Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(3), 357-363**
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143123

一类复对称线性系统的不平衡CRI迭代方法

罗漪清

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年2月23日；录用日期：2025年3月17日；发布日期：2025年3月24日

摘 要

基于实部与虚部组合(CRI)迭代方法，提出了一种不平衡CRI (LCRI)迭代方法，用于求解复对称半正定线性系统。理论上利用谱理论分析了LCRI方法的收敛性，并给出了拟最优参数的表达式，数值上进一步验证了新方法的高效性。

关键词

复对称矩阵，CRI迭代方法，不平衡分裂迭代，收敛性分析，拟最优参数

Lopsided CRI Iteration Method for a Class of Complex Symmetric Linear Systems

Yiqing Luo

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Feb. 23rd, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Mar. 24th, 2025

Abstract

Based on the combination of real and imaginary parts (CRI) iteration method, a lopsided CRI (LCRI) iteration method is proposed for solving complex symmetric positive semi-definite linear systems. By using the spectral theory, we not only analyze the convergence property of the LCRI method, but also obtain the quasi-optimal parameter expression. The efficiency of the new method is further verified numerically.

Keywords

Complex Symmetric Matrix, CRI Iteration Method, Lopsided Splitting Iteration, Convergence Analysis, Quasi-Optimal Parameter

文章引用: 罗漪清. 一类复对称线性系统的不平衡 CRI 迭代方法[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 357-363.
DOI: 10.12677/aam.2025.143123

1. 引言

考虑复对称线性系统

$$Ax = b,\quad A \in \mathbb{C}^{n\times n},\quad x, b \in \mathbb{C}^{n}, \tag{1}$$

其中 A 是一个大型稀疏复对称矩阵，形式为 $A = W + iT$，$i = \sqrt{-1}$ 表示虚数单位，矩阵 $W, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 均为实对称矩阵。系统(1)常出现在科学计算和工程应用中，例如时间依赖的偏微分方程基于快速傅里叶变换(FFT)的数值解问题[1]、光的散射成像问题[2]、结构动力学问题[3]和量子力学问题[4]等。近年来，学者们针对线性系统(1)提出了许多矩阵分裂迭代法。

当矩阵 W, T 是对称半正定的，且其中至少有一个是对称正定的时，系统(1)通常被称为复对称正定线性系统。Bai 等人[5]基于系数矩阵 A 的 Hermitian 和反 Hermitian 分裂(HSS)，即 $A = H + S$，其中

$$H = \frac{1}{2}\left(A + A^{*}\right) = W,\quad T = \frac{1}{2}\left(A - A^{*}\right) = iT,$$

分别为矩阵 A 的 Hermitian 部分和反 Hermitian 部分，率先提出了 HSS 迭代方法；由于 HSS 方法在每一步迭代中都需要求解一个平移的反 Hermitian 方程组，Bai 等人[6]为克服此问题，提出了修正的 HSS (MHSS)迭代方法；为了加快 MHSS 方法的收敛速率，Bai 等人[7]将预处理技术应用于 MHSS 方法，建立了预处理的 MHSS (PMHSS)迭代方法；随后，Li 等人[8]提出了一种不平衡 PMHSS (LPMHSS)迭代方法，并在理论和数值上表明了当系数矩阵的实部占主导时，LPMHSS 方法的表现优于 MHSS 和 PMHSS 方法。

此外，Wang 等人[9]在不限制矩阵 W, T 至少有一个是对称正定的情况下，即 W, T 均为对称半正定矩阵，且满足 $\mathcal{N}(W) \cap \mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$，提出了一种实部与虚部组合(CRI)迭代方法，其格式如下：

方法 1 (CRI 迭代方法) 给定初始估计向量 $x^{(0)} \in \mathbb{C}^{n}$，直到迭代序列 $\left\{x^{(k)}\right\}(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 收敛，按照如下方式计算新的迭代解 $x^{(k+1)}$

$$\begin{cases} (\alpha T + W)x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = (\alpha - i)Tx^{(k)} + b, \\ (\alpha W + T)x^{(k+1)} = (\alpha + i)Wx^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} - ib, \end{cases}$$

其中，α 为给定的正常数。

上述方法可以看作是 PMHSS 迭代方法的变体，作者证明了 CRI 方法的理论性质与数值性能均优于 PMHSS 方法。

为了进一步提高 CRI 迭代方法的数值性能，本文借鉴文献[8]的不平衡分裂迭代思想，构建了一种用于求解复对称半正定线性系统的不平衡 CRI (LCRI)迭代方法。本文结构安排如下：第 2 节构建 LCRI 方法的迭代格式；第 3 节利用谱理论分析 LCRI 方法的收敛性和拟最优参数；第 4 节通过数值实验检验 LCRI 方法的性能；第 5 节主要总结本文的研究工作。

2. LCRI 迭代方法

本节首先给出 LCRI 迭代方法的迭代格式。线性系统(1)可以写作以下两种等价形式

$$Wx = -iTx + b,$$

$$(\alpha W + T)x = (\alpha + i)Wx - ib,$$

通过交替迭代上述两个不动点方程，可以得到 LCRI 迭代方法。值得一提的是，为了避免 $W\mathrm{x}$ 带来额外的工作量，该方法的迭代格式可描述为：

方法 2 (LCRI 迭代方法) 给定初始估计向量 $\mathrm{x}^{(0)}\in\mathbb{C}^n$，直到迭代序列 $\left\{\mathrm{x}^{(k)}\right\}(k=0,1,2,\cdots)$ 收敛，按照如下方式计算新的迭代解 $\mathrm{x}^{(k+1)}$

$$\begin{cases}\mathrm{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=-iT\mathrm{x}^{(k)}+\mathrm{b},\\(\alpha W+T)\mathrm{x}^{(k+1)}=(\alpha+i)\mathrm{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-i\mathrm{b},\end{cases}\tag{2}$$

其中，α 为给定的正常数。

在 LCRI 迭代方法的每一步中，我们只需要求解一个线性子系统，由文献[9]可知其系数矩阵 $\alpha W+T$ 是实对称正定的，因此可以通过 Cholesky 分解精确计算，也可以通过共轭梯度法或多重网格法不精确计算。而 CRI 迭代方法的每一步需要求解系数矩阵分别为 $\alpha T+W$ 和 $\alpha W+T$ 的两个线性子系统，由此可以断言 LCRI 迭代方法会比 CRI 方法在求解线性系统(1)时更加高效。

经过简单的推导，我们可以将 LCRI 方法的迭代格式(2)重新表述为标准形式

$$\mathrm{x}^{(k+1)}=L(\alpha)\mathrm{x}^{(k)}+G(\alpha)\mathrm{b},\tag{3}$$

其中

$$L(\alpha)=(1-\alpha i)(\alpha W+T)^{-1}T,\quad G(\alpha)=\alpha(\alpha W+T)^{-1}.$$

显然，$L(\alpha)$ 是 LCRI 方法的迭代格式(2)或(3)的迭代矩阵。因此，LCRI 迭代方法收敛当且仅当迭代矩阵的谱半径小于 1，即 $\rho(L(\alpha))<1$。此外，若引入矩阵

$$B(\alpha)=\frac{1}{\alpha}(\alpha W+T),\quad C(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}-i\right)T,$$

则 LCRI 迭代方法可以看作是由矩阵分裂

$$A=B(\alpha)-C(\alpha)$$

导出的，且迭代矩阵可以表示为 $L(\alpha)=B(\alpha)^{-1}C(\alpha)$。

3. LCRI 迭代方法的收敛性分析

本节从理论上对 LCRI 迭代方法的收敛性进行分析，我们首先给出一个有用的引理。

引理 1 (见[9]) 设 $W,T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 均为对称半正定矩阵，且满足 $\mathcal{N}(W)\cap\mathcal{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$，则存在一个非奇异矩阵 P 使得

$$W=P^{\mathrm{T}}\Lambda P,\ T=P^{\mathrm{T}}\Gamma P,$$

其中，$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 和 $\Gamma=diag(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 满足

$$\lambda_i+\gamma_i=1,\quad \lambda_i\ge 0,\ \gamma_i\ge 0(i=1,2,\cdots,n).$$

基于上述引理的结论，下面我们分析 LCRI 迭代方法的收敛条件。

定理 1 设 $A=W+iT$ 是一个复对称非奇异矩阵，其中 $W,T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 均为对称半正定矩阵。假设 $\gamma_{\max}$ 是矩阵 T 的最大特征值，若参数 α 满足

$$(1-2\gamma_{\max})\alpha+2\gamma_{\max}(1-\gamma_{\max})>0,$$

则用于求解系统(1)的 LCRI 迭代方法对于任意的初始估计向量 $\mathrm{x}^{(0)}\in\mathbb{C}^n$ 都是收敛的。

证明：由于矩阵 W 和 T 都是对称半正定的，且满足 $\mathcal{N}(W)\cap\mathcal{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$，因此根据引理 1，存在一个非奇异矩阵 P，使得

$$L(\alpha)=(1-\alpha i)(\alpha W+T)^{-1}T=(1-\alpha i)P^{-1}(\alpha\Lambda+\Gamma)^{-1}\Gamma P,$$

显然，迭代矩阵 $L(\alpha)$ 相似于

$$\tilde{L}(\alpha)=(1-\alpha i)(\alpha\Lambda+\Gamma)^{-1}\Gamma,$$

则有

$$\rho(L(\alpha))=\rho(\tilde{L}(\alpha))=\rho\left((1-\alpha i)(\alpha\Lambda+\Gamma)^{-1}\Gamma\right)=\max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\gamma_j}{\alpha\lambda_j+\gamma_j}\right\}=\max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\gamma_j}{\alpha+(1-\alpha)\gamma_j}\right\}.$$

为了方便起见，记

$$f(\gamma_j)=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\gamma_j}{\alpha+(1-\alpha)\gamma_j},$$

对函数 $f(\gamma_j)$ 关于 γ_j 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma_j)}{\mathrm{d}\gamma_j}=\frac{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{(\alpha+(1-\alpha)\gamma_j)^2}>0,$$

则函数 $f(\gamma_j)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，从而

$$\max_{1\le j\le n}f(\gamma_j)=f(\gamma_{\max})=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\gamma_{\max}}{\alpha+(1-\alpha)\gamma_{\max}},$$

因此，我们有

$$\rho(L(\alpha))=f(\gamma_{\max})<1\quad\Leftrightarrow\quad(1-2\gamma_{\max})\alpha+2\gamma_{\max}(1-\gamma_{\max})>0,$$

定理证毕。

由定理 1 可知，LCRI 迭代方法的收敛速度可能取决于两个因素，一个是对称半正定矩阵 T 的谱，另一个是迭代参数 α 的选取。在实际应用中，为了避免 LCRI 方法选取实验最优参数所造成的额外工作量，我们希望找到最优参数 α 的良好估计，以极小化迭代矩阵的谱半径，从而提高 LCRI 方法的收敛速率。因此，我们在下述推论中给出迭代参数 α 的估计式。

推论 1 假设定理 1 的条件成立，设 $\gamma_{\max}$ 是矩阵 T 的最大特征值，则 LCRI 迭代方法的拟迭代参数为

$$\alpha^*=\arg\min_{\alpha}\{\rho(L(\alpha))\}=\arg\min_{\alpha}\left\{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\gamma_{\max}}{\alpha+(1-\alpha)\gamma_{\max}}\right\}=\frac{1}{\gamma_{\max}}-1,$$

此时对应的迭代矩阵的谱半径为

$$\rho(L(\alpha^*))=\frac{\gamma_{\max}}{\sqrt{2\gamma_{\max}^2-2\gamma_{\max}+1}}.$$

4. 数值实验

本节通过数值实验来检验 LCRI 迭代方法的数值性能，我们将从迭代步数(IT)和迭代时间(CPU)这两个方面比较 PMHSS、LPMHSS、CRI 和 LCRI 迭代方法。在实验中，我们对所有测试方法所含的子系统

均使用 Cholesky 分解进行求解，并在分解之前使用对称近似极小度方法(SYMAMD)进行重排，具体细节可参考文献[10]。

在算法的实现过程中，我们选取初始向量 $x^{(0)}$ 为零向量，停止标准均为当前迭代解 $x^{(k)}$ 的相对残差满足条件

$$\frac{\left\| b - Ax^{(k)} \right\|_2}{\left\| b \right\|_2} \le 10^{-6},$$

或者迭代步数达到 $k_{\max} = 1000$。对于所有测试方法中涉及的迭代参数，我们选取实验最优值 $\alpha_{\exp}$，即使得迭代步数最小的值。若最优参数值形成一个区间，则在此区间内选取使得迭代时间最小的值作为最优参数。PMHSS 和 LPMHSS 方法中使用的预处理矩阵 V 选取为 W。所有数值结果均通过 MATLAB [版本号 9.12.0.1884302 (R2022a)]计算得到，计算机配置：中央处理器 1.70 GHz [Intel(R) Core(TM) i5 1240P]，内存 15.7 G，操作系统 Windows 11。

算例 1 (参考[8] [9]) 考虑如下形式的复对称线性系统

$$\left[\left(-\omega^2 M + K\right) + i\left(\omega C_V + C_H\right)\right] x = b,$$

其中 ω 为圆周频率，M 是惯性矩阵，K 是刚度矩阵，C_V 为粘性阻尼矩阵，C_H 为滞后阻尼矩阵。这里取 $M = I$，$C_V = 10M$，$C_H = \mu K$，其中 μ 是阻尼系数。此外，假设 K 为二维区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ 上一致网格剖分下对具有齐次 Dirichlet 边值条件的负拉普拉斯算子的五点中心差分格式近似矩阵，每个方向上网格步长都取 $h = 1/(m+1)$。因此矩阵 $K = I_m \otimes V_m + V_m \otimes I_m$，其中 $V_m = h^{-2}\mathrm{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{m \times m}$。实验中，取圆周频率 $\omega = 0.5$，右端向量 $b = (1+i) A\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 是分量全为 1 的向量。此外，通过对系统方程两边同时乘以 h^2 使问题标准化。

迭代方法的收敛速度在很大程度上取决于迭代矩阵的谱半径，图 1 描绘了网格数 $m = 64$ 的情况下，CRI 和 LCRI 迭代方法在不同阻尼系数($\mu = 0.1, 0.01, 0.001$)下迭代矩阵谱半径的比较。从图 1 可以看出，当 μ 较小时(即系数矩阵实部占主导)，LCRI 方法的迭代矩阵谱半径比 CRI 方法的迭代矩阵谱半径小很多，但当 μ 较大时(即系数矩阵虚部占主导)，CRI 方法的表现更好。

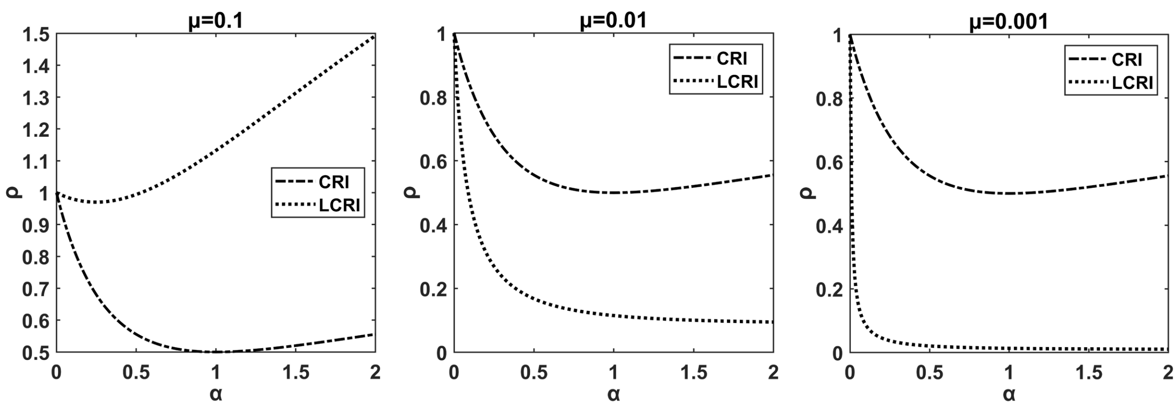

Figure 1. The spectral radius of the iteration matrix ρ versus the parameter α
图 1. 迭代矩阵的谱半径 ρ 与参数 α 的关系图

下面我们取阻尼系数 $\mu = 0.001$ 进行实验。在表 1 中，我们列出了 PMHSS、LPMHSS、CRI 和 LCRI 方法的实验最优参数范围以及 LCRI 方法的拟最优参数 α^* 的值。实验中发现 LPMHSS 和 LCRI 方法对于

参数 α 的取值不太敏感，这里我们人为地将参数 α 的上界设为 1000，而 PMHSS 和 CRI 方法的实验最优参数取值范围则相对较小，且随着网格数 m 的增大而逐渐变窄，这说明 LPMHSS 和 LCRI 方法在参数选取上更加灵活。此外，LCRI 方法的拟最优参数 α^* 的值均在其实验最优参数取值范围内，这表明由推论 1 所得到的拟最优参数 α^* 是 LCRI 方法迭代参数的一个不错的选择。

Table 1. The ranges of experimental optimal parameter or the values of quasi-optimal parameter of the tested methods
表 1. 测试方法的实验最优参数取值范围或拟最优参数值

方法	参数	$m=64$	$m=128$	$m=256$	$m=512$
PMHSS	$\alpha_{\exp}$	[0.75,1.32]	[0.76,1.31]	[0.76,1.30]	[0.76,1.30]
LPMHSS	$\alpha_{\exp}$	[0.96,1000]	[1.10,1000]	[1.42,1000]	[0.62,1000]
CRI	$\alpha_{\exp}$	[0.63,1.61]	[0.63,1.58]	[0.64,1.56]	[0.66,1.53]
LCRI	$\alpha_{\exp}$	[0.96,1000]	[1.10,1000]	[1.42,1000]	[0.62,1000]
LCRI	α^*	107.95	119.49	122.83	123.71

所有测试方法对应于不同网格大小的数值结果如表 2 所示，包括实验最优参数、迭代步数和迭代时间。可以观察到，PMHSS 方法的迭代步数不受网格数 m 的影响，LPMHSS、CRI 和 LCRI 方法的迭代步数均随网格数 m 的增大而逐渐减小。无论是从迭代步数还是迭代时间来看，LPMHSS、CRI 和 LCRI 方法均对 PMHSS 方法有着显著的改进效果。LCRI 方法和 LPMHSS 方法的迭代步数相同，但前者的迭代时间小于后者。事实上，LCRI 方法可以看作将 LPMHSS 方法的预处理矩阵 V 取为 W，且相较于 LPMHSS 方法少求解一个系数矩阵为 W 的线性子系统，从而降低了计算成本。此外，当网格数 $m=64,128,256$ 时，LCRI 方法的迭代步数和迭代时间均优于 CRI 方法。当网格数 $m=512$ 时，这两种方法的迭代步数相同，但 LCRI 方法在迭代时间上的优势更为明显，这表明 LCRI 方法能够更高效地处理大规模问题。

Table 2. The numerical results of the tested methods with experimental optimal parameter values
表 2. 测试方法利用实验最优参数所得的数值结果

方法		$m=64$	$m=128$	$m=256$	$m=512$
PMHSS	$\alpha_{\exp}$	0.99	1.15	1.01	0.76
	IT	34	34	34	34
	CPU	0.0847	0.1961	0.6949	3.0806
LPMHSS	$\alpha_{\exp}$	940	630	420	130
	IT	6	5	4	4
	CPU	0.0219	0.0457	0.0919	0.3787
CRI	$\alpha_{\exp}$	1.17	0.80	1.02	0.66
	IT	7	6	5	4
	CPU	0.0321	0.0533	0.1443	0.4407
LCRI	$\alpha_{\exp}$	130	690	70	60
	IT	6	5	4	4
	CPU	0.0179	0.0332	0.0668	0.2008

因此，当系数矩阵的实部 W 相对于虚部 T 占主导且问题规模较大时，我们倾向于使用 LCRI 迭代方法来求解复对称线性系统(1)。

5. 总结

本文基于 CRI 迭代方法，利用不平衡分裂迭代思想，构建了一种不平衡 CRI (LCRI)迭代方法来求解复对称半正定线性系统。理论分析表明，当迭代参数 α 满足一定条件时，LCRI 方法可以收敛到线性系统(1)的唯一精确解。并通过极小化迭代矩阵的谱半径，给出了拟最优参数 α^* 的表达式。数值结果表明，当线性系统(1)的系数矩阵实部占主导且问题规模较大时，LCRI 方法具有高效性与稳健性。

参考文献

[1] Bertaccini, D. (2004) Efficient Preconditioning for Sequences of Parametric Complex Symmetric Linear Systems. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **18**, 49-64.

[2] Arridge, S.R. (1999) Optical Tomography in Medical Imaging. *Inverse Problems*, **15**, R41-R93. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/2/022

[3] Feriani, A., Perotti, F. and Simoncini, V. (2000) Iterative System Solvers for the Frequency Analysis of Linear Mechanical Systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 1719-1739. https://doi.org/10.1016/s0045-7825(00)00187-0

[4] Van Dijk, W. and Toyama, F.M. (2007) Accurate Numerical Solutions of the Time-Dependent Schrödinger Equation. *Physical Review E*, **75**, Article ID: 036707. https://doi.org/10.1103/physreve.75.036707

[5] Bai, Z., Golub, G.H. and Ng, M.K. (2003) Hermitian and Skew-Hermitian Splitting Methods for Non-Hermitian Positive Definite Linear Systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **24**, 603-626. https://doi.org/10.1137/s0895479801395458

[6] Bai, Z., Benzi, M. and Chen, F. (2010) Modified HSS Iteration Methods for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Computing*, **87**, 93-111. https://doi.org/10.1007/s00607-010-0077-0

[7] Bai, Z., Benzi, M. and Chen, F. (2011) On Preconditioned MHSS Iteration Methods for Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Algorithms*, **56**, 297-317. https://doi.org/10.1007/s11075-010-9441-6

[8] Li, X., Yang, A. and Wu, Y. (2013) Lopsided PMHSS Iteration Method for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Numerical Algorithms*, **66**, 555-568. https://doi.org/10.1007/s11075-013-9748-1

[9] Wang, T., Zheng, Q. and Lu, L. (2017) A New Iteration Method for a Class of Complex Symmetric Linear Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **325**, 188-197. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.05.002

[10] Saad, Y. (2003) Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd Edition, SIAM.