

基于尺度变换的BWM改进方法及其对电网关键物资筛选的应用

张 勇¹, 王 超^{2,3}, 仲 翔⁴, 王月虎⁴

¹国网江苏省电力有限公司物资分公司, 江苏 南京

²东南大学网络空间安全学院, 江苏 南京

³东南大学教育部计算机网络和信息集成重点实验室, 江苏 南京

⁴南京财经大学管理科学与工程学院, 江苏 南京

收稿日期: 2025年2月23日; 录用日期: 2025年3月17日; 发布日期: 2025年3月26日

摘 要

区间分析法是处理非线性最优最劣法(BWM)存在多解问题的有效方法。本文基于权重区间中心点的大小关系, 提出了一种无需计算区间优先度即可获得优先度矩阵的全新便捷算法; 然后, 在此基础上, 利用“尺度变换”的思想, 给出了几类求解权重区间中心点的估计方法, 并探讨了这些方法的计算偏差; 最后, 利用本文所提方法研究了一类电网关键物资的选取问题。本研究简化了已有文献中的区间分析法, 规避了求解非线性优化模型的复杂计算过程, 推广了非线性BWM的应用范围。

关键词

尺度变换, 非线性BWM, 国家电网, 物资选择, 区间分析

Improved BWM Method Based on Scale Transformation and Its Application in Selecting Key Materials for Power Grid

Yong Zhang¹, Chao Wang^{2,3}, Xiang Zhong⁴, Yuehu Wang⁴

¹Material Branch Company, State Grid Jiangsu Electric Power Co., Ltd., Nanjing Jiangsu

²School of Cyber Science and Engineering, Southeast University, Nanjing Jiangsu

³Key Lab of CNII, MOE, Southeast University, Nanjing Jiangsu

⁴School of Management Science and Engineering, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing Jiangsu

Received: Feb. 23rd, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Mar. 26th, 2025

文章引用: 张勇, 王超, 仲翔, 王月虎. 基于尺度变换的 BWM 改进方法及其对电网关键物资筛选的应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 422-435. DOI: 10.12677/aam.2025.143129

Abstract

Interval analysis is an effective method for dealing with the existence of multiple solutions in nonlinear Best-Worst Methods (BWM). This article proposes a convenient algorithm for obtaining the priority matrix without calculating the interval priority based on the size relationship of the center points of the weight interval. Then, based on this, several methods for estimating the center point of the weight interval were proposed using the idea of “scale transformation”, and the calculation bias of these methods was discussed. Finally, the method proposed in this article was used to study the selection of key materials for a class of power grid enterprises. This study greatly simplifies the interval analysis method in existing literature, and avoids the complex calculation process of solving nonlinear optimization models, and extends the application scope of nonlinear BWM.

Keywords

Scale Transformation, Nonlinear BWM, State Grid Corporation of China, Material Selection, Interval Analysis

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多准则决策理论(MCDM)在经济和管理科学领域具有广泛应用。当决策问题涉及的指标数量和方案数量较多时,建立合理的层次结构(目标层、准则层、方案层)对于问题的分析至关重要。Saaty [1]于上世纪 70 年代提出了一类定性定量相结合的层次分析法(AHP),该方法通过建立判断矩阵将多个准则的比较转化为两两比较,再通过算术平均值、几何平均值、最大特征根等方法计算得到各个准则的权重。由于其思路明确且操作简单,目前已在经济、金融、教育、管理、能源等诸多领域具有广泛应用(见[2]-[5])。但随着人们关注的问题越来越复杂,其涉及的准则数量也日益增多,从而使得准则之间的相互比较耗时耗力。与人力成本增大相比,更为严重的问题则是:随着判断矩阵的阶数逐渐增大,其一致性很难通过检验,从而不得不反复修正最初的判断矩阵,并且依旧不能确保新修正后的判断矩阵能够通过一致性检验。

针对 AHP 比较次数多且难以通过一致性检验的问题,Rezaei [6]在 2015 年提出了一类名为最优最劣法(Best-Worst Method, 以下简称 BWM)的多准则决策方法,其基本思想是:首先,在所有准则 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 中确定一个最优(重要)准则 C_B 和一个最劣(不重要)准则 C_W ; 然后,将 C_B 与 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 依次比较并用 1~9 之间的整数赋值,将准则间的重要性比较值构成行向量 $A_B = \{a_{B1}, a_{B2}, \dots, a_{Bn}\}$; 接着,再将所有准则 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 与 C_W 依次比较,得到比较向量 $A_W = \{a_{1W}, a_{2W}, \dots, a_{nW}\}$; 最后,通过求解以下非线性优化模型(1.1)得到准则 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 的权重 $\{w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*\}$:

$$\begin{aligned} \min \max_j & \left\{ \left| \frac{w_B}{w_j} - a_{Bj} \right|, \left| \frac{w_j}{w_W} - a_{jW} \right| \right\} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_j w_j = 1, \\ w_j \geq 0, \text{ for all } j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

注意到模型(1.1)通常存在多解, Rezaei 在 2016 年又提出了一种基于区间优先度的区间分析法, 详见 [7]。该方法针对准则 C_i 和 C_j 的权重区间 $[w_i^L, w_i^R]$ 和 $[w_j^L, w_j^R]$, 按下面公式定义了一种区间优先度:

$$P(w_i > w_j) = \frac{\max(0, w_i^R - w_j^L) - \max(0, w_i^L - w_j^R)}{(w_i^R - w_i^L) + (w_j^R - w_j^L)}, \quad (1.2)$$

并由此构建一个优先度矩阵:

$$DP_{IJ} = \begin{pmatrix} P(w_1 > w_1) & P(w_1 > w_2) & \cdots & P(w_1 > w_n) \\ P(w_2 > w_1) & P(w_2 > w_2) & \cdots & P(w_2 > w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(w_n > w_1) & P(w_n > w_2) & \cdots & P(w_n > w_n) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

令

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, P(w_i > w_j) > 0.5, \\ 0, P(w_i > w_j) \leq 0.5, i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.4)$$

则优先度矩阵(1.3)可转化为下面的 **0-1** 矩阵(1.5):

$$P_{IJ} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

然后, 将 **0-1** 矩阵 P_{IJ} 中的第 i 行所有元素相加, 用其和来表示第 i 个准则 C_i 的得分 S_i , 即:

$$S_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad (1.6)$$

并根据该得分给所有准则排序。仔细观察上述方法可知, 要得到 **0-1** 矩阵(1.5), 必须计算优先度矩阵(1.3)。从公式(1.2)进一步可知, 要计算区间优先度, 必须求出每个准则的权重的上界和下界。然而, 在实际应用中, 求解非线性优化模型(1.1)通常是比较困难的, 区间优先度(1.2)式的计算也是比较复杂的。因此, 自然提出以下问题:

(1) 能否不计算准则权重的区间优先度(1.2)和优先度矩阵(1.3), 更便捷地得到 **0-1** 矩阵(1.5)?

(2) 是否可以“绕过”求解非线性优化模型(1.1), 直接根据比较向量 A_B 和 A_w 估计出准则的权重?

针对上述问题, 本文将利用“区间中心比较”和“尺度变换思想”给出一个肯定的回答。余文安排如下: 第二节回顾非线性 BW(1.1)的一种变形及权重上下界的求解方法; 第三节给出基于“权重区间中心比较”的 **0-1** 矩阵(1.5)的计算方法, 并给出几种权重区间中心点的估计方法; 第四节给出本文所提方法在电网关键物资选取中的实际应用; 第五节总结本文的主要结果并探讨未来值得研究的一些新问题。

2. 预备知识

本节首先回顾非线性 BW(1.1)的区间分析法。为进一步简化非线性优化模型(1.1)中的目标函数, Rezaei 在 [7] 中将该模型转化为如下等价的优化问题:

$$\begin{aligned}
 & \min \xi \\
 & \text{s.t.} \begin{cases} \left| \frac{w_B}{w_j} - a_{Bj} \right| \leq \xi, \forall j; \\ \left| \frac{w_j}{w_W} - a_{jW} \right| \leq \xi, \forall j; \\ \sum_j w_j = 1; \\ w_j \geq 0, \forall j. \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

求解(2.1), 可获得目标函数 ξ 的最小值 ξ^* 。然而, 当 ξ 达到此最小值 ξ^* 时, 其最优权重的取值一般并不唯一。正如文[7]所示, 该模型“是否存在多解”与准则之间相互比较的“一致性”密切相关。下面给出“一致性”的定义以及模型(2.1)存在唯一解的条件, 相关证明过程详见[7]。

定义 1. 设有 n 个准则 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, a_{Bj} 表示最优准则 C_B 与第 j 个准则 C_j 的重要性比较值, a_{jW} 表示第 j 个准则 C_j 与最劣准则 C_W 的重要性比较值。如果对于任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 都有 $a_{Bj} \times a_{jW} = a_{BW}$, 则称该比较具有**完全一致性**。

命题 1. 设有 n 个准则 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 。如果准则之间的比较具有完全一致性(即: 对任意 j , 都有 $a_{Bj} \times a_{jW} = a_{BW}$), 则模型(2.1)具有唯一解。

如果模型(2.1)存在多解, 则可通过构建以下两个优化模型(以 w_j 为例)求得其最优权重的下界和上界:

$$\begin{aligned}
 & \min w_j \\
 & \text{s.t.} \begin{cases} \left| \frac{w_B}{w_j} - a_{Bj} \right| \leq \xi^*, \forall j; \\ \left| \frac{w_j}{w_W} - a_{jW} \right| \leq \xi^*, \forall j; \\ \sum_j w_j = 1, \\ w_j \geq 0, \forall j. \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

和

$$\begin{aligned}
 & \max w_j \\
 & \text{s.t.} \begin{cases} \left| \frac{w_B}{w_j} - a_{Bj} \right| \leq \xi^*, \forall j; \\ \left| \frac{w_j}{w_W} - a_{jW} \right| \leq \xi^*, \forall j; \\ \sum_j w_j = 1, \\ w_j \geq 0, \forall j. \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

令模型(2.2)和(2.3)的最优值分别记为 w_j^L 和 w_j^R , 则准则 C_j 的权重区间即为 $[w_j^L, w_j^R]$ 。接下来, 利用(1.2)式即可计算出任意两个准则 C_i 和 C_j 的权重区间的优先度。最后, 利用(1.3)~(1.5)式即可得到准则 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 的重要性排序。

3. 区间优先度的简化计算与一致性尺度变换

由上一节(1.2)~(1.5)式可知, 要得到 **0-1** 矩阵(1.5), 必须先根据(1.2)式计算区间优先度, 再将其与 0.5

比较大小。事实上, 该计算过程可以得到极大的简化, 下面定理表明, 上述过程可归结为: 直接比较权重区间中心点的大小关系。除非特别说明, 以下总假设有 n 个准则 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 。

定理 1. 设准则 C_i 和 C_j 的权重区间分别为 $[w_i^L, w_i^R]$ 和 $[w_j^L, w_j^R]$, 且两个权重区间的中心点分别为 $w_i^C = \frac{w_i^L + w_i^R}{2}$, $w_j^C = \frac{w_j^L + w_j^R}{2}$ 。如果 $w_i^C < w_j^C$, 则 $P(w_i > w_j) < 0.5$ 。

证明. 下面根据权重区间 $[w_i^L, w_i^R]$ 和 $[w_j^L, w_j^R]$ 的端点的相对位置关系分两种情况展开讨论。

情况 1: $w_i^R \leq w_j^L$ 。

此时, $w_i^R - w_j^L \leq 0$, 因此,

$$\max(0, w_i^R - w_j^L) = 0. \quad (3.1)$$

又因为 $w_i^L < w_i^R \leq w_j^L < w_j^R$, 所以 $w_i^L - w_j^R < 0$, 进而有

$$\max(0, w_i^L - w_j^R) = 0. \quad (3.2)$$

联合(3.1)和(3.2)可得

$$\max(0, w_i^R - w_j^L) + \max(0, w_i^L - w_j^R) = 0. \quad (3.3)$$

因为 $\frac{w_i^R - w_i^L}{2} + \frac{w_j^R - w_j^L}{2} > 0$, 所以

$$\max(0, w_i^R - w_j^L) + \max(0, w_i^L - w_j^R) < \frac{w_i^R - w_i^L}{2} + \frac{w_j^R - w_j^L}{2}. \quad (3.4)$$

根据区间优先度的计算公式(1.2)式, (3.4)式等价于

$$P(w_i > w_j) = \frac{\max(0, w_i^R - w_j^L) + \max(0, w_i^L - w_j^R)}{(w_i^R - w_i^L) + (w_j^R - w_j^L)} < \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

情况 2: $w_i^R > w_j^L$ 。

此时, $w_i^R - w_j^L > 0$, 由此可知

$$\max(0, w_i^R - w_j^L) = w_i^R - w_j^L. \quad (3.6)$$

又因为 $w_i^L < w_i^C \leq w_j^C < w_j^R$, 此时仍有

$$\max(0, w_i^L - w_j^R) = 0. \quad (3.7)$$

联立(3.6)式和(3.7)式可得

$$\max(0, w_i^R - w_j^L) + \max(0, w_i^L - w_j^R) = w_i^R - w_j^L. \quad (3.8)$$

另一方面, 因为 $w_i^C < w_j^C$, 所以有

$$\begin{aligned} w_i^R - w_j^L &= w_i^R - w_j^C + w_j^C - w_j^L \\ &< (w_i^R - w_i^C) + (w_j^C - w_j^L) \\ &= \frac{w_i^R - w_i^L}{2} + \frac{w_j^R - w_j^L}{2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

综合(3.8)式和(3.9)式可得

$$P(w_i > w_j) = \frac{\max(0, w_i^R - w_j^L) + \max(0, w_i^L - w_j^R)}{(w_i^R - w_i^L) + (w_j^R - w_j^L)} < \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

证毕。

同理可证明下面的结论。

命题 2. 设准则 C_i 和 C_j 的权重区间分别为 $[w_i^L, w_i^R]$ 和 $[w_j^L, w_j^R]$, 且两个权重区间的中心点分别为 w_i^C 和 w_j^C 。如果 $w_i^C > w_j^C$, 则 $P(w_i > w_j) > 0.5$ 。

为说明本文定理 1 和命题 2 相较于已有方法的优势, 下面选取与[7]中相同例子说明定理 1 和命题 2 的实用性和有效性。

例 1. 某消费者准备购买一辆汽车, 其考虑的属性为: 质量(C_1), 价格(C_2), 舒适度(C_3), 安全性(C_4), 款式(C_5)。该消费者认为最优准则为价格(C_2), 最劣准则为款式(C_5)。最优准则与各准则的比较向量(BO)为: $BO = (2, 1, 4, 3, 8)$; 各准则与最劣准则的比较向量(OW)为: $OW = (4, 8, 4, 2, 1)$ 。求解模型(2.1)~(2.3)可知, 准则 C_1 到 C_5 的权重区间分别为:

$$\begin{aligned} w_1^* &= [0.1579, 0.2469]; \\ w_2^* &= [0.4286, 0.4932]; \\ w_3^* &= [0.1429, 0.1644]; \\ w_4^* &= [0.1111, 0.1579]; \\ w_5^* &= [0.0476, 0.0548]. \end{aligned}$$

进一步计算可得, 准则 C_1 到 C_5 的权重区间的中心点分别为:

$$w_1^C = 0.2024, w_2^C = 0.4609, w_3^C = 0.1536, w_4^C = 0.1345, w_5^C = 0.0512. \quad (3.11)$$

下面利用定理 1 和命题 2, 给准则 C_1 到 C_5 排序。首先, 由(3.11)可知:

$$w_1^C < w_2^C, w_1^C > w_3^C, w_1^C > w_4^C, w_1^C > w_5^C.$$

所以, 由定理 1 和命题 2 可得: $P(w_1 > w_2) < 0.5$, $P(w_1 > w_3) > 0.5$, $P(w_1 > w_4) > 0.5$, $P(w_1 > w_5) > 0.5$ 。再由(1.4)式可知: $P_{12} = 0, P_{13} = 1, P_{14} = 1, P_{15} = 1$ 。同理可求得其它 P_{ij} ($i = 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, \dots, 5$)。整理可得如下 **0-1** 矩阵

$$P_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

计算各行之和可知, 准则 C_1 到 C_5 的排序为: $C_2 \succ C_1 \succ C_3 \succ C_4 \succ C_5$ 。

注 1. 在例 1 中, 利用本文定理 1 和命题 2 得出的结论与[7]中的结果完全一致, 其区别在于: 本文“绕过”了区间优先度(1.2)式的复杂计算过程, 更便捷的获得了 **0-1** 矩阵(3.12)。

然而, 需要强调的是, 定理 1 和命题 2 虽然规避了区间优先度(1.2)式的计算过程, 但仍需通过求解优化模型(2.1)~(2.3)来获取每个准则的权重上界和下界, 这无疑是限制了该方法的推广应用。那么, 能否进一步“绕过”求解优化模型这一复杂过程, 而较为准确地估计出每个准则的权重区间的中心点呢?

为此, 需要分析模型(2.1)产生多解的原因。回顾本文命题 1 可知, 模型(2.1)之所以产生多解是因为

最初在进行准则比较时产生了一致现象, 即: $a_{Bj} \times a_{jW} \neq a_{BW}$ 。反之, 如果准则之间的比较是完全一致的, 那么, 就可以利用比较向量 $A_W = \{a_{1W}, a_{2W}, \dots, a_{nW}\}$ 直接计算出各准则的权重

$$w_j = \frac{a_{jW}}{\sum a_{jW}}. \quad (3.13)$$

基于此, 现在思考: 是否可以通过某种变换, 将所有不一致的比较转化为“形式上一致”的比较, 从而利用(3.13)式的方法直接算出各个准则的权重。简言之, 就是当出现 $a_{Bj} \times a_{jW} \neq a_{BW}$ 时, 将 a_{Bj} 和 a_{jW} 分别转化为 b_{Bj} 和 b_{jW} , 使得

$$b_{Bj} \times b_{jW} = a_{BW}, \quad (3.14)$$

进而利用下式计算各准则的权重

$$w_j = \frac{b_{jW}}{\sum b_{jW}}. \quad (3.15)$$

那么, 如何设计变换, 将 a_{Bj} 和 a_{jW} 分别转化为 b_{Bj} 和 b_{jW} 使得(3.14)式成立呢? 下面对此展开探讨, 首先, 给出以下定义(相关记号的含义与前文相同)。

定义 2. 设对于准则 C_j , 有 $a_{Bj} \times a_{jW} = M$, 则称“ M ”为准则 C_j 的“一致性尺度”。

定义 3. 设对于准则 C_j , 有 $a_{Bj} \times a_{jW} = M (\neq a_{BW})$, $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$, R 为实数集。如果存在映射 $\varphi: \Omega \times \Omega \rightarrow R$ 和 $\psi: \Omega \times \Omega \rightarrow R$ 使得 $b_{Bj} = \varphi(a_{Bj}, a_{jW})$, $b_{jW} = \psi(a_{Bj}, a_{jW})$ 且 $b_{Bj} \times b_{jW} = a_{BW}$, 则称 φ 和 ψ 为准则 C_j 的“一致性尺度变换”。

例 2. 假设 $a_{Bj} = a_{jW} = 3$, $a_{BW} = 8$, 因为 $a_{Bj} \times a_{jW} = 9$, 所以准则 C_j 的一致性尺度为 $M = 9$; 由于 $a_{Bj} \times a_{jW} \neq a_{BW}$, 所以与准则 C_j 有关的比较并不具有一致性。为了将该比较“打造”成的具有一致性, 需要将一致性尺度“9”缩小为“8”, 与此同时, a_{Bj} 和 a_{jW} 也应随之分别变换为 b_{Bj} 和 b_{jW} , 并使其满足 $b_{Bj} \times b_{jW} = 8 = a_{BW}$ 。此时的一致性尺度变换可选为: $\varphi(a_{Bj}, a_{jW}) = r \times a_{Bj}$, $\psi(a_{Bj}, a_{jW}) = r \times a_{jW}$, 其中 $r = \frac{\sqrt{8}}{3}$ 。

(1) 一致性尺度变换 I

受例 2 的启发, 考虑让 a_{Bj} 和 a_{jW} 乘以同一个比例系数 r , 使得 $(a_{Bj} \cdot r)(a_{jW} \cdot r) = a_{BW}$, 从该式求解出“ r ”可得

$$r = \sqrt{\frac{a_{BW}}{a_{Bj} \cdot a_{jW}}}, \quad (3.16)$$

从而

$$b_{Bj} = a_{Bj} \cdot r = \sqrt{\frac{a_{Bj} \cdot a_{BW}}{a_{jW}}}, \quad (3.17)$$

且

$$b_{jW} = a_{jW} \cdot r = \sqrt{\frac{a_{BW} \cdot a_{jW}}{a_{Bj}}}. \quad (3.18)$$

下面以例 1 为例说明上述一致性尺度变换的有效性。在例 1 中, $a_{BW} = 8$, 显然, 舒适度(C_3)与安全性(C_4)两个属性的成对比较存在不一致, 因此, 将这两个各个准则的相关比较 a_{B3} , a_{3W} 与 a_{B4} , a_{4W} 按(3.17)式和(3.18)式分别进行调整, 修正后的结果为:

$$b_{jW} = (4, 8, 2.8284, 2.3094, 1), \quad (3.19)$$

再利用(3.15)式可得

$$w^* = (0.2205, 0.4411, 0.1559, 0.1273, 0.0551). \quad (3.20)$$

现在回顾例 1 的(3.11)式, 利用与[1]中的区间分析法和完全相同的数据, 得到的各准则的权重区间的中心向量为

$$w^C = (0.2024, 0.4609, 0.1536, 0.1345, 0.0512). \quad (3.21)$$

对比 w^* 与 w^C 可知, 二者的总偏差为 0.0513, 最大偏差为 0.0198, 平均偏差为 0.01026。从定量角度看, 两种方法的结果平均相差约 1%, 最大偏差不超过 2%; 从定性角度看, 两种方法得到的结论都是: $C_2 \succ C_1 \succ C_3 \succ C_4 \succ C_5$ 。综上, 用“一致性尺度变换 I”得到的排序对最终结果没有影响。

(2) 一致性尺度变换 II

在“一致性变换 I”中, a_{Bj} 和 a_{jW} 是按相同的比例 r 进行缩放的, 下面考虑 a_{Bj} 和 a_{jW} 分别按比例 r_1 和 r_2 进行缩放($r_1 \neq r_2$), 此时, 只需寻找 r_1 和 r_2 使得

$$\begin{cases} (a_{Bj} \cdot r_2)(a_{jW} \cdot r_1) = a_{BW}, \\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_{jW}}{a_{Bj}}. \end{cases} \quad (3.22)$$

由此解得

$$b_{jW} = a_{jW} \cdot r_2 = \frac{\sqrt{a_{BW}}}{a_{Bj}}. \quad (3.23)$$

(3) 一致性尺度变换 III

在(3.22)式中, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_{jW}}{a_{Bj}}$ 表示缩放的比例系数 r_1 和 r_2 与 a_{Bj} 和 a_{jW} 的大小成比例。另一种思路与一致性尺度变换 II 相反, 对于成对比较数值较大的给予较小幅度的调整; 对于成对比较数值较小的给予较大幅度的调整。据此, 对(3.22)修正如下

$$\begin{cases} (a_{Bj} \cdot r_1)(a_{jW} \cdot r_2) = a_{BW}, \\ \frac{\ln r_1}{\ln r_2} = \frac{a_{jW}}{a_{Bj}}. \end{cases} \quad (3.24)$$

求解(3.24)可得

$$b_{jW} = a_{jW} \cdot r_2 = a_{jW} \left(\frac{a_{BW}}{a_{Bj} \cdot a_{jW}} \right)^{\frac{a_{Bj}}{a_{Bj} + a_{jW}}}. \quad (3.25)$$

(4) 一致性尺度变换 IV

如果对 a_{Bj} 和 a_{jW} 的“绝对大小”进行相等幅度的调整, 则可得到以下一致性尺度变换

$$\begin{cases} |b_{Bj} - a_{Bj}| = |b_{jW} - a_{jW}|, \\ b_{Bj} \cdot b_{jW} = a_{BW}. \end{cases} \quad (3.26)$$

联立(3.26)式中两式可得

$$b_{jW} \left[b_{jW} + (a_{Bj} - a_{jW}) \right] = a_{BW} \cdot \tag{3.27}$$

求解(3.27)式对应的方程可得 b_{jW} 。

(5) 一致性尺度变换 V

如果对 a_{Bj} 与 a_{jW} 差的“相对大小”进行相等幅度的调整，则可得到以下一致性尺度变换

$$\begin{cases} \frac{|b_{Bj} - b_{jW}|}{b_{Bj} \cdot b_{jW}} = \frac{|a_{Bj} - a_{jW}|}{a_{Bj} \cdot a_{jW}}, \\ b_{Bj} \cdot b_{jW} = a_{BW} \cdot \end{cases} \tag{3.28}$$

联立(3.28)式中的两式可得

$$b_{jW} \left[b_{jW} + (a_{Bj} - a_{jW}) \frac{a_{BW}}{a_{Bj} \cdot a_{jW}} \right] = a_{BW} \cdot \tag{3.29}$$

求解(3.29)式对应的方程可得 b_{jW} 。

(6) 一致性尺度变换 VI

受“几何平均算子”的计算方式的启发，下面考虑将 a_{Bj} 和 a_{jW} 按指数 r 进行缩放，具体算法如下：

$$a_{Bj}^r \cdot a_{jW}^r = a_{BW} \cdot \tag{3.30}$$

求解(3.30)式可得

$$b_{jW} = a_{jW}^r = a_{jW}^{\frac{\ln a_{BW}}{\ln a_{Bj} + \ln a_{jW}}} \cdot \tag{3.31}$$

以上给出了六种一致性尺度变换，哪一种相对更优呢？下面结合例 1，将各一致性尺度变换的结果与通过模型(2.1)得到的权重区间的中心点进行对比分析。将 $BO = (2, 1, 4, 3, 8)$ 和 $OW = (4, 8, 4, 2, 1)$ 依次代入(3.22)~(3.31)式，其结果如表 1 所示。

Table 1. Deviation analysis of different consistency scale transformations (1)
表 1. 不同一致性尺度变换的偏差分析(1)

方法	权重值	总偏差	平均偏差
一致性尺度变换 I	(0.2205, 0.4411, 0.1559, 0.1273, 0.0551)	0.0514	0.0103
一致性尺度变换 II	(0.2264, 0.4528, 0.1132, 0.1509, 0.0566)	0.0943	0.0189
一致性尺度变换 III	(0.2197, 0.4394, 0.1554, 0.1306, 0.0549)	0.0482	0.0096
一致性尺度变换 IV	(0.2198, 0.4395, 0.1554, 0.1303, 0.0549)	0.0484	0.0097
一致性尺度变换 V	(0.2214, 0.4428, 0.1565, 0.1239, 0.0553)	0.0548	0.011
一致性尺度变换 VI	(0.2211, 0.4429, 0.1566, 0.1238, 0.0554)	0.0549	0.011
区间分析法	(0.2024, 0.4609, 0.1536, 0.1345, 0.0521)	0	0

由表 1 可知，上述六种一致性尺度变换的平均偏离差均在 1%左右，其中方法三与方法四稍优，但差异极小。因此，用上述一致性尺度变换的方法估计权重区间的中心点，不仅具有较好的准确性，还能有效地规避求解非线性优化模型(2.1)。

此外，本文还发现，上述一致性尺度变换的方法除了可以用于近似估计权重区间的中心，在精度要求不高时，亦可以直接用来估计准则权重。下面以[6]中的一个例子说明。

例 3. 设有三个准则: C_1, C_2, C_3 。最优准则为 C_3 , 最劣准则为 C_1 , C_3 与各准则比较的结果(BO)以及各准则与 C_1 比较的结果(OW)分别为:

$$BO = (8, 2, 1), OW = (1, 5, 8). \quad (3.32)$$

显然, 本例存在比较“不一致”问题, 但由于仅包含三个准则, 因此模型(2.1)存在唯一解, 将(3.32)式中的数值分别代入(3.22)~(3.31)式, 其结果如表 2 所示。

Table 2. Deviation analysis of different consistency scale transformations (2)

表 2. 不同一致性尺度变换的偏差分析(2)

方法	权重值	总偏差	平均偏差
一致性尺度变换 I	(0.0742, 0.3320, 0.5938)	0.0135	0.0027
一致性尺度变换 II	(0.0769, 0.3077, 0.6154)	0.0620	0.0124
一致性尺度变换 III	(0.0730, 0.3426, 0.5843)	0.0112	0.0022
一致性尺度变换 IV	(0.0730, 0.3431, 0.5839)	0.012	0.0024
一致性尺度变换 V	(0.0753, 0.3219, 0.6028)	0.0336	0.0067
一致性尺度变换 VI	(0.0753, 0.3222, 0.6025)	0.0336	0.0066
区间分析法	(0.0714, 0.3387, 0.5899)	0	0

可以看到“一致性尺度变换 III 和 IV”仍然具有相对较好的效果, 这里利用“一致性尺度变换 III”求得的 $\xi^* = 0.3088$, 由此算得“一致性尺度变换 III”的一致性比率为 $0.3088/4.47 = 0.069$, 与最优一致率 0.058 相比, 相差甚小并且同样小于 0.1, 这也意味着使用“一致性尺度变换 III”来直接估计权重具有较好地可行性。

注 2. 当精度要求不高时, 通过“一致性尺度变换”估计权重可大幅度减少计算量。需要注意的是, 在含有多个指标层的决策问题中, 一致性尺度变换法产生的偏差会逐层累积。设第一层指标为 $\{C_1, C_2, \dots, C_{N_1}\}$, C_i 下的第二层指标为 $\{C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{iN_i}\}$, 以下各层指标记号以此类推。假设利用一致性尺度变换计算指标 C_2 的权重为 w_2 , 偏差为 ξ_2 ; 计算指标 C_{25} 的权重为 w_{25} , 偏差为 ξ_{25} 。那么, C_{25} 的权重的累计偏差为

$$(w_2 + \xi_2)(w_{25} + \xi_{25}) - w_2 \cdot w_{25} = w_2 \xi_{25} + w_{25} \xi_2 + \xi_2 \xi_{25}, \quad (3.33)$$

因为 $\xi_2 \xi_{25}$ 是 ξ_2 和 ξ_{25} 高阶无穷小, 因此,

$$\begin{aligned} & (w_2 + \xi_2)(w_{25} + \xi_{25}) - w_2 \cdot w_{25} \\ & \approx w_2 \xi_{25} + w_{25} \xi_2 \\ & \geq \xi = \max(w_2 \xi_{25}, w_{25} \xi_2), \end{aligned}$$

由此可见偏差的叠加效应。以此类推, 第三层与第四层的最大偏差可类似分析。当面对的指标层层数过多时, 可先在上层用原始优化模型计算, 仅在最后一层或几层使用一致性尺度变换的估算方法, 以减少最终偏差。

需要注意的是, 估算方法与传统 BWM 求解过程的本质有所不同: 估算方法将不一致比较转换为一致比较, 并在此基础上计算权重; 而 BWM 求解过程则是调整所有选项权重, 使权重间的比值 w_i/w_j 尽可能接近决策者给出的原比较值 a_{ij} 。

4. 一致性尺度变换法在电网关键物资选取中的实际应用

本节主要关注国家电网企业物资采购过程中现存的一个实际问题：关键物资选取。近年来，随着国家电网有限公司逐渐实行物资集中采购的管理模式，很多物资的实际采购价格与中标价格差距出现较大偏差，其主要原因在于：外部经济环境变化无常，各种电网物资的原材料价格在一定的范围内常有较大波动，而电网关键设备的申报、融资、招标需要经历较长的时间，招标时间相对于申报时间有较长的时间滞后，致使申报价格与招标执行价格经常出现较大的偏差，产生了不必要的融资高额利息，提高了设备的采购成本，且对电网的维护成本预算具有较大影响。反之，如果在采购过程中，物资价格被压得过低，则无法保证供应商在物资交付时的质量，轻则降低电力设施使用寿命，重则增大安全事故隐患。因此，针对电网物资的“价格预测”研究日益成为近些年的研究热点，详见[8]-[15]。

Table 3. Characteristic data of some supplies
表 3. 部分物资特征数据

物资唯一码	需求数量	概算价格(元)	中标单价(元)	概中差	标准物料	产权属性	项目类型	工程性质	建设性质	资金属性
2305E03146	120	7500.00	6975.00	525.00	2	国网	技改项目	其他	改造	资本性
2308A03747	1800.00	124.74	125.03	0.29	1	国网	基建项目	线路	新建	资本性
2308C04279	1.00	113800.00	124300.00	10500.00	2	省网	基建项目	变电	新建	资本性
2308C04318	1.00	129150.00	146900.00	17750.00	2	国网	基建项目	变电	改造	资本性
2308C04453	1.00	183723.80	242950.00	59226.20	2	国网	基建项目	变电	新建	资本性
2308H04292	150.00	128	125.03	2.97	1	省网	基建项目	变电	增容	资本性
2308M04004	1.00	20000.00	14650.00	5350.00	1	国网	基建项目	变电	扩建	资本性
2311A03990	420.00	98.51	125.03	26.52	1	国网	大修项目	其他	修理	成本性
2311A03991	1330.00	440	409.69	30.31	1	国网	大修项目	其他	修理	成本性
2311A03992	700.00	440	409.69	30.31	1	国网	大修项目	其他	修理	成本性
2311A03995	15.00	7000.00	6969.84	30.16	2	国网	大修项目	其他	修理	成本性
2311A04026	15.00	6000.00	5969.79	30.21	2	国网	大修项目	其他	修理	成本性
2311A04114	2.00	5000.00	4660.00	340.00	2	国网	大修项目	其他	修理	成本性
2311B01226	0.45	657660.00	621582.02	36077.98	1	国网	基建项目	变电	新建	资本性
2311B01227	0.35	111870.00	152754.37	40884.37	1	国网	基建项目	变电	新建	资本性
2311B01228	0.57	15820.00	22369.84	6549.84	1	国网	基建项目	变电	新建	资本性
2311B02836	2200.00	6	5.9	0.10	2	国网	基建项目	其他	新建	资本性
2311C07528	1.00	385000.00	352560.00	32440.00	2	国网	技改项目	其他	改造	资本性
2311D01835	1.00	37197.65	36825.89	371.76	1	国网	技改项目	其他	改造	资本性

然而，目前国家电网采购部门每年需要采购的物资种类有上千种，针对每种物资建立价格预测模型并不现实。事实上，针对其中的关键物资进行价格预测更具现实意义。那么，如何在众多物资中筛选出“关键物资”呢？下面以江苏省电网公司 2024 年第一季度和第二季度的采购数据为例说明本文提出的“一致性尺度变换法”在关键物资选取中的应用。这两个季度该企业共采购物资 4000 余种，限于篇幅，表 3 选取其中的 20 种物资进行分析，同理可分析更多物资。注意到“关键物资选取”本质上是一个多属性评价问题，接下来，依次采取以下步骤：

第一步：确定关键物资的评价指标

经过与电网企业采购部门研讨，此处选择以下 10 个评价指标：C₁：需求数量；C₂：概算单价；C₃：

中标单价； C_4 ：概算价格与中标单价差值； C_5 ：标准物料； C_6 ：产权属性； C_7 ：项目类型； C_8 ：工程性质； C_9 ：建设性质； C_{10} ：资金属性。其中，概算价格与中标单价差值简称为“概中差”。

第二步：确定最优指标和最劣指标，并进行成对比较

通过业内调研，这里确定的最优指标为“概算价格与中标价格差值(C_4)”，最劣指标为“产权属性(C_6)”。最优指标与其他指标的比较向量和各指标与最劣指标的比较向量分别为

$$\begin{aligned} BO &= (3, 4, 4, 1, 5, 9, 6, 7, 8, 8), \\ OW &= (5, 6, 6, 9, 4, 1, 3, 4, 3, 2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

第三步：确定各指标的权重

由比较向量 $BO = (3, 4, 4, 1, 5, 9, 6, 7, 8, 8)$ 和 $OW = (5, 6, 6, 9, 4, 1, 3, 4, 3, 2)$ 可知，该比较存在明显的不一致性，例如： $a_{B3} = 4$ ， $a_{3W} = 6$ ，而 $a_{B3} \times a_{3W} = 24 \neq a_{BW}$ 。因此，模型(2.1)可能存在多解。下面以本文提出的“一致性尺度变换 III”为例，用其直接估计出各准则的权重，可得

$$w^* = (0.1316, 0.1292, 0.1292, 0.2869, 0.0818, 0.0319, 0.0603, 0.0619, 0.0469, 0.0402)$$

第四步：数据标准化

由于准则 C_6 至 C_{10} 均是语言性评价，因此，首先将其进行量化处理，对于“产权属性(C_6)”，设置“国网”为 2 分，“省网”为 1 分；对于“项目类型(C_7)”，设置“技改项目”为 1 分，“基建项目”为 2 分，“大修项目”为 3 分；对于“工程性质(C_8)”，设置“变电”为 3 分，“线路”为 2 分，“其他”为 1 分；对于“建设性质(C_9)”，设置“改造”为 1 分，“新建”为 2 分，“修理”为 3 分，“增容”为 4 分，“扩建”为 5 分；对于“资金属性(C_{10})”，设置“成本性”为 1 分，“资本性”为 2 分。然后利用“线性比例变化”法对表 3 中数据进行标准化，得到

$$\begin{pmatrix} 0.0544 & 0.0114 & 0.0112 & 0.0089 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.8182 & 0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 1 \\ 0.0003 & 0.173 & 0.2 & 0.1773 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 0.0003 & 0.1964 & 0.2363 & 0.2997 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & 1 \\ 0.0003 & 0.2794 & 0.3909 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 0.068 & 0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.75 & 1 \\ 0.0003 & 0.0304 & 0.0236 & 0.0903 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0.1908 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0004 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6045 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0005 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.3181 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0005 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.0067 & 0.0106 & 0.0112 & 0.0005 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.0067 & 0.0091 & 0.0096 & 0.0005 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.0008 & 0.0076 & 0.0075 & 0.0057 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0.6092 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 0 & 0.1701 & 0.2457 & 0.6903 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 0.0001 & 0.024 & 0.036 & 0.1106 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0.25 & 1 \\ 0.0003 & 0.5854 & 0.5672 & 0.5477 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0003 & 0.0566 & 0.0592 & 0.0063 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0008 & 0.1297 & 0.131 & 0.0648 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最后，利用准则权重对标准化后的矩阵进行线性加权求和，可得 20 中物资的得分分别为：

$$V(2305E03146) = 0.1666, \quad V(2308A03747) = 0.2537;$$

$$V(2308C04279) = 0.3250, \quad V(2308C04318) = 0.3880;$$

$$V(2308C04453) = 0.6313, \quad V(2308H04292) = 0.1765;$$

$$\begin{aligned}
V(2308M04004) &= 0.2440, & V(2311A03990) &= 0.1409; \\
V(2311A03991) &= 0.1954, & V(2311A03995) &= 0.1577; \\
V(2311A04026) &= 0.2012, & V(2311A04114) &= 0.2008; \\
V(2311B01226) &= 0.2011, & V(2311B01227) &= 0.6091; \\
V(2311B01228) &= 0.4277, & V(2311B02836) &= 0.2154; \\
V(2311C07528) &= 0.3274, & V(2311D01835) &= 0.4601; \\
V(2311A03992) &= 0.0889, & V(2311E01501) &= 0.2063.
\end{aligned}$$

若选取得分排名前三的物资作为关键物资, 则关键物资为: 2308C04453, 2311B01227, 2311C01835。

注 3. 本算例采取的权重估计方法为“一致性尺度变换 III”, 事实上, 也可采用其他一致性尺度变换法。另外, 由于本算例需要计算各物资的得分, 因此, 需要借助相关指标的权重值。如果仅需了解各指标的排序, 则可在估计出权重区间中心值之后, 再利用 **0-1** 矩阵(1.5)和(1.6)式即可获得最终排序。

5. 结语

本文针对非线性 **BWM** 的多解问题, 改进了传统的区间分析法, 通过比较权重区间的中心值规避了区间优先度的复杂计算过程。此外, 基于“尺度变换”的思想, 给出了几类权重中心的估计方法, 从而绕过了求解非线性 **BWM** 的复杂过程, 而且偏差仅在 1% 左右。由于本文所给出的方法不要求决策者掌握过多的最优化理论, 因此, 具有广阔的推广价值。最后, 将一致性尺度变换法成功应用于电网企业的关键物资选取问题, 这也充分体现了本文所建立的方法的有效性和便捷性。同时, 需要指出的是: 除本文所建立的几类一致性尺度变换之外, 是否还有其它更好的一致性尺度变换, 以及一致性尺度变换在其他领域的应用等, 都值得后期深入探索。

基金项目

江苏省青蓝工程, 国家社科基金项目(项目号: 24BH178)。

参考文献

- [1] Saaty, T.L. (1977) A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures. *Journal of Mathematical Psychology*, **15**, 234-281. [https://doi.org/10.1016/0022-2496\(77\)90033-5](https://doi.org/10.1016/0022-2496(77)90033-5)
- [2] Arora, A., Jain, J., Gupta, S. and Sharma, A. (2020) Identifying Sustainability Drivers in Higher Education through Fuzzy Ahp. *Higher Education, Skills and Work-Based Learning*, **11**, 823-836. <https://doi.org/10.1108/heswbl-03-2020-0051>
- [3] Darzi, M.A. (2024) Overcoming Barriers to Integrated Management Systems via Developing Guiding Principles Using G-AHP and F-TOPSIS. *Expert Systems with Applications*, **239**, Article ID: 122305. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.122305>
- [4] Daimi, S. and Rebai, S. (2023) Sustainability Performance Assessment of Tunisian Public Transport Companies: AHP and ANP Approaches. *Socio-Economic Planning Sciences*, **89**, Article ID: 101680. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2023.101680>
- [5] Hassanzadeh, M.R. and Valmohammadi, C. (2021) Evaluation and Ranking of the Banks and Financial Institutes Using Fuzzy AHP and TOPSIS Techniques. *International Journal of Operational Research*, **40**, 297-317. <https://doi.org/10.1504/ijor.2021.114301>
- [6] Rezaei, J. (2015) Best-Worst Multi-Criteria Decision-Making Method. *Omega*, **53**, 49-57. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2014.11.009>
- [7] Rezaei, J. (2016) Best-Worst Multi-Criteria Decision-Making Method: Some Properties and a Linear Model. *Omega*, **64**, 126-130. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.12.001>
- [8] 黄龙山. 基于 SVM 的电网物资价格预测模型研究[J]. 中国新技术新产品, 2023(17): 142-145.

-
- [9] 程晓晓, 蒲兵舰, 张国平, 等. 基于集成学习的物资采购价格辅助决策方法[J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2022, 40(5): 875-883.
 - [10] 吴天宇. 铁塔企业物资采购价格预测研究[J]. 中小企业管理与科技, 2022(17): 70-72.
 - [11] 刘达, 刘雨萌, 许晓敏. 基于 Copula 函数特征筛选的电力物资供应商投标价格预测[J]. 技术经济, 2021, 40(10): 1-9.
 - [12] 刘欢, 刘苗, 司徒雪颖. 国家电网公司物资招标采购价格统计分析研究[J]. 统计与管理, 2019(6): 87-89.
 - [13] 靳占新, 徐中一. 大数据背景下物资价格预测方法[J]. 中国电力企业管理, 2018(36): 44-45.
 - [14] 柴利达, 薛沁文, 毛娜, 等. 基于大数据的物资价格预测方法探索[J]. 电力大数据, 2017, 20(12): 13-20.
 - [15] 邹筱, 徐俊. 基于不可预测策略的物资采购价格管控模式分析[J]. 现代商贸工业, 2017(18): 25-27.