Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 373-381
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143125

带不等式约束的DC型切向凸优化问题的混合型对偶

雷　振

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首

收稿日期：2025年2月23日；录用日期：2025年3月17日；发布日期：2025年3月25日

摘　要

本文研究了带不等式约束的DC型切向凸优化问题的混合型对偶。首先利用约束规范条件建立了混合型对偶模型。其次，利用伪凸函数的性质建立了带不等式约束的DC型切向凸优化问题的弱对偶定理、强对偶定理和逆对偶定理。并且推广了前人已有的结论。

关键词

DC型切向凸优化问题，混合型对偶，对偶理论

Mixed-Type Duality for DC-Type Tangentially Convex Optimization Problems with Inequality Constraints

Zhen Lei

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Feb. 23rd, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Mar. 25th, 2025

Abstract

In this paper, we study mixed-type duality for DC-type tangentially convex optimization problems with inequality constraints. Firstly, we introduce constraint qualification conditions to establish a mixed-type dual model. Subsequently, leveraging properties of pseudoconvex functions, we derive weak duality, strong duality, and converse duality theorems for the proposed optimization problem. Furthermore, our results generalize and extend existing conclusions from prior studies.

文章引用: 雷振. 带不等式约束的 DC 型切向凸优化问题的混合型对偶[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 373-381.
DOI: 10.12677/aam.2025.143125

Keywords

DC-Type Tangentially Convex Optimization Problem, Mixed-Type Duality, Duality Theory

1. 引言

约束优化问题是现代最优化理论的核心问题之一，许多实际问题在一定条件下都可以转化成一个约束优化问题。可广泛应用于工农业生产、经济管理、金融投资、交通运输、通信控制等实际问题。因此，约束优化问题的研究引起了学者们的广泛重视，许多学者对经典的约束优化问题进行了深入的研究，并得到了一系列有意义的结论[1]-[5]。

对偶理论是约束优化问题的主要研究内容之一，它不仅具有十分重要的理论价值，而且在金融算法设计和最优控制等领域有着广泛的应用。常见的对偶模型除经典的 Lagrange 型对偶外，还有 Wolfe 对偶、Mond-Weir 对偶和混合型对偶问题。注意到，Wolfe 对偶问题和 Mond-Weir 对偶问题均为混合型对偶问题的特例[6]-[8]。例如，文[6]针对一类非线性规划问题引入了不完全拉格朗日函数，解释了 Mond-Weir 型对偶构造背后的原因。针对一类分式和广义分式规划问题，提出了一种混合型对偶，并建立了各种对偶定理。文[7]在非线性优化中，利用扰动方法，统一了 Wolfe 对偶与 Mond-Weir 对偶的框架。文[8]利用 Fritz-John 必要最优性条件建立了关于一类多目标规划问题的混合型逆对偶，并推广了前人逆对偶定理的结论。

进一步，当约束优化问题的目标函数为 DC 函数(即两个凸函数的差)，文[9]在几个约束规范条件之间建立了关系，并且利用这些约束规范条件刻画了 DC 无限优化问题的强 Lagrange 对偶和全 Lagrange 对偶。文[10]利用共轭函数的卷积给出了新的约束规范条件，刻画了稳定零对偶性，并弱化了传统下半连续性和凸性假设。文[11]为保证原问题和对偶问题之间的强对偶性成立，利用上图引入新的闭性约束规范条件，并在局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中研究了锥约束复合 DC 优化问题的对偶理论。

近来，切向凸函数及其对应的切向凸优化问题引起了学者们的广泛关注。他们利用切向次微分建立了切向凸优化问题的最优性条件和对偶理论[12]-[16]。例如，文[12]首先提出切向次微分的概念，并利用它建立了非线性规划的最优性条件。文[13]则通过切向次微分获得了非凸不确定优化问题的必要和充分最优性条件。文[14]利用切向次微分给出了非凸半无限规划问题的最优性条件，并且刻画了最优解集。

受上述文献启发，本文将研究如下带不等式约束的 DC 型切向凸优化问题的混合对偶：

$$(P)\qquad \begin{aligned} &\inf\ \{f(x)-g(x)\}\\ &\text{s.t. } g_t(x)\le 0, t\in T,\\ &\quad x\in M, \end{aligned}$$

其中 $f, g_t : R^n \to \bar{R} := R\cup\{+\infty\}$ 为切向凸函数， $g: R^n\to\bar{R}$ 为下半连续真凸函数，M 为近凸集。

2. 记号与定义

设 R^n 是 n 维欧氏空间，$\langle x,y\rangle$ 表示向量 $x,y\in R^n$ 的内积。设 T 为任意(可能无限)指标集，记 $R^{|T|} := \{\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}$: 只有有限个 $\lambda_t\neq 0\}$，定义 $R^{|T|}$ 的非负锥为

$$R_{+}^{|T|} := \left\{ \lambda = \left(\lambda_t \right)_{t \in T} \in R^{|T|} : \lambda_t \geq 0, t \in T \right\}.$$

设 M 为 R^n 中的非空子集， $\mathrm{cl}\, M$ 和 $\mathrm{cone}\, M$ 分别表示 M 的闭包和锥包。定义集合 M 在 $x \in M$ 处的法锥为

$$N_M\left(x\right) := \left\{ \xi \in R^n : \left\langle \xi, y - x \right\rangle \leq 0, \forall y \in M \right\}.$$

令 δ_M 表示 M 的示性函数，定义为

$$\delta_M\left(x\right) := \begin{cases} 0, & x \in M, \\ +\infty, & x \in \text{其他}. \end{cases}$$

设 $f : R^n \to \bar{R}$ 是真函数，f 的有效域、次微分和共轭函数分别定义为

$$\mathrm{dom}\, f := \left\{ x \in R^n : f\left(x\right) < +\infty \right\},$$

$$\partial f\left(x\right) := \left\{ v \in R^n : \left\langle v, y - x \right\rangle \leq f\left(y\right) - f\left(x\right), \forall y \in R^n \right\}, \forall x \in R^n,$$

$$f^*\left(x^*\right) := \sup \left\{ \left\langle x^*, x \right\rangle - f\left(x\right) : \forall x \in R^n \right\}, \forall x^* \in R^n.$$

记 $\mathrm{cl}\, f$ 表示 f 的闭包，由文献[17]可知 $f^* = \left(\mathrm{cl}\, f\right)^*$。特别地，当 f 是 R^n 上的真凸函数时， f^* 和二次共轭函数 f^{**} 总是 R^n 上的闭真凸函数，且有 $f^{**} = \mathrm{cl}\, f$ 。显然，当 f 为闭真凸函数时，则有

$$f^{**} = \mathrm{cl}\, f = f. \tag{1}$$

设 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 。若对任意的 $d \in R^n$ ，极限

$$f'\left(\bar{x}, d\right) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f\left(\bar{x} + td\right) - f\left(\bar{x}\right)}{t}$$

存在，则称 $f'\left(\bar{x}, d\right)$ 为 f 在 $\bar{x}$ 处沿 d 方向的方向导数。特别地，当 $d = 0$ 时，定义 $f'\left(\bar{x}, 0\right) = 0$ 。

定义 2.1 [18] 设函数 $f : R^n \to \bar{R}$ 是实值函数， $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 。若对任意的 $d \in R^n$ ， $f'\left(\bar{x}, d\right)$ 存在并有限，且 $f'\left(\bar{x}, \cdot\right)$ 是关于 d 的实值凸函数，则称 f 在点 $\bar{x}$ 处是切向凸的。若 f 在任意 $x \in M$ 处均为切向凸的，则称 f 是集合 M 上的切向凸函数。

需注意的是， $f'\left(\bar{x}, \cdot\right)$ 是具有正齐次性的函数。若 f 在点 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 处是切向凸函数，则 $f'\left(\bar{x}, \cdot\right)$ 在 R^n 上是次可加函数。

定义 2.2 [12] 设函数 $f : R^n \to \bar{R}$ 在点 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 处的切向次微分 $\partial_T f\left(\bar{x}\right)$ 定义为

$$\partial_T f\left(\bar{x}\right) := \left\{ v \in R^n : \left\langle v, d \right\rangle \leq f'\left(\bar{x}, d\right), \forall d \in R^n \right\}.$$

若 f 是凸函数，则 f 在点 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 处是切向凸的，且 $\partial_T f\left(\bar{x}\right) = \partial f\left(\bar{x}\right)$ 。当 f 在点 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 处为切向凸函数时，由文献[19]可知， $\partial_T f\left(\bar{x}\right)$ 是 R^n 中的一个非空凸紧子集，且 $f'\left(\bar{x}, d\right)$ 是 $\partial_T f\left(\bar{x}\right)$ 的支撑函数，即对于任意的 $d \in R^n$ 有

$$f'\left(\bar{x}, d\right) = \max_{v \in \partial_T f\left(x\right)} \left\langle v, d \right\rangle.$$

引理 2.1 [15] 设函数 $f, g : R^n \to \bar{R}$ 为实值函数。若 f, g 在点 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$ 处是切向凸的，则有 $\partial_T\left(f + g\right)\left(\bar{x}\right) = \partial_T f\left(\bar{x}\right) + \partial_T g\left(\bar{x}\right)$ 。

引理 2.2 [14] 设函数 $f : R^n \to \bar{R}$ 在点 $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ 处是切向凸函数，则函数 $y \to f'\left(x, y - x\right)$ 是凸函数，且满足

$$\partial_T f\left(x\right) = \partial f'\left(x, \cdot - x\right)\left(x\right) = \partial f'\left(x, \cdot\right)\left(0\right). \tag{2}$$

定义 2.3 [15] 设函数 $f:R^n\to\bar{R}$ 在 R^n 上是实值函数，$\bar{x}\in\operatorname{dom}f$。

(i) 若对任意 $x\in R^n$，当 $f(x)<f(\bar{x})$ 时有

$$f'(\bar{x},x-\bar{x})<0, \tag{3}$$

则称 f 在点 $\bar{x}$ 处是伪凸的。若 f 在任意 $\bar{x}\in M\subseteq R^n$ 处是伪凸的，则称 f 在集合 M 上是伪凸函数。

(ii) 若对任意 $x\in R^n\setminus\{\bar{x}\}$，当 $f(x)\le f(\bar{x})$ 时有

$$f'(\bar{x},x-\bar{x})<0, \tag{4}$$

则称 f 在点 $\bar{x}$ 处是严格伪凸的。若 f 在任意 $\bar{x}\in M\subseteq R^n$ 处是严格伪凸的，则称 f 在集合 M 上是严格伪凸函数。

定义 2.4 [15] 设集合 M 是 R^n 中的非空子集。对于给定的 $x\in M$，若存在非负序列 $\{\lambda_i\}_{i\ge1}\subset(0,+\infty)$，使得对任意的 $y\in M$，当 $\lambda_i\downarrow0$ 时有 $x+\lambda_i(y-x)\in M,i\in N$，则称集合 $M\subseteq R^n$ 在 $x\in M$ 处是近凸的。特别地，若集合 M 在任意 $x\in M$ 处均为近凸的，则称集合 M 是近凸集。

显然，凸集 M 是近凸集。若集合 M 是闭集，则 M 是近凸集当且仅当集合 M 是凸集。

3. 混合型对偶理论

设 $M\subseteq R^n$ 是非空近凸集，函数 $f,g_t:R^n\to\bar{R}$ 在 R^n 上是切向凸函数，$g:R^n\to\bar{R}$ 是下半连续真凸函数。问题(P)的可行集和最优解集分别定义为

$$F(P):=\{x\in M:g_t(x)\le0,\forall t\in T\},$$

$$S(P):=\{x\in F(P):f(x)-g(x)\le f(y)-g(y),\forall y\in F(P)\}.$$

由于 g 是下半连续真凸函数，故由(1)式可知 $g^{**}=g$。从而，由共轭函数的定义可知

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=f(x)-\sup_{x^*\in\operatorname{dom}g^*}\left\{\langle x,x^*\rangle-g^*(x^*)\right\}\\&=\inf_{x^*\in\operatorname{dom}g^*}\left\{f(x)-\langle x,x^*\rangle+g^*(x^*)\right\}.\end{aligned}$$

因此问题(P)等价于

$$\inf_{x^*\in\operatorname{dom}g^*}\inf_{x\in F(P)}\left\{f(x)-\langle x,x^*\rangle+g^*(x^*)\right\}.$$

令 $x^*\in\operatorname{dom}g^*$。记问题($P$)的子问题为

$$(P_{x^*})\qquad \inf_{x\in F(P)}\left\{f(x)-\langle x,x^*\rangle+g^*(x^*)\right\}.$$

令 $v(P_{x^*})$ 和 $S(P_{x^*})$ 分别代表问题(P_{x^*})的最优值和最优解集。进一步，定义 $h_{x^*}:R^n\to\bar{R}$ 为

$$h_{x^*}(x):=f(x)-\langle x,x^*\rangle+g^*(x^*),\ \forall x\in R^n.$$

令 $x\in F(P)$，记 $\Lambda(x):=\left\{\lambda\in R_+^{|T|}:\lambda_tg_t(x)=0,\forall t\in T\right\}$。为了建立强对偶定理，引入如下约束规范条件：

$$(CQ)\qquad N_{F(P)}(x)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda(x)}\left(\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_Tg_t(x)\right)+N_M(x),\ x\in F(P).$$

命题 3.1 设 $F(P)$ 是近凸集，$\bar{x}\in S(P_{x^*})$。若(CQ)条件在 $\bar{x}$ 处成立，则存在 $\lambda\in R_+^{|T|}$，使得

$$x^* \in \partial_T f(\bar{x}) + \sum_{t\in T} \lambda_t \partial_T g_t(\bar{x}) + N_M(\bar{x}),\ \lambda_t g_t(\bar{x}) = 0,\ \forall t \in T.$$

证明：设 $\bar{x} \in S(P_{x^*})$，由于 $F(P)$ 为近凸集。因此对任意的 $x \in F(P)$，存在序列 $\{\lambda_i\}_{i\ge 1} \subset (0,+\infty)$，使得 $i \to +\infty$ 时有 $\lambda_i \downarrow 0$ 且 $\bar{x} + \lambda_i(x-\bar{x}) \in F(P)\ (i \in N)$。由于 $\bar{x} \in S(P_{x^*})$，因此 $h_{x^*}(\bar{x}) \le h_{x^*}(\bar{x} + \lambda_i(x-\bar{x})), i \in N$，即

$$f(\bar{x}) - \langle \bar{x}, x^* \rangle \le f(\bar{x} + \lambda_i(x-\bar{x})) - \langle \bar{x} + \lambda_i(x-\bar{x}), x^* \rangle,\ i \in N.$$

故对任意的 $x \in F(P)$ 有

$$\begin{aligned} h'_{x^*}(\bar{x}, x-\bar{x}) &= \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{h_{x^*}(\bar{x} + \lambda(x-\bar{x})) - h_{x^*}(\bar{x})}{\lambda} \\ &= \lim_{i\to+\infty} \frac{\left(f(\bar{x} + \lambda_i(x-\bar{x})) - \langle \bar{x} + \lambda_i(x-\bar{x}), x^* \rangle\right) - \left(f(\bar{x}) - \langle \bar{x}, x^* \rangle\right)}{\lambda_i} \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

即

$$f'(\bar{x}, x-\bar{x}) - \langle x-\bar{x}, x^* \rangle \ge 0 = f'(\bar{x}, \bar{x}-\bar{x}) - \langle \bar{x}-\bar{x}, x^* \rangle,\ \forall x \in F(P).$$

这说明 $\bar{x}$ 是下述凸优化问题的极小点：

$$\begin{aligned} \min \quad & h'_{x^*}(\bar{x}, x-\bar{x}), \\ & x \in F(P). \end{aligned}$$

由引理 2.2 可知

$$0 \in \partial h'_{x^*}(\bar{x}, \cdot - \bar{x})(\bar{x}) + N_{F(P)}(\bar{x}) = \partial_T h_{x^*}(\bar{x}) + N_{F(P)}(\bar{x}).$$

再结合引理 2.1 和(*CQ*)条件可得

$$x^* \in \partial_T f(\bar{x}) + \sum_{t\in T} \lambda_t \partial_T g_t(\bar{x}) + N_M(\bar{x}), \lambda_t g_t(\bar{x}) = 0, \forall t \in T.$$

对任意的 $x^* \in \operatorname{dom} g^*$，定义问题($P_{x^*}$)的 Lagrange 函数 $L_{x^*} : M \times R_+^{|T|} \to \bar{R}$ 为

$$L_{x^*}(x,\lambda) := f(x) - \langle x^*, x \rangle + g^*(x^*) + \sum_{t\in T} \lambda_t g_t(x),\ \forall (x,\lambda) \in M \times R_+^{|T|}.$$

证毕。

注 3.1 命题 3.1 在可行集为近凸集的前提下，给出了问题(P_{x^*})解存在的必要条件，弱化了文献[16]中要求其可行集为凸集的条件。

定义问题(P_{x^*})的混合型对偶问题为

$$(D) \qquad \begin{cases} \inf\limits_{x^* \in \operatorname{dom} g^*} \max\limits_{(x,\lambda,\mu)} & L_{x^*}(x,\lambda) \\ \qquad\qquad \text{s.t.} & x^* \in \partial_T f(x) + \sum\limits_{t\in T} (\lambda_t + \mu_t) \partial_T g_t(x) + N_M(x) \\ & \mu_t g_t(x) \ge 0, t \in T \\ & (x,\lambda,\mu) \in M \times R_+^{|T|} \times R_+^{|T|} \end{cases}$$

令 $v(D)$ 和 $S(D)$ 表示问题(*D*)的最优值和最优解集。对任意的 $x^* \in \operatorname{dom} g^*$ 定义问题(*D*)的子问题为

$$
\left(D_{x^*}\right)\qquad\begin{cases}\max\limits_{(x,\lambda,\mu)} & L_{x^*}(x,\lambda)\\ \text{s.t.} & x^*\in\partial_T f(x)+\sum\limits_{t\in T}(\lambda_t+\mu_t)\partial_T g_t(x)+N_M(x)\\ & \mu_t g_t(x)\ge 0, t\in T\\ & (x,\lambda,\mu)\in M\times R_+^{|T|}\times R_+^{|T|}\end{cases}
$$

令 $v\left(D_{x^*}\right)$、$F\left(D_{x^*}\right)$ 和 $S\left(D_{x^*}\right)$ 分别表示问题(D_{x^*})的最优值、可行集和最优解集。特别地，当 $g=0$ 时，有 $\operatorname{dom} g^*=0$。记 $L:=L_0$，故

$$
L(x,\lambda):=f(x)+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(x),\ \forall(x,\lambda)\in M\times R_+^{|T|}.
$$

定理 3.1 (弱对偶定理) 设 $x^*\in\operatorname{dom} g^*$, $x\in F(P)$ 和 $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})\in F\left(D_{x^*}\right)$。

(i) 若 $x^*\in\partial g(x)$， $L_{x^*}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ 在点 $\bar{x}$ 处是伪凸的，则 $L_{x^*}(\bar{x},\bar{\lambda})\le f(x)-g(x)$；

(ii) 若 $x^*\in\partial g(x)$， $L_{x^*}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ 在点 $\bar{x}$ 处是严格伪凸的，则 $L_{x^*}(\bar{x},\bar{\lambda})<f(x)-g(x)$。

证明：设 $x\in F(P)$，则

$$
g_t(x)\le 0,\forall t\in T. \tag{3}
$$

设 $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})\in F\left(D_{x^*}\right)$，则存在 $u\in\partial_T f(\bar{x}), v_t\in\partial_T g_t(\bar{x}), t\in T$ 和 $w\in N_M(\bar{x})$ 使得

$$
u+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)v_t+w=x^*, \tag{4}
$$

$$
\sum_{t\in T}\bar{\mu}_t g_t(\bar{x})\ge 0. \tag{5}
$$

从而，由(4)可得

$$
\left\langle u+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)v_t+w-x^*, x-\bar{x}\right\rangle=0. \tag{6}
$$

(i) 用反证法。假设 $L_{x^*}(\bar{x},\bar{\lambda})>f(x)-g(x)$，因此

$$
f(x)-g(x)<f(\bar{x})-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}).
$$

由于 $\bar{\lambda},\bar{\mu}\in R_+^{|T|}$，因此由(3)式和(5)式可知

$$
\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)g_t(x)\le 0,
$$

$$
\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x})\ge 0.
$$

进而

$$
f(x)-g(x)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)g_t(x)<f(\bar{x})-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)g_t(\bar{x}).
$$

同时，由于 $x^*\in\partial g(x)$，由 Young 等式有 $g(x)+g^*\left(g^*\right)=\left\langle x,x^*\right\rangle$，因此

$$
f(x)-\left\langle x,x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)g_t(x)<f(\bar{x})-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)g_t(\bar{x}).
$$

即

$$
L_{x^*}(x,\bar{\lambda}+\bar{\mu})<L_{x^*}(\bar{x},\bar{\lambda}+\bar{\mu}).
$$

由于 $L_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)$ 在点 $\bar{x}$ 处是伪凸函数，因此，由定义 2.3 可知 $L'_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)\left(\bar{x},x-\bar{x}\right)<0$。再由切向次微分定义可得

$$\left\langle u+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)v_t+w-x^*,x-\bar{x}\right\rangle<0.$$

这与(6)式矛盾，故原结论成立。

(ii) 用反证法。假设 $L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)\geq f\left(x\right)-g\left(x\right)$。先证 $x\neq\bar{x}$。由于 $\bar{\mu}\in R_+^{|T|}$，再结合(5)式可知，存在 $t\in T$ 使得 $g_t\left(\bar{x}\right)>0$。若 $x=\bar{x}$，此时由(3)式可知 $g_t\left(x\right)=g_t\left(\bar{x}\right)\leq 0$，矛盾。因此 $x\neq\bar{x}$。类似(i)的证法可知

$$L_{x^*}\left(x,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)\leq L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right).$$

因为，$L_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)$ 在 $\bar{x}$ 处是严格伪凸的，因此，结合 $x\neq\bar{x}$ 可得

$$L'_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)\left(\bar{x},x-\bar{x}\right)<0.$$

故由切向次微分定义和(6)式可得

$$0=\left\langle u+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)v_t+w-x^*,x-\bar{x}\right\rangle<0,$$

矛盾。故原结论正确。

定理 3.2 (强对偶定理) 设 $\bar{x}\in S\left(P\right)$，$\bar{\lambda},\bar{\mu}\in R_+^{|T|}$。对任意的 $x^*\in\partial g\left(\bar{x}\right)$，若条件($CQ$)在 $\bar{x}$ 处成立，则存在 $\bar{\lambda}+\bar{\mu}\in\Lambda\left(\bar{x}\right)$，使得 $\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in F\left(D_{x^*}\right)$ 以及 $L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)=f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)$。进一步，若 $L_{x^*}\left(x,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)$ 在 $\bar{x}$ 处是伪凸函数，则 $\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in S\left(D_{x^*}\right)$。

证明：设 $\bar{x}\in S\left(P\right)$，故

$$f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)\leq f\left(x\right)-g\left(x\right),\ \forall x\in F\left(P\right).$$

由于 $x^*\in\partial g\left(\bar{x}\right)$，由 Young 等式有 $g\left(\bar{x}\right)+g^*\left(x^*\right)=\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle$，因此

$$f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)=f\left(\bar{x}\right)-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)\leq f\left(x\right)-g\left(x\right).$$

结合 Young-Fenchel 不等式可知

$$f\left(\bar{x}\right)-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)\leq f\left(x\right)-g\left(x\right)\leq f\left(x\right)-\left\langle x,x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right).$$

即 $h_{x^*}\left(\bar{x}\right)\leq h_{x^*}\left(x\right)$，故 $\bar{x}\in S\left(P_{x^*}\right)$。再由命题 3.1 可知存在 $\bar{\lambda}+\bar{\mu}\in\Lambda\left(\bar{x}\right)$ 使得

$$x^*\in\partial_T f\left(\bar{x}\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)\partial_T g_t\left(\bar{x}\right)+N_M\left(\bar{x}\right).$$

由于 $\bar{\lambda},\bar{\mu}\in R_+^{|T|}$，$\bar{\lambda}+\bar{\mu}\in\Lambda\left(\bar{x}\right)$ 且 $\bar{x}\in S\left(P\right)\subseteq F\left(P\right)$，因此

$$\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t\left(\bar{x}\right)=\sum_{t\in T}\bar{\mu}_t g_t\left(\bar{x}\right)=0. \tag{7}$$

故 $\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in F\left(D_{x^*}\right)$。又因为 $x^*\in\partial g\left(\bar{x}\right)$，因此结合(7)式可知

$$\begin{aligned}f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)&=f\left(\bar{x}\right)-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)\\&=f\left(\bar{x}\right)-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t\left(\bar{x}\right)\\&=L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right).\end{aligned}$$

进一步，由于 $L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)$ 在 $\bar{x}$ 处是伪凸函数，故由定理 3.1 (i)可得

$$L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)=f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)\geq L_{x^*}\left(y,\lambda\right),\ \forall\left(y,\lambda,\mu\right)\in F\left(D_{x^*}\right).$$

因此 $\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in S\left(D_{x^*}\right)$。证毕。

定理 3.3 (逆对偶定理) 设 $\bar{x}\in F\left(P\right),\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in F\left(D_{x^*}\right),\bar{\lambda}\in\Lambda\left(\bar{x}\right)$。若存在 $x^*\in\partial g\left(\bar{x}\right)$，使得对任意的 $x\in F\left(P\right)$，有 $x^*\in\partial g\left(x\right)$ 以及 $L_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)$ 在点 $\bar{x}$ 处是伪凸的，则 $\bar{x}\in S\left(P\right)$。

证明：设 $\bar{x}\in F\left(P\right),\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in F\left(D_{x^*}\right),\bar{\lambda}\in\Lambda\left(\bar{x}\right)$。因此 $\bar{\mu}\in\Lambda\left(\bar{x}\right)$，且

$$\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t\left(\bar{x}\right)=\sum_{t\in T}\bar{\mu}_t g_t\left(\bar{x}\right)=0. \tag{8}$$

由于 $\left(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)\in F\left(D_{x^*}\right)$，所以存在 $u\in\partial_T f\left(\bar{x}\right),v_t\in\partial_T g_t\left(\bar{x}\right),t\in T$ 和 $w\in N_M\left(\bar{x}\right)$ 使得

$$x^*=u+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)v_t+w. \tag{9}$$

用反证法。假设 $\bar{x}\notin S\left(P\right)$，则存在 $y\in F\left(P\right)$ 使得 $f\left(y\right)-g\left(y\right)<f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)$。由于 $\bar{\lambda},\bar{\mu}\in R_+^{|T|}$，$g_t\left(y\right)\leq 0$，因此

$$f\left(y\right)-g\left(y\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)g_t\left(y\right)<f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right).$$

再结合(8)式可得

$$f\left(y\right)-g\left(y\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)g_t\left(y\right)<f\left(\bar{x}\right)-g\left(\bar{x}\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)g_t\left(\bar{x}\right).$$

注意到 $x^*\in\partial g\left(\bar{x}\right)\cap\partial g\left(x\right)$，因此由 Young 等式可得

$$f\left(y\right)-\left\langle y,x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)g_t\left(y\right)<f\left(\bar{x}\right)-\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle+g^*\left(x^*\right)+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)g_t\left(\bar{x}\right).$$

即

$$L_{x^*}\left(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)<L_{x^*}\left(\bar{x},\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right).$$

由于 $L_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)$ 在点 $\bar{x}$ 处是伪凸的，故 $L'_{x^*}\left(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)\left(\bar{x},y-\bar{x}\right)<0$。再由切向次微分定义可知

$$\left\langle u+\sum_{t\in T}\left(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t\right)v_t+w-x^*,y-\bar{x}\right\rangle<0.$$

这与(9)式矛盾，因此 $\bar{x}\in S\left(P\right)$。证毕。

参考文献

[1] Boţ, R.I., Grad, S. and Wanka, G. (2008) On Strong and Total Lagrange Duality for Convex Optimization Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 1315-1325. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.071

[2] Fang, D., Luo, X. and Wang, X. (2014) Strong and Total Lagrange Dualities for Quasiconvex Programming. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, 1-8. https://doi.org/10.1155/2014/453912

[3] Wang, M., Fang, D. and Chen, Z. (2015) Strong and Total Fenchel Dualities for Robust Convex Optimization Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, Article No. 70. https://doi.org/10.1186/s13660-015-0592-9

[4] Dinh, N. and Son, T.Q. (2007) Approximate Optimality Conditions and Duality for Convex Infinite Programming Problems. *Science and Technology Development Journal*, **12**, 29-38.

[5] Fajardo, M.D. and Vidal, J. (2016) Stable Strong Fenchel and Lagrange Duality for Evenly Convex Optimization

Problems. *Optimization*, **65**, 1675-1691. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1167207

[6] Bector, C.R., Chandra, S. and Abha, (2001) On Mixed Duality in Mathematical Programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **259**, 346-356. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7518

[7] Boţ, R.I. and Grad, S. (2010) Wolfe Duality and Mond-Weir Duality via Perturbations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 374-384. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.026

[8] Yang, X.M., Yang, X.Q. and Teo, K.L. (2005) Mixed Type Converse Duality in Multiobjective Programming Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **304**, 394-398. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.031

[9] Fang, D. (2015) Some Relationships among the Constraint Qualifications for Lagrangian Dualities in DC Infinite Optimization Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, Article No. 41. https://doi.org/10.1186/s13660-015-0561-3

[10] Fang, D.H. (2012) Stable Zero Lagrange Duality for DC Conic Programming. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, 1-17. https://doi.org/10.1155/2012/606457

[11] Zhou, Y. and Li, G. (2014) The Toland-Fenchel-Lagrange Duality of DC Programs for Composite Convex Functions. *Numerical Algebra*, *Control & Optimization*, **4**, 9-23. https://doi.org/10.3934/naco.2014.4.9

[12] Pshenichnyi, B.N. (2020) Necessary Conditions for an Extremum. Chemical Rubber Company Press.

[13] Mashkoorzadeh, F., Movahedian, N. and Nobakhtian, S. (2020) Robustness in Nonsmooth Nonconvex Optimization Problems. *Positivity*, **25**, 701-729. https://doi.org/10.1007/s11117-020-00783-5

[14] Long, X., Liu, J. and Huang, N. (2021) Characterizing the Solution Set for Nonconvex Semi-Infinite Programs Involving Tangential Subdifferentials. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **42**, 279-297. https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1873366

[15] Martínez-Legaz, J.E. (2014) Optimality Conditions for Pseudoconvex Minimization over Convex Sets Defined by Tangentially Convex Constraints. *Optimization Letters*, **9**, 1017-1023. https://doi.org/10.1007/s11590-014-0822-y

[16] Liu, J., Long, X. and Huang, N. (2023) Approximate Optimality Conditions and Mixed Type Duality for Semi-Infinite Multiobjective Programming Problems Involving Tangential Subdifferentials. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **19**, 6500-6519. https://doi.org/10.3934/jimo.2022224

[17] Bagirov, A., Karmitsa, N. and Mäkelä, M.M. (2014) Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software. Springer.

[18] Lemaréchal, C. (1986) An Introduction to the Theory of Nonsmooth Optimization. *Optimization*, **17**, 827-858. https://doi.org/10.1080/02331938608843204

[19] Dinh, N., Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2009) Qualification and Optimality Conditions for DC Programs with Infinite Constraints. *Acta Mathematica Vietnamica*, **34**, 125-155.