

离散马尔可夫跳跃线性奇异系统的稳定性分析

陈柏江, 叶志勇*

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2025年2月23日; 录用日期: 2025年3月17日; 发布日期: 2025年3月25日

摘 要

在本文中, 我们提出了具有部分已知转移概率的马尔可夫跳跃线性奇异系统(MJLSS)概率渐近稳定性的充分条件。为了解决这个问题, 提供了所考虑系统的概率渐近稳定性的随机李雅普诺夫定理。此外, 我们还证明了原始系统与其基于奇异值分解的差分代数形式具有相同的稳定性。通过利用先前文献的早期结果, 获得了线性矩阵不等式的充分条件。最后, 给出了相关算例以证明所提出的稳定性分析的有效性。

关键词

概率渐近稳定性, 马尔可夫跳跃线性系统, 部分已知转移概率, 线性矩阵不等式

Stability Analysis of Discrete-Time Markovian Jump Linear Singular Systems

Baijiang Chen, Zhiyong Ye*

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Feb. 23rd, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Mar. 25th, 2025

Abstract

In this paper, we present sufficient conditions for the Asymptotic stability in probability of a Markovian jump linear singular system (MJLSS) with partially known transition probabilities. To handle this problem, a stochastic Lyapunov theorem on asymptotic stability in probability for the considered systems is provided. Also, we show that the original system has the same stability property as its difference-algebraic form based on singular value decomposition. By utilizing the earlier results on previous literatures, a sufficient condition is obtained in terms of linear matrix inequalities. Finally, relevant examples are presented in order to show the effectiveness of the proposed stability analysis.

*通讯作者。

文章引用: 陈柏江, 叶志勇. 离散马尔可夫跳跃线性奇异系统的稳定性分析[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 398-408.
DOI: 10.12677/aam.2025.143127

Keywords

Asymptotic Stability in Probability, Markovian Jump Linear Singular Systems, Partially Known Transition Probabilities, Linear Matrix Inequalities

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机跳跃系统是一种特殊的混合系统, 由一类子系统模式和协调这些模式的随机切换信号组成。作为一类重要的随机混合系统, 马尔可夫跳跃线性系统(MJLS)由于其在制造、电力、经济、网络控制等领域[1]均存在广泛的应用, 诸多学者在与此类系统相关的不同问题上已经做出了更多的努力。这些系统的几乎所有控制问题都已得到解决, 并且一些文献中展现了许多研究成果(例如[2]-[9]), 并存在多种随机动力系统的稳定性概念, 如均方稳定性、随机稳定性、几乎确定稳定性和指数稳定性等[10]。

此外, 概率稳定性、概率渐近稳定性及其相关结果也可参见文献[11]和[12]。奇异系统同样出现在许多应用中, 例如电力电子系统、飞行控制系统、网络控制系统、机器人操纵器、经济系统等[13]。另一方面, 马尔可夫链可用于对参数随机突变的各种实际系统。因此, 具有马尔可夫切换的奇异系统的分析和控制设计在过去几十年中受到了相当多的关注, 此类系统也被称为马尔可夫跳跃奇异系统(MJSS)。需要指出的是, 许多动力系统常常受到环境噪声的影响, 噪声的影响不容忽视。因此, 在建立某些物理、工程和经济过程的数学模型时, 有必要考虑噪声的影响。确定性奇异系统的分析和综合方法不能直接应用于奇异随机系统, 因为随机噪声项也与规律性和因果关系密切相关。因此, 仍有一些问题有待解决, 例如概率渐近稳定性和概率稳定性。然而, 获得所有转移概率在实际应用中可行性不高。无论在理论上还是在实践中, 获得这种可用的转移概率实际上是非常困难的。有必要进一步考虑具有部分已知转移概率的跳跃系统。文献[14]研究了一类具有部分未知转移概率的连续时间和离散时间马尔可夫跳跃线性系统的稳定性和稳定性问题。在该文献[15]中, 提出了基于具有部分已知转移概率的马尔可夫跳跃线性奇异系统的线性矩阵不等式(LMI)的随机稳定性的充分条件。给出了基于系统的动力学分解和 Weierstrass 分解的两种不同的方法。此外, 在过去的几十年里, 部分学者已经考虑了部分已知转移概率问题, 一些参考文献是, 例如[16]-[26]。然而, 据我们所知, 目前涉及带有噪声奇异系统的问题尚未得到充分研究。在前面讨论的基础上, 当我们研究带有噪声的马尔可夫跳跃奇异系统时, 考虑部分已知的转移概率是很重要的。

受早期研究的启发, 本文重点研究 MJLSS 概率的渐近稳定性问题。与[11] [27]相比, 我们考虑仅具有部分已知转移概率的系统。首先, 基于给定的假设和引理, LMI 形式的充分条件利用奇异值分解可以将原系统转化为其差分代数形式的奇异值分解。本文获得的结果还可用于研究马尔可夫跳跃线性奇异系统的控制综合问题。

本文的其余部分组织如下: 第 2 节介绍了一些充分的预备知识和有用的定义。第 3 节致力于阐述本文的主要结果。第 4 节提供了一些数值例子来说明所得结果的有效性和适用性。最后, 我们在第 5 节给出了结论。

符号说明: R^n , $R^{m \times n}$ 表示 n 维欧氏空间以及所有 $m \times n$ 实矩阵的集合, $E\{\cdot\}$ 和 $\text{Var}\{\cdot\}$ 分别表示数学期望和方差, $A > 0$ (< 0) 表示 A 是对称正(负)定矩阵; $A \geq 0$ (≤ 0) 表示 A 是对称半负(半正)定矩阵; A^{-1}

代表矩阵 A 的逆矩阵; 上标 “T” 代表矩阵的转置。 N_+ 表示正整数的集合。 $\|\cdot\|$ 代表欧氏向量范数或矩阵范数; I 是单位矩阵。 $\lambda_{\max}(A)$ 和 $\lambda_{\min}(A)$ 表示矩阵 A 的最大(最小)特征值。 K 类函数表示连续且严格递增的函数, 函数类 K_∞ 表示 K 中无界函数的集合。

2. 问题描述和基础知识

考虑以下一类带有白噪声的离散时间马尔可夫跳跃线性奇异系统:

$$Ex_{k+1} = A(\theta_k)x_k + B(\theta_k)x_k\xi_k \quad (1)$$

初始状态为 $x_0 = \xi \in \mathbb{R}^n$ 并且 $\|\xi\|^2 < \infty$, 其中 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $\{\xi_k\}$ 是高斯白噪声序列, 满足 $E\{\xi_k\} = 0$ 且 $\text{Var}\{\xi_k\} = 1$ 。矩阵 $A(\theta_k)$ 和 $B(\theta_k)$ 是具有适当维度的实常量矩阵。矩阵 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若不做特殊说明, 一般认为它是奇异的, 满足 $r(E) = s \leq n$ 。随机过程 $\{\theta_k, k \geq 0\}$ 是一个离散时间马尔可夫链, 取有限集合 $L = \{1, 2, \dots, N\}$ 中的值, 转移概率矩阵 $P = [p_{ij}]_{N \times N}$, 其中 $p_{ij} = \Pr\{\theta_{k+1} = j | \theta_k = i\}$ 以及 $p_{ij} \geq 0$ 对于任意 $i, j \in L$ 成立, 且 $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ 对于任意 $i \in L$ 都成立。在本文中, 假设随机过程 θ_k 和 ξ_k 是独立的。为了简便, 在后文中, 对于每个 $\theta_k = i, i \in L$, 矩阵 $A(\theta_k)$ 和 $B(\theta_k)$ 将分别写为 A_i 和 B_i 。

考虑到奇异系统解的适定性, 我们提出以下基本假设: 奇异矩阵 E 满足 $\text{rank}(E) = \text{rank}([E \ B_i])$ 或者 $\text{rank}(E) = \text{rank}([E^T \ B_i^T]^T)$ 。

通过扩展马尔可夫跳跃线性奇异系统的正规性和因果关系[28], 我们给出系统(1)的以下定义。

定义 2.1 在基本假设下,

(i) 如果对于每个 $i \in L$, $\det(zE - A_i) \neq 0$, 则称系统(1)是正则的。

(ii) 如果对于每个 $i \in L$, $\deg(\det(zE - A_i)) = r(E)$, 则称系统(1)是因果的。

在基本假设下, 存在一对适当维度的非奇异矩阵 M 和 N , 使得对于每个 $i \in L$ 满足以下矩阵变换之一:

$$MEN = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad MA_iN = \begin{pmatrix} A_{1i} & A_{2i} \\ A_{3i} & A_{4i} \end{pmatrix}, \quad MB_iN = \begin{pmatrix} B_{1i} & B_{2i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

或者

$$MEN = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad MA_iN = \begin{pmatrix} A_{1i} & A_{2i} \\ A_{3i} & A_{4i} \end{pmatrix}, \quad MB_iN = \begin{pmatrix} B_{1i} & 0 \\ B_{2i} & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

此外, 设

$$\eta_k = \begin{pmatrix} \eta_{1k} \\ \eta_{2k} \end{pmatrix} := N^{-1}x_k$$

系统(1)可以分别分解为以下差分代数形式:

$$\begin{cases} \eta_{1(k+1)} = A_{1i}\eta_{1k} + A_{2i}\eta_{2k} + (B_{1i}\eta_{1k} + B_{2i}\eta_{2k})\xi_k \\ 0 = A_{3i}\eta_{1k} + A_{4i}\eta_{2k} \end{cases} \quad (4)$$

或者

$$\begin{cases} \eta_{1(k+1)} = A_{1i}\eta_{1k} + A_{2i}\eta_{2k} + B_{1i}\eta_{1k}\xi_k \\ 0 = A_{3i}\eta_{1k} + A_{4i}\eta_{2k} + B_{2i}\eta_{1k}\xi_k \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\eta_{1k} \in R^s$ 且 $\eta_{2k} \in R^{n-s}$ 。

可以看出, 如果奇异系统(1)是因果系统, 则可以从代数方程(4)或(5)求解出 η_{2k} 。这是因为我们很容易发现, 在基本假设下, A_{4i} 是非奇异的。因此, 差分方程(4)和(5)成为正规的马尔可夫跳跃线性系统, 并且每个差分方程都有唯一解。在前面的情况下, 相应的初始条件分别满足 $0 = A_{3i}\eta_{10} + A_{4i}\eta_{20}$ 和 $0 = A_{3i}\eta_{10} + A_{4i}\eta_{20} + B_{2i}\eta_{10}\xi_0$ 。在余下的部分中, 我们主要考虑的是系统(4)的稳定性。

注 2.2 在[15]中, 将离散时间奇异随机系统变换为 Weierstrass 形式。在本文中, 我们通过使用奇异值分解方法来考虑另一个标准等价。非奇异矩阵 M 和 N 可以通过 E 的奇异值分解来计算, 与 Weierstrass 形式分解相比, 奇异值分解的主要优点是不需要假定原系统是正则的, 这使得我们所考虑的条件简化了不少。

与[26] [29]中概率渐近稳定性的定义类似, 我们为马尔可夫跳跃线性奇异系统引入以下定义。

定义 2.3 在因果关系的假设下, 系统(4)或(5)满足

(i) 若对于任意一对 $\varepsilon \in (0, 1)$ 以及 $r > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ 使得

$$Pr\{\|\eta_k\| < r, \forall k \in N_+\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \|\eta_0\| < \delta, \quad (6)$$

则称系统是概率稳定的。

(ii) 若系统概率稳定, 并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Pr\{\|\eta_k\| = 0\} = 1, \quad \forall \eta_0 \in R^n, \quad (7)$$

则称系统是概率渐进稳定的。

为了解决本文的主要问题, 我们需要以下结果, 它提供了系统(4)概率渐近稳定性的随机李雅普诺夫定理。类似的详细证明可以在[27]中找到。

引理 2.4 假设系统(4)是因果系统, 存在正定函数 $V: L \times R^s \rightarrow R_+$, 两个 K_∞ 类函数 γ_1 和 γ_2 以及一个 K 类函数 β , 使得对于所有 $k \in N_+$, 有

$$\gamma_1(\|\eta_{1k}\|) \leq V(i, \eta_{1k}) \leq \gamma_2(\|\eta_{2k}\|), \quad \forall i \in L, \eta_{1k} \in R^s, \quad (8)$$

$$E\{V(\theta_{k+1}, \eta_{1(k+1)}) | \theta_k, \eta_{1k}\} - V(\theta_k, \eta_{1k}) \leq -\beta(\|\eta_{1k}\|), \quad (9)$$

则系统(4)概率渐近稳定。

通过与[27]类似的证明过程, 对于常数 $\alpha \in (0, 1)$, 设 $\beta(\|\eta_{1k}\|) = \alpha V(\theta_k, \eta_{1k})$, 可以推导出来的如下的结论:

引理 2.5 假设系统(4)是因果系统, 并且存在正定函数 $V: L \times R^s \rightarrow R_+$, 两个 K_∞ 类函数 γ_1 和 γ_2 以及常数 $\alpha \in (0, 1)$, 使得对于所有 $k \in N_+$, 有

$$\gamma_1(\|\eta_{1k}\|) \leq V(i, \eta_{1k}) \leq \gamma_2(\|\eta_{2k}\|), \quad \forall i \in L, \eta_{1k} \in R^s, \quad (10)$$

$$E\{V(\theta_{k+1}, \eta_{1(k+1)}) | \theta_k, \eta_{1k}\} - V(\theta_k, \eta_{1k}) \leq -\alpha V(\theta_k, \eta_{1k}), \quad (11)$$

则系统(4)概率渐近稳定。

注 2.6 这是引理 2.4 的一个直接推论。设 $\beta(\|\eta_{1k}\|) = \alpha V(\theta_k, \eta_{1k})$, 可以很容易地由关系式(9)递推可得:

$$E\{V(\theta_{k+1}, \eta_{1(k+1)}) | \theta_k, \eta_{1k}\} \leq (1 - \alpha) E\{V(\theta_k, \eta_{1k})\} \leq \dots \leq (1 - \alpha)^k E\{V(\theta_0, \eta_{10})\} = (1 - \alpha)^k V(\theta_0, \eta_{10})$$

这意味着, 对于任意 $\|\eta_{10}\| \in R^s$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{V(\theta_k, \eta_{1k})\} = 0$, 再通过与[27]定理 1 相关类似的证明思路,

可以得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} Pr \{ \|\eta_k\| = 0 \} = 1$ 。即可以推出引理 2.5 的结论。

注 2.7 在[30]中, 已证明系统(1)与其等价系统(4)或(5)具有相同的稳定性。因此, 我们只需研究系统(4)概率渐近稳定的充分条件即可。

3. 主要结论

奇异系统(1)可以通过奇异值分解方法分解为(4)。因此, 基于系统(4)概率渐近稳定性的随机李雅普诺夫定理, 我们可以考虑原始系统(1)概率渐近稳定性。除了早期的结果之外, 我们还为系统(1)建立了一个基于 LMI 的概率渐近稳定性的充分条件。

为此, 我们首先介绍如下的矩阵变换:

$$M^{-T} R_i M^{-1} = \begin{pmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R_{2i}^T & R_{3i} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 $R_i = R_i^T$ 是对称矩阵。

定理 3.1 对于给定常数 $\alpha \in (0, 1)$, 如果存在满足 $R_{ii} > 0$ 的矩阵 $R_i = R_i^T$, 使得以下线性关系矩阵不等式成立:

$$A_i^T \tilde{R}_i A_i + B_i^T \tilde{R}_i B_i + (\alpha - 1) E^T R_i E < 0, \forall i \in L, \quad (13)$$

其中 $\tilde{R}_i = \sum_{j \in L} p_{ij} R_j$, 则系统(1)概率渐近稳定。

证明 在基本假设下, 我们仍然可以将系统(1)转化为相应的系统(4)。将(13)分别乘以 N^T 和 N , 然后利用(2)中的矩阵变换, 我们得到以下分块矩阵不等式:

$$\begin{aligned} & A_i^T \tilde{R}_i A_i + B_i^T \tilde{R}_i B_i + (\alpha - 1) E^T R_i E \\ &= (N^T A_i^T M^T) (M^{-T} \tilde{R}_i M^{-1}) (M A_i N) + (N^T B_i^T M^T) (M^{-T} \tilde{R}_i M^{-1}) (M B_i N) \\ & \quad + (\alpha - 1) (N^T E^T M^T) (M^{-T} R_i M^{-1}) (M E N) \\ &= \begin{pmatrix} A_{1i} & A_{2i} \\ A_{3i} & A_{4i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{R}_{1i} & \tilde{R}_{2i} \\ \tilde{R}_{2i}^T & \tilde{R}_{3i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1i} & A_{2i} \\ A_{3i} & A_{4i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1i} & B_{2i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{R}_{1i} & \tilde{R}_{2i} \\ \tilde{R}_{2i}^T & \tilde{R}_{3i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1i} & B_{2i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad + (\alpha - 1) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R_{2i}^T & R_{3i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_{1i} & W_{2i} \\ W_{2i}^T & W_{3i} \end{pmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$W_{1i} = A_{1i}^T \tilde{R}_{1i} A_{1i} + A_{3i}^T \tilde{R}_{2i}^T A_{1i} + A_{1i}^T \tilde{R}_{2i} A_{3i} + A_{3i}^T \tilde{R}_{3i} A_{3i} + B_{1i}^T \tilde{R}_{1i} B_{1i} + (\alpha - 1) R_{1i} \quad (15)$$

$$W_{2i} = A_{1i}^T \tilde{R}_{1i} A_{2i} + A_{3i}^T \tilde{R}_{2i}^T A_{2i} + A_{1i}^T \tilde{R}_{2i} A_{4i} + A_{3i}^T \tilde{R}_{3i} A_{4i} + B_{1i}^T \tilde{R}_{1i} B_{2i} \quad (16)$$

$$W_{3i} = A_{2i}^T \tilde{R}_{1i} A_{2i} + A_{4i}^T \tilde{R}_{2i}^T A_{2i} + A_{2i}^T \tilde{R}_{2i} A_{4i} + A_{4i}^T \tilde{R}_{3i} A_{4i} + B_{2i}^T \tilde{R}_{1i} B_{2i} \quad (17)$$

$$\tilde{R}_{li} = \sum_{j \in L} p_{ij} R_{lj}, l = 1, 2, 3. \quad (18)$$

对于任何非零向量 ζ_i , 令 $\hat{\zeta}_i = A_{2i} \zeta_i$ 和 $\tilde{\zeta}_i = B_{2i} \zeta_i$, 有

$$\zeta_i^T (A_{2i}^T \tilde{R}_{1i} A_{2i} + B_{2i}^T \tilde{R}_{1i} B_{2i}) \zeta_i = \hat{\zeta}_i^T \tilde{R}_{1i} \hat{\zeta}_i + \tilde{\zeta}_i^T \tilde{R}_{1i} \tilde{\zeta}_i. \quad (19)$$

值得注意的是, $R_{ii} > 0$ 意味着 $\tilde{R}_{ii} > 0$, 从而可以得到 $\hat{\zeta}_i^T \tilde{R}_{1i} \hat{\zeta}_i \geq 0$ 以及 $\tilde{\zeta}_i^T \tilde{R}_{1i} \tilde{\zeta}_i \geq 0$, 其中当且仅当 $\hat{\zeta}_i = 0$

且 $\tilde{\zeta}_i = 0$ 时等式成立。又从前面的等式(19)可以得出:

$$\zeta_i^T (A_{2i}^T \tilde{R}_{1i} A_{2i} + B_{2i}^T \tilde{R}_{1i} B_{2i}) \zeta_i = \hat{\zeta}_i^T \tilde{R}_{1i} \hat{\zeta}_i + \tilde{\zeta}_i^T \tilde{R}_{1i} \tilde{\zeta}_i \geq 0. \quad (20)$$

这意味着 $A_{2i}^T \tilde{R}_{1i} A_{2i} + B_{2i}^T \tilde{R}_{1i} B_{2i} \geq 0$ 。由(14)很容易看出 $W_{3i} < 0$ 。因此, 我们有

$$A_{4i}^T \tilde{R}_{2i}^T A_{2i} + A_{2i}^T \tilde{R}_{2i} A_{4i} + A_{4i}^T \tilde{R}_{3i} A_{4i} < 0. \quad (21)$$

另外, 我们可以得到: 对于每个 $i \in L$, A_{4i} 都是非奇异的。反之, 假设 A_{4i} 是奇异的, 则存在一个非零向量 ρ_i , 使得 $A_{4i} \rho_i = 0$ 。然而 $\rho_i^T (A_{4i}^T \tilde{R}_{2i}^T A_{2i} + A_{2i}^T \tilde{R}_{2i} A_{4i} + A_{4i}^T \tilde{R}_{3i} A_{4i}) \rho_i = 0$, 与(21)矛盾。因此, A_{4i} 对于每个 $i \in L$ 都是非奇异的。根据定义 2.1 和[31]中的相关结论, 我们可以得到系统(1)是正则且因果的。

设系统(1)的李亚普诺夫函数为

$$\tilde{V}(\theta_k, x_k) = x_k^T E^T R(\theta_k) E x_k. \quad (22)$$

定义 $\Delta \tilde{V}(\theta_k, x_k) = E \{ \tilde{V}(\theta_{k+1}, x_{k+1}) | \theta_k, x_k \} - \tilde{V}(\theta_k, x_k)$, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}(\theta_k, x_k) &= E \{ x_{k+1}^T E^T R(\theta_{k+1}) E x_{k+1} | \theta_k, x_k \} - x_k^T E^T R(\theta_k) E x_k \\ &= E \left\{ (A(\theta_k) x_k + B(\theta_k) x_k \xi_k)^T R(\theta_{k+1}) (A(\theta_k) x_k + B(\theta_k) x_k \xi_k) | \theta_k, x_k \right\} \\ &\quad - x_k^T E^T R(\theta_k) E x_k. \end{aligned} \quad (23)$$

根据 ξ_k 和 θ_k 的独立性以及 ξ_k 的相关性质, 我们可以发现

$$\Delta \tilde{V}(\theta_k, x_k) = x_k^T (A_i^T \tilde{R}_i A_i + B_i^T \tilde{R}_i B_i + E^T R_i E) x_k \quad (24)$$

考虑(2)中的矩阵变换, 容易推得

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\theta_k, x_k) &= x_k^T E^T R(\theta_k) E x_k \\ &= \eta_k^T N^T E^T R(i) E N \eta_k \\ &= \eta_k^T (N^T E^T M^T) (M^{-T} R(i) M^{-1}) (M E N) \eta_k \\ &= (\eta_{1k}^T \quad \eta_{2k}^T) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R_{2i}^T & R_{3i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{1k} \\ \eta_{2k} \end{pmatrix} \\ &= \eta_{1k}^T R_{1i} \eta_{1k} \\ &= V(\theta_k, \eta_{1k}) \end{aligned} \quad (25)$$

又由(13)和(25)可得

$$\Delta \tilde{V}(\theta_k, x_k) < -\alpha \tilde{V}(\theta_k, x_k) \quad (26)$$

即 $\Delta V(\theta_k, \eta_{1k}) < -\alpha V(\theta_k, \eta_{1k})$, 另一方面, 对于每个 $i \in L$ 且 $\eta_{1k} \in R^s$, 显然有

$$\lambda_{\min}(R_{1i}) \|\eta_{1k}\| \leq V(i, \eta_{1k}) \leq \lambda_{\max}(R_{1i}) \|\eta_{1k}\| \quad (27)$$

取 $\gamma_1 = \lambda_{\min}(R_{1i})$, $\gamma_2 = \lambda_{\max}(R_{1i})$, 这两个函数均为常值函数, 所以 γ_1, γ_2 满足 K_∞ 函数的定义。由(26)和(27)可知, 满足引理 2.5 中的条件(10)和(11)。由引理 2.5 可知, 对应的系统(4)是概率渐近稳定的。再由注 2.7 中系统(1)与(4)的等价性, 我们得出结论系统(2.1)概率渐近稳定。

证毕。

注 3.2 事实上, 离散马尔可夫奇异系统的均方稳定性在[32]中进行了研究。实际上, 概率渐近稳定性不同于传统的均方稳定性。如果将定理 3.1 中的条件 $\alpha \in (0, 1)$ 替换为 $\alpha = 0$, 则系统(1)的概率渐近稳定性将变为均方稳定性。此外, 满足线性矩阵不等式(13)可行性的系统矩阵必然能够保证[32]中线性矩阵不等

式作为充分条件的可行性。但是, 我们不能得出由系统的概率渐近稳定性推得均方稳定性的结论, 因为这两种条件为充分条件, 而非必要条件。文献[33]-[35]中结论可以有力地说明这两种稳定性的关系。

在下面的定理中, 我们考虑系统(1)在仅给出部分已知转移概率条件下的概率渐近稳定性。为此, 我们首先引入一些集合: 对于每个 $i \in L$, 集合 $L_1^{(i)}$ 和 $L_2^{(i)}$ 定义如下:

$$\begin{aligned} L_1^{(i)} &= \{j: p_{ij} \text{ 已知} \} \\ L_2^{(i)} &= \{j: p_{ij} \text{ 未知} \} \end{aligned} \quad (28)$$

由定义我们可注意到, $L = L_1^{(i)} \cup L_2^{(i)}$ 并且 $\sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1} + \sum_{j_2 \in L_2^{(i)}} p_{ij_2} = 1$ 。为了简便, 后续将用 $\pi_1^{(i)}$ 表示 $\sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}$ 。

定理 3.3 对于给定常数 $\alpha \in (0, 1)$, 考虑系统(1)并假设仅有部分已知的转移概率可用, 如果存在对称矩阵 $R_i = R_i^T$ 满足 $R_{ii} > 0$, 使得对于每个 $i \in L$, 以下线性矩阵不等式成立:

$$A_i^T \left[R_1^{(i)} + (1 - \pi_1^{(i)}) R_j \right] A_i + B_i^T \left[R_1^{(i)} + (1 - \pi_1^{(i)}) R_j \right] B_i + (\alpha - 1) E^T R_i E < 0. \quad (29)$$

其中 $R_1^{(i)} = \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1} R_{j_1}$, $\forall j \in L_2^{(i)}$, 则系统(1)概率渐近稳定。

证明 首先值得注意的是, $\pi_1^{(i)} \leq 1$, 在这里排除 $\pi_1^{(i)} = 1$ 这种特殊情况, 因为这种情况表明转移概率矩阵行中的所有元素都是已知的。对于每个 $i \in L$, 当 $L_2^{(i)} \neq \emptyset$ (i.e. $\sum_{j \in L_2^{(i)}} p_{ij} > 0$), 则可以得到 $1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1} > 0$ 。

因此, 对于每个 $j \in L_2^{(i)}$ 以及 $p_{ij} > 0$, 将(29)两边都乘以 $\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} > 0$, 我们能得到以下不等式:

$$\begin{aligned} & A_i^T \left[\left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) R_1^{(i)} + \left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) (1 - \pi_1^{(i)}) R_j \right] A_i \\ & + B_i^T \left[\left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) R_1^{(i)} + \left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) (1 - \pi_1^{(i)}) R_j \right] B_i \\ & + \frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} (\alpha - 1) E^T R_i E < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 不等式(30)通过对 $j \in L_2^{(i)}$ 进行求和, 我们能得到以下线性矩阵不等式。值得注意的是, 当 $p_{ij} = 0$, 求和也为 0。

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in L_2^{(i)}} A_i^T \left[\left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) R_1^{(i)} + \left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) (1 - \pi_1^{(i)}) R_j \right] A_i \\ & + B_i^T \left[\left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) R_1^{(i)} + \left(\frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} \right) (1 - \pi_1^{(i)}) R_j \right] B_i \\ & + \frac{p_{ij}}{1 - \sum_{j_1 \in L_1^{(i)}} p_{ij_1}} (\alpha - 1) E^T R_i E < 0 \end{aligned} \quad (31)$$

这等价于

$$A_i^T \left[R_1^{(i)} + \sum_{j \in L_2^{(i)}} p_{ij} R_j \right] A_i + B_i^T \left[R_1^{(i)} + \sum_{j \in L_2^{(i)}} p_{ij} R_j \right] B_i + (\alpha - 1) E^T R_i E < 0 \quad (32)$$

通过定理 3.1 不难发现 $R_1^{(i)} + \sum_{j \in L_2^{(i)}} p_{ij} R_j = \sum_{j \in L_1^{(i)}} p_{ij} R_j + \sum_{j \in L_2^{(i)}} p_{ij} R_j = \sum_{j \in L} p_{ij} R_j = \tilde{R}_i$, 因此我们得出系统(2.1)概率渐近稳定的结论。

证毕。

事实上, 当 $L_2^{(i)} = \emptyset$ 时, 则有 $L = L_1^{(i)}$ 。从而定理 3.3 转化为定理 3.1。因此, 定理 3.3 可以看作是定理 3.1 在转移概率部分已知情况下的拓展。

4. 数值算例

在本节中, 我们提出两个实际例子来证明本文理论结果的适用性和有效性。

例 4.1 考虑具有以下参数的系统(1):

$$E = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.4 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

其中“?”代表未知的转移概率。设 $\alpha = 0.5 \in (0, 1)$, 使用 MATLAB LMI 工具箱, 我们能获得 LMI (29) 的可行解为

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1.6832 & 2.7889 \\ 2.7889 & 1.7059 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1.9167 & 2.2811 \\ 2.2811 & 0.1196 \end{pmatrix}$$

其中 $R_{11} = 1.6832 > 0$, $R_{22} = 1.9167 > 0$ 。根据定理 3.3, 系统(1)是概率渐近稳定的。

例 4.2 考虑没有最终需求的多部门经济 Leontief 动力模型[28] [36]

$$x_k = Gx_k + E(x_{k+1} - x_k), \quad (33)$$

其中 x_k 是生产水平, G 是 Leontief 输入输出矩阵, E 是资本系数矩阵。在多部门经济系统中, G 和 E 都含有非负元素。通常, 资本系数矩阵 E 的某些行仅包含零元素。此外, 假设 Leontief 输入输出矩阵 G 受到环境噪声和马尔可夫过程两个随机因素的影响。因此, 系统(1)可以改写为以下奇异系统:

$$Ex_{k+1} = (I - G(\theta_k) + E)x_k + B(\theta_k)x_k\xi_k. \quad (34)$$

考虑具有以下参数的系统(34):

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.2 & 1.42 \\ 0.4 & 2.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.37 & 0.61 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 2.8 & 1.05 & 1.5 \\ 0.8 & 1.55 & 0.78 \\ 0.4 & 0.21 & 0.48 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.1 & 0.45 \\ -0.1 & 0.2 & -0.34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.25 & -0.1 \\ -0.13 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

其中“?”表示未知的元素。设 $A(\theta_k) = I - G(\theta_k) + E$, 我们有

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & -0.62 \\ -0.1 & 0.5 & 0.5 \\ -0.1 & -0.37 & 0.39 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.75 & -0.7 \\ -0.3 & 0.35 & 0.22 \\ -0.4 & -0.21 & 0.39 \end{pmatrix}$$

令 $\alpha = 0.3 \in (0, 1)$, 我们得到 LMI (29) 的可行解为

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.5983 & 0.1195 & 2.3827 \\ 0.1195 & 0.8671 & 5.0054 \\ 2.3827 & 5.0054 & -3.9949 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1.2985 & 0.3318 & 1.9707 \\ 0.3318 & 0.6305 & 4.6452 \\ 1.9707 & 4.6452 & -3.9078 \end{pmatrix}$$

其中

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0.5983 & 0.1195 \\ 0.1195 & 0.8671 \end{pmatrix} > 0, \quad R_{12} = \begin{pmatrix} 1.2985 & 0.3318 \\ 0.3318 & 0.6305 \end{pmatrix} > 0.$$

根据定理 3.3, 系统(2)是概率渐近稳定的。

5. 结论

本文研究了带白噪声的离散时间马尔可夫跳跃线性奇异系统的概率渐近稳定性。与此同时, 我们还考虑转移概率部分未知的情况。特别地, 根据严格的线性矩阵不等式, 提出了离散时间马尔可夫跳跃线性奇异系统概率渐近稳定性的充分条件。最后用数值例子验证了主要结论。

参考文献

- [1] Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. and Marques, R.P. (2006) Discrete-Time Markov Jump Linear Systems. Springer Science Business Media.
- [2] Bolzern, P., Colaneri, P. and De Nicolao, G. (2006) On Almost Sure Stability of Continuous-Time Markov Jump Linear Systems. *Automatica*, **42**, 983-988. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.02.007>
- [3] Zhu, Q. (2016) Razumikhin-Type Theorem for Stochastic Functional Differential Equations with Lévy Noise and Markov Switching. *International Journal of Control*, **90**, 1703-1712. <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1219069>
- [4] Chatterjee, D. and Liberzon, D. (2011) Stabilizing Randomly Switched Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **49**, 2008-2031. <https://doi.org/10.1137/080726720>
- [5] Chatterjee, D. and Liberzon, D. (2007) On Stability of Randomly Switched Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 2390-2394. <https://doi.org/10.1109/tac.2007.904253>
- [6] Wang, B. and Zhu, Q. (2017) Stability Analysis of Markov Switched Stochastic Differential Equations with Both Stable and Unstable Subsystems. *Systems & Control Letters*, **105**, 55-61. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.05.002>
- [7] Mao, X. (2006) Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. Imperial College Press.
- [8] Zhu, Q. (2014) Pth Moment Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching. *Journal of the Franklin Institute*, **351**, 3965-3986. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.04.001>
- [9] Dang, N.H. (2014) A Note on Sufficient Conditions for Asymptotic Stability in Distribution of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **95**, 625-631. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.09.030>
- [10] Chávez-Fuentes, J.R., Costa, E.F., Mayta, J.E. and Terra, M.H. (2017) Regularity and Stability Analysis of Discrete-Time Markov Jump Linear Singular Systems. *Automatica*, **76**, 32-40. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.11.007>
- [11] Yin, J. (2014) Asymptotic Stability in Probability and Stabilization for a Class of Discrete-Time Stochastic Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **25**, 2803-2815. <https://doi.org/10.1002/rnc.3233>
- [12] Nishimura, Y. (2016) Conditions for Local Almost Sure Asymptotic Stability. *Systems & Control Letters*, **94**, 19-24.

- <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2016.05.001>
- [13] Meng, B. and Zhang, J.-F. (2006) Output Feedback Based Admissible Control of Switched Linear Singular Systems. *Acta Automatica Sinica*, **32**, 179-185.
 - [14] Zhang, L. and Boukas, E. (2009) Stability and Stabilization of Markovian Jump Linear Systems with Partly Unknown Transition Probabilities. *Automatica*, **45**, 463-468. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.08.010>
 - [15] Guerrero, J.C., Chávez-Fuentes, J.R., Casavilca, J.E. and Costa, E.F. (2021) Stability Analysis of Discrete-Time Markov Jump Linear Singular Systems with Partially Known Transition Probabilities. *Systems & Control Letters*, **158**, Article ID: 105057. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.105057>
 - [16] Bai, Y., Sun, H. and Wu, A. (2021) Finite-Time Stability and Stabilization of Markovian Jump Linear Systems Subject to Incomplete Transition Descriptions. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **19**, 2999-3012. <https://doi.org/10.1007/s12555-020-0505-7>
 - [17] Guo, Y. (2021) Stability and Stabilization of Markov Jump Systems with Generally Uncertain Transition Rates. *Journal of the Franklin Institute*, **358**, 1765-1781. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.12.020>
 - [18] Li, J., Zhang, Q. and Yan, X. (2013) Stabilisation of Descriptor Markovian Jump Systems with Partially Unknown Transition Probabilities. *International Journal of Systems Science*, **46**, 218-226. <https://doi.org/10.1080/00207721.2013.775394>
 - [19] Kwon, N.K., Park, I.S. and Park, P. (2017) H_∞ Control for Singular Markovian Jump Systems with Incomplete Knowledge of Transition Probabilities. *Applied Mathematics and Computation*, **295**, 126-135. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.09.004>
 - [20] Park, C., Kwon, N.K., Park, I.S. and Park, P. (2019) H_∞ Filtering for Singular Markovian Jump Systems with Partly Unknown Transition Rates. *Automatica*, **109**, Article ID: 108528. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108528>
 - [21] Xiao, X., Park, J.H., Zhou, L. and Lu, G. (2019) New Results on Stability Analysis of Markovian Switching Singular Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **64**, 2084-2091. <https://doi.org/10.1109/tac.2018.2863182>
 - [22] Chávez-Fuentes, J.R., Costa, E.F., Terra, M.H. and Rocha, K.D.T. (2021) The Linear Quadratic Optimal Control Problem for Discrete-Time Markov Jump Linear Singular Systems. *Automatica*, **127**, Article ID: 109506. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109506>
 - [23] Li, S., Yang, J., Chen, W. and Chen, X. (2012) Generalized Extended State Observer Based Control for Systems with Mismatched Uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **59**, 4792-4802. <https://doi.org/10.1109/tie.2011.2182011>
 - [24] Park, I.S., Park, C. and Park, P. (2020) Output-Feedback Stabilization for Descriptor Markovian Jump Systems with Generally Uncertain Transition Rates. *IFAC-PapersOnLine*, **53**, 2045-2050. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2516>
 - [25] Liu, Y., Yang, R. and Lu, J. (2013) Admissibility and Static Output-Feedback Stabilization of Singular Markovian Jump Systems with Defective Statistics of Modes Transitions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **25**, 588-609. <https://doi.org/10.1002/rnc.3108>
 - [26] Shin, J. and Park, B.Y. (2019) H_∞ Control of Markovian Jump Systems with Incomplete Knowledge of Transition Probabilities. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **17**, 2474-2481. <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0672-y>
 - [27] Ding, Y., Zhong, S. and Long, S. (2017) Asymptotic Stability in Probability of Singular Stochastic Systems with Markovian Switchings. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **27**, 4312-4322. <https://doi.org/10.1002/rnc.3795>
 - [28] Xu, S.Y. and Lam, J. (2006) Robust Control and Filtering of Singular Systems. Vol. 332, Springer.
 - [29] Deng, H., Krstic, M. and Williams, R.J. (2001) Stabilization of Stochastic Nonlinear Systems Driven by Noise of Unknown Covariance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**, 1237-1253. <https://doi.org/10.1109/9.940927>
 - [30] Boukas, E. (2008) Control of Singular Systems with Random Abrupt Changes. Springer Science Business Media.
 - [31] Dai, L.Y. (1989) Singular Control Systems. Springer.
 - [32] Zhao, Y. and Zhang, W. (2015) New Results on Stability of Singular Stochastic Markov Jump Systems with State-Dependent Noise. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **26**, 2169-2186. <https://doi.org/10.1002/rnc.3401>
 - [33] Sun, H., Zhang, Y. and Wu, A. (2018) Stochastic Stability Analysis of Markovian Jump Linear Systems with Incomplete Transition Descriptions. *IET Control Theory & Applications*, **12**, 1974-1982. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2017.1445>
 - [34] Zhao, Y., Zhang, T. and Zhang, W. (2020) Asynchronous H_∞ Control for Uncertain Singular Stochastic Markov Jump Systems with Multiplicative Noise Based on Hidden Markov Mode. *Journal of the Franklin Institute*, **357**, 5226-5247. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.02.043>

- [35] Kao, Y., Han, Y., Zhu, Y. and Shu, Z. (2024) Stability Analysis of Delayed Discrete Singular Piecewise Homogeneous Markovian Jump Systems with Unknown Transition Probabilities via Sliding-Mode Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **69**, 315-322. <https://doi.org/10.1109/tac.2023.3262444>
- [36] Mao, W. (2011) An LMI Approach to Stability and Stabilization of Linear Discrete Singular Systems with State Delay. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 1694-1704. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.048>