB' 。显然点 A 位于 $\triangle OBB'$ 的内部, 即点 A 为凸域 K 的内点, 这与 $A \in \partial K$ 矛盾, 说明 $\angle OAB$ 不为钝角。

又因为 $\angle AOB = \alpha < \frac{\pi}{2}$ 是锐角, 故 $\triangle AOB$ 的三个内角均不为钝角, 这与假设 $\triangle AOB$ 为钝角三角形矛盾。因此 $\triangle AOB$ 不为钝角三角形, 即 $\triangle AOB$ 为直角三角形或锐角三角形。

定理得证。

上述结果即为至少具有两条对称轴的平面凸域的对称轴的一些基本性质。不难看出, 以上三个结论都只说明了任意两条对称轴之间所具有的一些联系, 且它们与对称轴的交点密切相关。由于文献[1]从几何角度证明了对称轴的夹角关系和多条对称轴共点的结论。考虑可否从代数角度证明相关的结论, 以便于将所获得的结果向高维推广? 以及运用这些对称轴的关系能解决什么样的实际问题? 这些问题还有待继续研究。

参考文献

- [1] 林东伟, 叶对萍. 教材研读拾穗: 轴对称图形的对称轴分布规律[J]. 中学数学杂志, 2012(6): 43-45.
- [2] 任德麟. 积分几何学引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
- [3] 史炳星. 数学(七年级 下册) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2013.