Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 26-36
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143089

Hans汉斯

单位圆盘上从加权Bergman空间作用到Hard空间上的Toeplitz算子

肖成中

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2025年2月4日；录用日期：2025年2月26日；发布日期：2025年3月4日

摘 要

研究了单位圆盘$\mathbb{D}$上从加权Bergman空间到Hardy空间的Toeplitz算子，刻画了单位圆盘上p和q值不同时，从加权Bergman空间 A_α^p 到Hardy空间 H^p 的Toeplitz算子的有界性和紧性。

关键词

Toeplitz算子，Bergman空间，Hardy空间，Carleson测度

Toeplitz Operator from the Weighted Bergman Space to the Hard Space on the Unit Disk

Chengzhong Xiao

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 4th, 2025; accepted: Feb. 26th, 2025; published: Mar. 4th, 2025

Abstract

We study Toeplitz operators from weighted Bergman spaces to Hardy spaces in the unit disk of $\mathbb{D}$. We characterize the boundedness and compactness of Toeplitz operators from weighted Bergman spaces A_α^p to Hardy spaces H^p for the different values of p and q in the unit disk.

Keywords

Toeplitz Operator, Bergman Space, Hardy Space, Carleson Measure

文章引用: 肖成中. 单位圆盘上从加权 Bergman 空间作用到 Hard 空间上的 Toeplitz 算子[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 26-36. DOI: 10.12677/aam.2025.143089

1. 引言

设 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘且 $S=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 为其边界。令 dv 为 $\mathbb{D}$ 上的标准勒贝格面积测度，那么有 $v(\mathbb{D})=1$。令 $d\sigma$ 为 $\mathbb{D}$ 上的标准勒贝格旋转不变量测度，并满足 $\sigma(S)=1$。

对于 $0<p<\infty$ 和 $\alpha>-1$，令 $L^{p,\alpha}:=L^p(\mathbb{D},dv_\alpha)$ 表示由单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上所有可测函数构成的加权勒贝格空间，并满足

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{1/p}<\infty,$$

其中 $v_\alpha(z)=c_\alpha\left(1-|z|^2\right)^\alpha d(z)$，$c_\alpha$ 为正数并使 $v_\alpha(\mathbb{D})=1$。由此，可定义单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的加权 Bergman 空间 $A_\alpha^p=L^p(\mathbb{D},dv_\alpha)\cap H(\mathbb{D})$，其中 $H(\mathbb{D})$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数构成的空间。

对于 $0<p<\infty$，由单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数 f 组成，并且有下列形式：

$$\|f\|_{H^p}^p=\sup_{0<r<1}\int_S|f(r\zeta)|^p\mathrm{d}\sigma(\zeta)<\infty$$

组成的空间称为 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{D})$。

令 μ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度。若对任意两个正数 p 和 q 且 $\lambda=q/p$ 及 $\alpha>-1$，总存在常数 $C>0$，使得对任意 $f\in A_\alpha^p$ 都有

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\|f\|_{p,\alpha}^q,$$

那么称 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度。同时我们定义

$$\|\mu\|_{\lambda,\alpha}=\sup_{f\in A_\alpha^p,\|f\|_{p,\alpha}\le1}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^q\mathrm{d}\mu(z).$$

Carleson 测度的概念最早是由 L. Carleson [1] [2]为了研究单位圆盘上所有有界解析函数的代数 H^∞ 上的插值序列和日冕问题而引入的。它很快成为研究函数空间和作用于函数空间上的算子的有力工具。Bergman Carleson 测度首先由 Hastings [3]研究，Oleinik [4]、Luecking [5] [6]、Cima-Wogen [7]等人进一步研究。

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上，给定 $\beta>-1$ 和一个正 Borel 测度 μ，定义 Toeplitz 算子 T_μ^β 如下：

$$T_\mu^\beta f(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\omega)}{(1-z\bar{\omega})^{2+\beta}}\mathrm{d}\mu(\omega),z\in\mathbb{D}.$$

Toeplitz 算子是研究线性算子性质(如有界性、紧性、谱性质等)的经典模型。它们的结构相对简单，但包含了丰富的数学现象，因此常被用来验证和发展新的算子理论。Toeplitz 算子通常定义在函数空间上，研究 Toeplitz 算子有助于深入理解函数空间的结构和性质，并且 Toeplitz 算子与复合算子、Volterra 型积分算子、Carleson 嵌入等经典映射关系密切，相关应用可以参见[8] [9]。最近，在[8]中，Pau 和 Zhao 刻画了单位球 $\mathbb{B}_n$ 上 Toeplitz 算子 T_μ^β 在不同加权 Bergman 空间 $A_{\alpha_1}^{p_1}$ 到 $A_{\alpha_2}^{p_2}$ 之间的有界性和紧性，通过使用加权 Bergman 空间中的函数积，给出单位球 $\mathbb{B}_n$ 上 (λ,γ)-Bergman Carleson 测度和消失的 (λ,γ)-

Bergman Carleson 测度的新刻画，并将结果应用于研究从加权 Bergman 空间到一般函数空间族的扩展 Cesàro 算子和点乘算子的有界性和紧性。随后，在[9]中，Pau 和 Perälä 研究了单位球面 $\mathbb{B}_n$ 上 Toeplitz 算子 Q_μ 在不同的 Hardy 空间 H^p 到 H^q 的作用，完全表征了单位球面 $\mathbb{B}_n$ 上 $Q_\mu : H^p \to H^q$ 在 $0 < p,q < \infty$ 全范围内的有界性和紧性，其中

$$Q_\mu f(z) = \int_B \frac{f(\omega)}{(1 - z\bar{\omega})^n} \mathrm{d}\mu(\omega), z \in B.$$

受到[8]和[9]的启发，本文研究了 Toeplitz 算子 T_μ^β 从加权 Bergman 空间 A_α^p 作用到 Hardy 空间 H^q 的有界性和紧性，对算子的作用空间进行了一定补充，但是考虑到问题的复杂性并为了利用已有的结果，我们将问题放在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中考虑。

本文的证明受到了 Pau 和 Zhao 在[8]中工作的启发，最主要的两个结果是以下两个定理：

定理 1.1 对于 $0 < p,q < \infty$ 和 $\alpha > -1$，设 $2 + \beta > \max\left\{1, \frac{1}{p}\right\} + \frac{1+\alpha}{p}$.

令

$$\lambda = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \gamma = \frac{1}{\lambda}\left(\beta + \frac{\alpha}{p} + \frac{1}{q}\right),$$

且 μ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度，那么有：

(i) 当 $0 < p \le q < \infty$，若 $T_\mu^\beta : A_\alpha^p \to H^q$ 是有界的，则 μ 是一个 (λ, α)-Bergman Carleson 测度；

(ii) 当 $2 \le q < p < \infty$，若 $T_\mu^\beta : A_\alpha^p \to H^q$ 是有界的，则 μ 是一个 (λ, α)-Bergman Carleson 测度。

定理 1.2 对于 $0 < p,q < \infty$ 和 $\alpha > -1$，设 $2 + \beta > \frac{1}{q}$。

令

$$\lambda = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \gamma = \frac{1}{\lambda}\left(\beta + \frac{\alpha}{p} + \frac{1}{q}\right),$$

且 μ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度，那么对于 $0 < q \le 1$，若 μ 是一个 (λ, α)-Bergman Carleson 测度，则 $T_\mu^\beta : A_\alpha^p \to H^q$ 是有界的。

在本文中，C 和 M 表示正数，它们在每次出现时不一定相同。表达式 $A \approx B$ 表示存在常数 C，使得 $C^{-1}B \le A \le CB$。

2. 预备知识

本节将回顾一些众所周知的结果，这些结果将在整个论文中使用。

我们将引用 Bergman Carleson 测度的两个结果来证明 Bergman Carleson 测度只依赖于 α 和比值 $\lambda = q/p$ 这一事实。第一个结果是由多个作者得出的，可以参考[10]并在[11]中的定理 50 及其参考文献中找到。

定理 A 对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度 μ，$0 < p \le q < \infty$ 和 $\alpha > -1$，下列表述是等价的：

(i) 存在常数 $C_1 > 0$，使得对任意 $f \in A_\alpha^p$ 都有

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \mathrm{d}\mu(z) \le C_1 \|f\|_{p,\alpha}^q.$$

(ii) 存在常数 $C_2 > 0$，使得对任意实数 r 且 $0 < r < 1$，以及任意 $z \in \mathbb{D}$，有

$$\mu\left(D(z,r)\right)\le C_2\left(1-|z|^2\right)^{(2+\alpha)q/p}.$$

此外，常数 C_1 和 C_2 都与 $\|\mu\|_{\lambda,\alpha}$ 等价，其中 $\lambda=q/p$。

对于 $0<q<p<\infty$ 的情况，需要用到关于单位圆盘分割的重要结论.以下结果是[10]中的引理 4.7。

引理 A 存在正整数 N 使得对任意 $0<r<1$，总能在 $\mathbb{D}$ 中找到点列 $\{a_k\}$ 具有如下性质：

(i) $\mathbb{D}=\bigcup_k D(a_k,r)$。

(ii) 集合 $D(a_k,r/4)$ 互不相交。

(iii) $\mathbb{D}$ 中的每个点 z 至多属于 N 个集合 $D(a_k,4r)$。

在 Bergman 度量中，满足上述引理的点列 $\{a_k\}$ 被称为 r-格。显然 r-格是可分的。为方便起见，记 $D_k=D(a_k,r)$ 且 $\tilde{D}_k=D(a_k,4r)$。引理 A 说明对于 $\mathbb{D}=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k$ 中的每个点 z 总存在正整数 N 使得 z 最多属于 N 个集合 $\tilde{D}_k$。

下面的结论基于 Luecking 的论文[12] [13]。对于 $\alpha>-1$，下面的结论可以与论文[13]类似地证明。第(iv)部分中的条件首次出现在论文[14]中，这用于将调和 Bergman 空间嵌入到 Lebesgue 空间中。

定理 B 对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度 μ， $0<q<p<\infty$ 和 $\alpha>-1$，下列表述是等价的：

(i) 存在常数 $C_1>0$，使得对任意 $f\in A_\alpha^p$ 都有

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C_1\|f\|_{p,\alpha}^q.$$

(ii) 对任意固定实数 r 且 $0<r<1$，函数

$$\hat{u}_r:=\frac{\mu\left(D(z,r)\right)}{\left(1-|z|^2\right)^{2+\alpha}}\in L^{p/(p-q),\alpha}$$

(iii) 对于如引理 A 中的 r-格 $\{a_k\}$ 和 D_k，固定实数 r 且 $0<r<1$，序列

$$\{u_k\}:=\left\{\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\alpha)q/p}}\right\}\in l^{p/(p-q),\alpha}.$$

由上述定理可知，对于 $0<r<1$，单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度当且仅当

$$\frac{\mu\left(D(z,r)\right)}{\left(1-|z|^2\right)^{2+\alpha}}\in L^{1/(1-\lambda),\alpha}$$

或者

$$\left\{\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\alpha)\lambda}}\right\}\in l^{1/(1-\lambda)}.$$

下面的积分估计(见[15]，定理 1.12)在分析过程中是不可或缺的。

引理 B 设 $z\in\mathbb{D}$， $c>0$ 且 $t>-1$。那么积分

$$J_{c,t}(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{\left(1-|w|^2\right)^t}{|1-z\overline{w}|^{2+t+c}}\mathrm{d}v(w)$$

和

$$I_c(z)=\int_S\frac{1}{|1-z\overline{\zeta}|^{1+c}}\mathrm{d}\sigma(\zeta)$$

都等价于 $\left(1-|z|^2\right)^{-c}$。

考虑一个 Rademacher 函数序列 $r_k(t)$ (见[16]，附录 A)。对于几乎每一个 $t\in(0,1)$，序列 $\{r_k(t)\}$ 由±1组成。接下来给出的是经典 Khinchine 不等式(参见[16]，附录 A)。

Khinchine 不等式 令 $0<p<1$。那么对任意复数序列 $\{c_k\}$，都有

$$\left(\sum_k|c_k|^2\right)^{p/2}\approx\int_0^1\left|\sum_k c_k r_k(t)\right|^p\mathrm{d}t.$$

有了以上准备便可以证明主要结论了。

3. 有界性

3.1. 证明定理 1.1

证明 (i) 当 $0<p\le q<\infty$ 时，固定 $a\in\mathbb{D}$ 并且令 $f_a(z)=(1-z\overline{a})^{-(2+\beta)}$。因此在条件 $(2+\beta)p>2+\alpha$ 下，利用引理 B 易知 $f_a(z)\in A_\alpha^p$，并且有

$$\|f_a\|_{p,\alpha}^p=\int_{\mathbb{D}}\frac{1}{|1-z\overline{a}|^{(2+\beta)p}}\mathrm{d}v_\alpha(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha}{|1-z\overline{a}|^{(2+\alpha)+(2+\beta)p-(2+\alpha)}}\mathrm{d}v(z)\le C\left(1-|a|^2\right)^{2+\alpha-(2+\beta)p}.$$

由于

$$T_\mu^\beta f_a(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f_a(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}}\mathrm{d}\mu(w)=\int_{\mathbb{D}}\frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}\cdot(1-w\overline{a})^{2+\beta}}\mathrm{d}\mu(w),$$

可得

$$T_\mu^\beta f_z(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{\mathrm{d}\mu(w)}{|1-z\overline{w}|^{2(2+\beta)}}\ge C\frac{\mu(D(z,r))}{\left(1-|z|^2\right)^{2(2+\beta)}}.$$

根据[17]的定理 2.1，结合 Toeplitz 算子 T_μ^β 的有界性，可知

$$\begin{aligned}\mu(D(z,r))&\le C\left|T_\mu^\beta f_z(z)\right|\left(1-|z|^2\right)^{2(2+\beta)}\\&\le C\left\|T_\mu^\beta f_z(z)\right\|_{H^q}\left(1-|z|^2\right)^{2(2+\beta)-1/q}\\&\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|\|f_z\|_{p,\alpha}\left(1-|z|^2\right)^{2(2+\beta)-1/q}\\&\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|\left(1-|z|^2\right)^{2(2+\beta)-1/q+(2+\alpha)/p-(2+\beta)}\end{aligned}$$

因此有

$$\mu\left(D(z,r)\right)\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|\left(1-|z|^2\right)^{(2+\beta)-1/q+(2+\alpha)/p}=C\left\|T_\mu^\beta\right\|\left(1-|z|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}.$$

根据定理 A 可知 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度并且 $\|\mu\|_{\lambda,\alpha}\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|$.

(ii) 当 $2\le q<p<\infty$ 时，我们注意到 $0<\lambda<1$。令 $r_k(t)$ 为一个 Rademacher 函数序列，且 $\{a_k\}$ 为 $\mathbb{D}$ 上的任意 r-格。由于 $2+\beta>\max\left\{1,\frac{1}{p}\right\}+\frac{1+\alpha}{p}$。

从[11]的定理 2.30 可知，对任意实数序列 $\{\lambda_k\}\in l^p$ 以及几乎所有 $t\in(0,1)$，函数

$$f_t(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k r_k(t)\frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{2+\beta-(2+\alpha)/p}}{(1-z\bar{a}_k)^{2+\beta}}$$

是属于 A_α^p 的，且 $\|f_t\|_{p,\alpha}\le C\|\{\lambda_k\}\|_{l^p}$。定义函数

$$f_k(z)=\frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{2+\beta-(2+\alpha)/p}}{(1-z\bar{a}_k)^{2+\beta}}.$$

由 T_μ^β 从 A_α^p 到 H^q 是有界的，那么对几乎所有 $t\in(0,1)$，都有

$$\left\|T_\mu^\beta f_t\right\|_{H^q}^q=\int_S\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k r_k(t)T_\mu^\beta f_k(z)\right|^q \mathrm{d}\sigma(\zeta)\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q\cdot\|f_t\|_{p,\alpha}^q\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q\cdot\|\{\lambda_k\}\|_{l^p}^q.$$

上式两边对 t 从 0 到 1 进行积分，利用富比尼定理和 Khinchine 不等式可得

$$\int_S\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\left|T_\mu^\beta f_k(z)\right|^2\right)^{q/2}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q\cdot\|\{\lambda_k\}\|_{l^p}^q.$$

设 $\{D_k\}$ 为引理 A 中与格 $\{a_k\}$ 的关联集。由于 $2/q\le1$，那么有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^q\int_S\left|T_\mu^\beta f_k(z)\right|^q\mathrm{d}\sigma(\zeta)&=\int_S\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^q\left|T_\mu^\beta f_k(z)\right|^q\right)^{\frac{2}{q}\cdot\frac{q}{2}}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\&\le\int_S\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\left|T_\mu^\beta f_k(z)\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\&\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q\cdot\|\{\lambda_k\}\|_{l^p}^q.\end{aligned}$$

又由函数的次调和性([15]，定理 4.17)可知

$$\left|T_\mu^\beta f_k(a_k)\right|\le\frac{\left\|T_\mu^\beta f_k\right\|_{H^q}}{\left(1-|a_k|^2\right)^{1/q}}.$$

因此，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^q\left(1-|a_k|^2\right)\left|T_\mu^\beta f_k(a_k)\right|^q\le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q\cdot\|\{\lambda_k\}\|_{l^p}^q. \tag{1}$$

现在我们注意到

$$T_\mu^\beta f_k(a_k)=\left(1-|a_k|^2\right)^{2+\beta-(2+\alpha)/p}\cdot\int_{\mathbb{D}}\frac{\mathrm{d}\mu(w)}{\left|1-w\overline{a_k}\right|^{2(2+\beta)}}$$

那么有

$$\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^{2+\beta-(2+\alpha)/p}} \le CT_\mu^\beta f_k(a_k)$$

并将上式带入公式(1)可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^q\left(\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^s}\right)^q \le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q \cdot \left\|\{\lambda_k\}\right\|_{l^p}^q.$$

其中

$$s=2+\beta+\frac{2+\alpha}{p}-\frac{1}{q}=(2+\gamma)\lambda \tag{2}$$

因为 (p/q) 的共轭指数 $(p/q)'=p/(p-q)$，通过对偶性可知

$$\{\nu_k\}:=\left\{\left(\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^s}\right)^q\right\}\in l^{p/(p-q)}$$

且 $\left\|\{\nu_k\}\right\|_{l^{p/(p-q)}} \le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q$.

也可记为

$$\{\mu_k\}:=\left\{\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}}\right\}\in l^{pq/(p-q)}=l^{1/(1-\lambda)}$$

且有 $\left\|\{\mu_k\}\right\|_{l^{1/(1-\lambda)}}=\left\|\{\nu_k\}\right\|_{l^{p/(p-q)}}^{1/q} \le C\left\|T_\mu^\beta\right\|^q$.

因此，由定理 B 可得 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度。

3.2. 证明定理 1.2

证明 现假设 $0<q\le 1$，测度 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度，我们将证明 T_μ^β 从 A_α^p 到 H^q 是有界的。我们把证明分为两种情况。

情况 1 当 $q=1$ 时，令 $f\in A_\alpha^p$。因为 $\beta>-1$，由富比尼定理和引理 B，可知

$$\begin{aligned}\left\|T_\mu^\beta f\right\|_{H^1} &\le \int_S\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{|f(w)|}{|1-z\overline{w}|^{2+\beta}}\mathrm{d}\mu(w)\right)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\ &\le C\int_{\mathbb{D}}|f(w)|\left(1-|w|^2\right)^{-(1+\beta)}\mathrm{d}\mu(w).\end{aligned} \tag{3}$$

设测度 ν 定义为 $d\nu(w)=\left(1-|w|^2\right)^{-(1+\beta)}$。因为 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度，利用定理 A 和定理 B 易知 ν 是一个 $(1/p,\alpha)$-Bergman Carleson 测度，并有 $\|\nu\|_{1/p,\alpha}\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}$。

因此，对任意 $f\in A_\alpha^p$，有

$$\int_{\mathbb{D}}|f(w)|\mathrm{d}\nu(w)\le C\|\nu\|_{1/p,\alpha}\cdot\|f\|_{p,\alpha}\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}\cdot\|f\|_{p,\alpha}. \tag{4}$$

结合公式(3)和(4)，可知

$$\left\|T_\mu^\beta f\right\|_{H^1} \le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma} \cdot \|f\|_{p,\alpha},$$

所以 T_μ^β 从 A_α^p 到 H^q 是有界的，并且有 $\left\|T_\mu^\beta\right\| \le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}$。

情况 2 当 $0<q<1$ 时，设 $\{a_k\}$ 是 $\mathbb{D}$ 的 r-格，D_k 是引理 A 中相应的集合，因此我们知道 $\mathbb{D}=\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ 并且存在一个正整数 N 使得 $\mathbb{D}$ 中的每个点最多属于集合 $\tilde{D}_k$ 中的 N 个，那么有

$$\begin{aligned}\left|T_\mu^\beta f\right| &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{D_k}\frac{|f(w)|}{|1-z\overline{w}|^{2+\beta}}\mathrm{d}\mu(w)\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|1-z\overline{a_k}\right|^{2+\beta}}\int_{D_k}|f(w)|\mathrm{d}\mu(w)\end{aligned}$$

又由[15]中的引理 2.24 可知，对于 $w\in D_k$ 有

$$|f(w)|^p \le \frac{C}{\left(1-|a_k|^2\right)^{2+\alpha}}\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z),$$

从中我们可以得到

$$\int_{D_k}|f(w)|\mathrm{d}\mu(w) \le \frac{C}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\alpha)/p}}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{1/p}\mu(D_k).$$

因为 $0<q<1$，这意味着

$$\left|T_\mu^\beta f\right|^q \le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|1-z\overline{a_k}\right|^{(2+\beta)q}}\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\alpha)q/p}}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}.$$

因此，由于 $q(2+\beta)>1$，我们可以应用引理 B 得到

$$\begin{aligned}\left\|T_\mu^\beta f\right\|_{H^q}^q &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\alpha)q/p}}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\int_S\frac{1}{\left|1-z\overline{a_k}\right|^{(2+\beta)q}}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\alpha)q/p}}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\left(1-|a_k|^2\right)^{1-(2+\beta)/q}\\ &= C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\beta)/q-1+(2+\alpha)q/p}}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}.\end{aligned}\tag{5}$$

首先，假设 $\lambda\ge1$，即 $p\le q$。由于 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度，根据定理 A，我们得到 $\mu(D_k)\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}$。

考虑(2)式和公式(5)，以及 $p\le q$ 的事实，可知

$$\begin{aligned}\left\|T_\mu^\beta f\right\|_{H^q}^q &\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^q\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\\ &\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^q\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\\ &\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^q\cdot\|f\|_{p,\alpha}^q,\end{aligned}$$

因此，T_μ^β 从 A_α^p 到 H^q 是有界的且 $\left\|T_\mu^\beta\right\| \le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}$。

接下来，假设 $0<\lambda<1$，即 $p>q$。对公式(5)用 Hölder 不等式可得

$$\left\|T_\mu^\beta f\right\|_{H^q}^q \le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda q}}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}$$

$$\le C\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda q}}\right]^{p/(p-q)}\right\}^{1-q/p}\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}.$$

由于 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度，根据定理 B，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu(D_k)^q}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda q}}\right]^{p/(p-q)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu(D_k)}{\left(1-|a_k|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}}\right]^{1/(1-\lambda)} \\ &\le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^{1/(1-\lambda)} \\ &= C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^{pq/(p-q)},\end{aligned}$$

所以有

$$\left\|T_\mu^\beta f\right\|_{H^q}^q \le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^q\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\tilde{D}_k}|f(z)|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p} \le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}^q\cdot\|f\|_{p,\alpha}^q$$

因此，T_μ^β 从 A_α^p 到 H^q 是有界的且 $\left\|T_\mu^\beta\right\| \le C\|\mu\|_{\lambda,\gamma}$。

证毕。

4. 紧性

设 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度。若对任意有界序列 $\{f_k\}\subset A_\alpha^p$，$\|f_k\|_{p,\alpha}\le 1$ 且 $f_k(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 的任意紧子集上一致收敛于 0，都有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{D}}|f_k(z)|^q \mathrm{d}\mu(z)=0,$$

那么称 μ 是一个消失的 (λ,α)-Bergman Carleson 测度。

显然，当 $\lambda\ge 1$ 时，μ 是一个消失的 (λ,α)-Bergman Carleson 测度当且仅当对任意 $t>0$ 有

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{\mathbb{D}}\frac{\left(1-|a|^2\right)^t}{|1-z\overline{a}|^{(2+\alpha)\lambda+t}}\mathrm{d}\mu(z)=0.$$

当 $0<\lambda<1$ 时，μ 是一个消失的 (λ,α)-Bergman Carleson 测度当且仅当 μ 是一个 (λ,α)-Bergman Carleson 测度。上述结论可参考[11]。

定理 4.1 对于 $0<p,q<\infty$ 和 $\alpha>-1$，设 $2+\beta>\frac{1}{q}$。

令

$$\lambda=1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\gamma=\frac{1}{\lambda}\left(\beta+\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

且 μ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度，那么对于 $0<p\le q\le 1(\lambda\ge 1)$，若 μ 是一个消失的 (λ,α)-Bergman Carleson 测度，则 $T_\mu^\beta : A_\alpha^p \to H^q$ 是紧的。

证明 若对于 $\lambda\ge 1$，μ 是一个消失的 (λ,α)-Bergman Carleson 测度。要证明 T_μ^β 是紧的，也就是要证明对任意有界序列 $\{f_k\}\subset A_\alpha^p$ 且 $f_k(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 的任意紧子集上一致收敛于 0，都有 $\left\|T_\mu^\beta f_k\right\|_{H^q}\to 0$。

当 $0<p\le q\le 1(\lambda\ge 1)$，由定理 1.2 (见公式(5))证明中得到的估计可知，对于任意格 $\{a_j\}$，都有

$$\left\|T_\mu^\beta f_k\right\|_{H^q}^q \le C\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(D_j)}{\left(1-\left|a_j\right|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}}\right)^q \left(\int_{\tilde{D}_j}\left|f_k(z)\right|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p} \tag{6}$$

由 μ 是一个消失的 (λ,α)-Bergman Carleson 测度和([15]，p. 71)可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $0<r_0<1$ 使得

$$\sup_{\left|a_j\right|>r_0}\frac{\mu(D_j)}{\left(1-\left|a_j\right|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}}<\varepsilon \tag{7}$$

将(6)式中的求和分为两部分：一部分是满足 $\left|a_j\right|>r_0$ 的点；另一部分是满足 $\left|a_j\right|\le r_0$ 的点。由于 $\{f_k\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上的紧子集上是一致收敛于 0 的，显然当 k 趋于无穷时，满足 $\left|a_j\right|\le r_0$ 的点的部分和是趋于 0 的。另一方面，由于 $q\ge p$ 和(7)式，可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{j:\left|a_j\right|>r_0}\left(\frac{\mu(D_j)}{\left(1-\left|a_j\right|^2\right)^{(2+\gamma)\lambda}}\right)^q \left(\int_{\tilde{D}_j}\left|f_k(z)\right|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\\
&<\varepsilon^q\sum_{j:\left|a_j\right|>r_0}\left(\int_{\tilde{D}_j}\left|f_k(z)\right|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\\
&\le\varepsilon^q\left(\sum_{j:\left|a_j\right|>r_0}\int_{\tilde{D}_j}\left|f_k(z)\right|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\\
&\le\varepsilon^q\left(\int_{\mathbb{D}}\left|f_k(z)\right|^p \mathrm{d}v_\alpha(z)\right)^{q/p}\\
&\le\varepsilon^q\left\|f_k\right\|_{p,\alpha}^q\le C\varepsilon^q
\end{aligned}$$

因此 $\left\|T_\mu^\beta f_k\right\|_{H^q}\to 0$，证毕。

参考文献

[1] Carleson, L. (1958) An Interpolation Problem for Bounded Analytic Functions. *American Journal of Mathematics*, **80**, 921-930. https://doi.org/10.2307/2372840

[2] Carleson, L. (1962) Interpolations by Bounded Analytic Functions and the Corona Problem. *The Annals of Mathematics*, **76**, 547-559. https://doi.org/10.2307/1970375

[3] Hastings, W.W. (1975) A Carleson Measure Theorem for Bergman Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **52**, 237-241. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1975-0374886-9

[4] Oleinik, V. (1974) Embedding Theorems for Weighted Classes of Harmonic and Analytic Functions. *Investigations on Linear Operators and Function Theory*. *Part V, Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, **47**, 120-137.

[5] Luecking, D. (1983) A Technique for Characterizing Carleson Measures on Bergman Spaces. *Proceedings of the*

American Mathematical Society, **87**, 656-660. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1983-0687635-6

[6] Luecking, D.H. (1985) Forward and Reverse Carleson Inequalities for Functions in Bergman Spaces and Their Derivatives. *American Journal of Mathematics*, **107**, 85-111. https://doi.org/10.2307/2374458

[7] Cima, J. and Wogen, W. (1982) A Carleson Measure Theorem for the Bergman Space of the Ball. *The Journal of Operator Theory*, **7**, 157-165.

[8] Pau, J. and Zhao, R. (2015) Carleson Measures and Teoplitz Operators for Weighted Bergman Spaces on the Unit Ball. *Michigan Mathematical Journal*, **64**, 759-796. https://doi.org/10.1307/mmj/1447878031

[9] Pau, J. and Perälä, A. (2020) A Toeplitz-Type Operator on Hardy Spaces in the Unit Ball. *Transactions of the American Mathematical Society*, **373**, 3031-3062. https://doi.org/10.1090/tran/8053

[10] Zhu, K. (2007) Operator Theory in Function Spaces. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/surv/138

[11] Zhao, R.H. and Zhu, K.H. (2008) Theory of Bergman Spaces in the Unit Ball of C^n. arXiv: math/0611093.

[12] Luecking, D.H. (1987) Trace Ideal Criteria for Toeplitz Operators. *Journal of Functional Analysis*, **73**, 345-368. https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90072-3

[13] Luecking, D.H. (1993) Embedding Theorems for Spaces of Analytic Functions via Khinchine's Inequality. *Michigan Mathematical Journal*, **40**, 333-358. https://doi.org/10.1307/mmj/1029004756

[14] Choe, B.R., Koo, H. and Yi, H. (2002) Positive Toeplitz Operators between Harmonic Bergman Space. *Potential Analysis*, **17**, 307-335. https://doi.org/10.1023/a:1016356229211

[15] Zhu, K.H. (2005) Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. Springer-Verlag.

[16] Duren, P. (2000) Theory of Hp Spaces. Academic Press.

[17] Zhang, X. (2003) The Pointwise Multipliers of Bloch Type Space β^p and Dirichlet Type Space D_q on the Unit Ball of C^n. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **285**, 376-386. https://doi.org/10.1016/s0022-247x(03)00404-9