

带有恐惧的捕食者染病的捕食系统的动力学研究

高 颖*, 张 蒙

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2025年2月25日; 录用日期: 2025年3月18日; 发布日期: 2025年3月28日

摘 要

最近对于脊椎动物的野外实验表明, 仅是捕食者的存在就会引起猎物种群数量的巨大变化。猎物因捕食者存在而产生的恐惧会影响到猎物自身的繁殖。基于实验结果, 我们提出了一个考虑恐惧效应和捕食者染病的捕食模型。本文我们提出了一个三物种的食物链模型, 由于捕食者物种内有传染病, 所以将捕食者分为染病捕食者和易感捕食者, 且传染病会削弱捕食者的捕食能力。我们研究了平衡点的所有性质, 建立了模型局部稳定的条件。利用李雅普诺夫函数来研究平衡点的全局稳定性, 并研究了局部分岔分析。

关键词

恐惧, 传染病, 稳定, 分岔

Dynamics Research of Predator-Prey System with Fear and Disease in Predators

Ying Gao*, Meng Zhang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Feb. 25th, 2025; accepted: Mar. 18th, 2025; published: Mar. 28th, 2025

Abstract

Recent field experiments on vertebrates have shown that merely the presence of predators can cause significant changes in the population size of prey. The fear of predators in prey can affect their own reproduction. Based on the experimental results, we proposed a predator-prey model considering the fear effect and the disease of predators. In this paper, we present a three-species food chain model. Since there is an infectious disease within the predator species, the predators are

*通讯作者。

divided into infected predators and susceptible predators, and the disease weakens the predation ability of the predators. We studied all the properties of the equilibrium points and established the conditions for local stability of the model. The global stability of the equilibrium points was studied using the Lyapunov function, and the local bifurcation analysis was also conducted.

Keywords

Fear, Infectious Disease, Stability, Bifurcation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

生物数学模型作为一种重要的研究方式, 在描述生态现象、解决生态问题、揭示物种发展规律方面发挥了巨大的作用。它不仅是生物数学研究的基础, 还是解决实际生态问题的有力手段, 因此越来越受到人们的重视。捕食与被捕食系统是生物数学最重要的组成部分之一, 每年都有大量的文献来研究它[1]-[4]。此外, 自从 1927 年 Kermack 与 McKendrick 首次提出了著名的 SIR 仓室模型之后, 人们对传染病模型的研究也越来越重视, 目前研究流行病模型的文献已经有很多了[5]-[9]。

虽然研究捕食模型和传染病模型的文献很多, 但大部分都是独立研究的, 只是研究单个种群中疾病的传播。但在自然界中, 每个种群并非是独立存在的, 它与其他种群都存在捕食或竞争的关系, 因此我们有必要考虑将二者结合起来研究, 在传染病模型上考虑捕食关系的影响, 或是在捕食模型上考虑疾病的影响。这样建立起来的模型更贴近实际, 能更有效解决实际生态问题, 同时也开辟了一个新的研究方向。至此, 很多专家学者开始对这一方向进行了研究。在将种群动力学和流行病动力学结合研究的过程中, 很多学者观察到了一个容易被忽略的现象: 在野外很容易可以观察到捕食者直接杀死猎物的过程, 这种捕食机制会造成猎物种群规模的减少; 但是当猎物居住在有捕食者存在的环境里时, 猎物因捕食者存在而产生的恐惧也会对其种群规模产生一定的影响。

本文就是在这样的背景下提出了一个三物种的食物链模型, 由于捕食者种群内有传染病, 所以将捕食者分为染病捕食者和易感捕食者, 且传染病会削弱捕食者的捕食能力。其中猎物的恐惧是因捕食者的存在而产生的, 和捕食者的捕食能力大小无关。借助之前所学的知识[10][11], 我们研究了平衡点的所有性质, 建立了模型局部稳定的条件。Lyapunov 函数用于研究平衡点的全局稳定性, 进行了局部分岔分析。

2. 模型建立

本文在文献[1]的基础上, 假设疾病只在捕食者种群内传播, 以 $S(t) = S$ 表示猎物在 t 时刻的种群规模, $I(t) = I$ 表示染病捕食者在 t 时刻的种群规模, $P(t) = P$ 表示易感捕食者在 t 时刻的种群规模, 建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = S \left[\frac{r}{1+k(P+I)} - bS - a(1-m)I - aP - d_1 \right] = Sf_1(S, I, P) \\ \frac{dI}{dt} = I [\alpha a(1-m)S + \beta P - d_2] = If_2(S, I, P) \\ \frac{dP}{dt} = P [\alpha aS - \beta I - d_3] = Pf_3(S, I, P) \end{cases} \quad (1)$$

r 为猎物的内禀增长率, k 为猎物对捕食者的恐惧率, b 为猎物的种内竞争系数, β 为捕食者的种内竞争系数, a 为捕食系数, m 为疾病对捕食者捕食能力的削弱系数, α 为转化系数, d_1 为猎物的自然死亡率, d_2 为染病捕食者的死亡率, 包括因病死亡和自然死亡, d_3 为易感捕食者的自然死亡率, 且所有参数都是正的。

此外, 系统(1)右侧的函数 $f_i, i=1,2,3$ 是连续的, 并在以下空间中有连续的偏导数

$$R_+^3 = \{(S, I, P) \in R^3 : S(0) > 0, I(0) > 0, P(0) > 0\}$$

因此, 系统(1)的解存在且唯一。

2.1. 解的正性

从生物学实际意义来考虑, 系统(1)在 R_+^3 中都有以下正初始值: $S(0) > 0, I(0) > 0, P(0) > 0$ 。

通过

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t [f_1(S(h), I(h), P(h))] dh} > 0$$

$$I(t) = I(0)e^{\int_0^t [f_2(S(h), I(h), P(h))] dh} > 0$$

$$P(t) = P(0)e^{\int_0^t [f_3(S(h), I(h), P(h))] dh} > 0$$

可证明系统的解是正的。

2.2. 解的有界性

定理 1 系统(1)的满足初始条件 $(S(0), I(0), P(0))$ 的正解有界。

证明: 设 $(S(t), I(t), P(t))$ 为任意的满足初始条件的正解, 其中 $S(0) > 0, I(0) > 0, P(0) > 0$ 。

因为 $\frac{dS}{dt} \leq S(r - bS)$ 。

所以由比较定理可得: $\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{r}{b}$ 。

令 $W(t) = S(t) + I(t) + P(t)$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dP}{dt} \\ &= S \left[\frac{r}{1+k(P+\sigma I)} - bS - a(1-m)I - aP - d_1 \right] \\ &\quad + I [\alpha a(1-m)S + \beta P - d_2] + P [\alpha aS - \beta I - d_3] \\ &\leq rS - d_1S - d_2I - d_3P - bS^2 \\ &\leq rS - MW \end{aligned}$$

(其中 $M = \min\{d_1, d_2, d_3\}$)

由比较定理可得: $\limsup_{t \rightarrow +\infty} W(t) \leq \frac{r^2}{Mb}$ 。

所以在区域 $B = \{(S, I, P) \in R_+^3, W \leq \frac{r^2}{Mb} + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\}$ 中解是有界的。

3. 平衡点的存在性及稳定性分析

3.1. 平衡点的存在性

通过解方程组

$$\begin{cases} S \left[\frac{r}{1+k(P+I)} - bS - a(1-m)I - aP - d_1 \right] = 0 \\ I [\alpha a(1-m)S + \beta P - d_2] = 0 \\ P [\alpha aS - \beta I - d_3] = 0 \end{cases} \quad \text{可得系统(1.1)有以下非负平衡点:}$$

1) $E_0(0,0,0)$ 总是存在。

2) $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right)$ 总是存在(显然猎物的出生率 > 死亡率)。

3) 无病平衡点 $E_2(\bar{S}, 0, \bar{P})$ 。

$$\text{解方程组} \begin{cases} S \left(\frac{r}{1+kP} - bS - aP - d_1 \right) = 0 \\ P(\alpha aS - d_3) = 0 \end{cases}。$$

由第二个式子可以得出 $\bar{S} = \frac{d_3}{\alpha a}$, 将其代入第一个式子中可得:

$$kaP^2 + \left(kd_1 + \frac{kbd_3}{\alpha a} + a \right) P + d_1 + \frac{bd_3}{\alpha a} - r = 0 \quad (1 \text{ 式})$$

$\bar{P}$ 表示(1 式)的正根,

$$\text{当(1 式)满足} \begin{cases} \Delta = \left(kd_1 + \frac{kbd_3}{\alpha a} + a \right)^2 - 4ka \left(d_1 + \frac{bd_3}{\alpha a} - r \right) > 0 \\ P_1 P_2 = \frac{d_1 + \frac{bd_3}{\alpha a} - r}{ka} < 0 \end{cases} \quad \text{即 } d_1 + \frac{bd_3}{\alpha a} - r < 0 \quad (1a)$$

时, 该方程有唯一正根, 即有唯一无病平衡点。

当 $d_1 + \frac{bd_3}{\alpha a} - r = 0$ 时, 方程无正根; 当 $d_1 + \frac{bd_3}{\alpha a} - r > 0$ 时, 方程有两个正根或两个负根, 不满足唯一性。

4) 平衡点 $E_3(\bar{\bar{S}}, \bar{\bar{I}}, 0)$ 。

同理得: 当 $\frac{bd_2}{\alpha a(1-m)} + d_1 - r < 0$ 时, 该方程有唯一正根, 即有唯一平衡点 E_3 ; 当

$$\frac{bd_2}{\alpha a(1-m)} + d_1 - r = 0 \quad (2a)$$

时, 方程无正根; 当 $\frac{bd_2}{\alpha a(1-m)} + d_1 - r > 0$ 时, 方程有两个正根或负根, 不满足唯一性。

5) 正平衡点 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 。

$$\begin{cases} S \left[\frac{r}{1+k(P+I)} - bS - a(1-m)I - aP - d_1 \right] = 0 \\ I [\alpha a(1-m)S + \beta P - d_2] = 0 \\ P(\alpha aS - \beta I - d_3) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由(3)式的最后两个方程可以得出: $I^* = \frac{\alpha aS^* - d_3}{\beta}$, $P^* = \frac{d_2 - \alpha a(1-m)S^*}{\beta}$, 且满足条件

$$\frac{d_3}{\alpha a} < S^* < \frac{d_2}{\alpha a(1-m)} \quad (3a)$$

将其代入第一个方程中可得: $A_1 S^2 + A_2 S + A_3 = 0$ (4)

其中 $A_1 = \beta^2 b m \alpha a > 0$, $A_2 = -\beta b(\beta + k d_2 - k d_3) - \beta m \alpha a [a(1-m)d_3 - a d_2 + \beta d_1]$,

$$A_3 = [a(1-m)d_3 - a d_2 + \beta d_1](\beta + k d_2 - k d_3) - \beta^2 r$$

由 $\Delta = A_2^2 - 4A_1A_3 > 0$ 可知方程存在两个解。

$$\text{由 } S_1 S_2 = \frac{A_3}{A_1} \text{ 可知: 当 } A_3 < 0 \text{ 时, 即 } [a(1-m)d_3 - a d_2 + \beta d_1](\beta + k d_2 - k d_3) - \beta^2 r < 0 \quad (3b)$$

方程存在唯一正根; 当 $A_3 = 0$ 时, 方程无正根; 当 $A_3 > 0$ 时, 方程有两个正根或两个负根, 不满足唯一性。

综上所述, 在同时满足条件(3a) (3b)的情况下, 存在唯一的正平衡点。

3.2. 局部稳定性分析

设 $E(S, I, P)$ 是系统(1)的任一个非负平衡点, 则系统(1)的 Jacobi 矩阵为:

$$J(E) = \begin{pmatrix} f_1 + S \frac{\partial f_1}{\partial S} & S \frac{\partial f_1}{\partial I} & S \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ I \frac{\partial f_2}{\partial S} & f_2 + I \frac{\partial f_2}{\partial I} & I \frac{\partial f_2}{\partial P} \\ P \frac{\partial f_3}{\partial S} & P \frac{\partial f_3}{\partial I} & f_3 + P \frac{\partial f_3}{\partial P} \end{pmatrix}$$

其中:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial S} &= -b, \frac{\partial f_1}{\partial I} = \frac{-kr}{[1+k(P+I)]^2} - a(1-m), \frac{\partial f_1}{\partial P} = \frac{-kr}{[1+k(P+I)]^2} - a, \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} &= \alpha a(1-m), \frac{\partial f_2}{\partial I} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial P} = \beta, \frac{\partial f_3}{\partial S} = \alpha a, \frac{\partial f_3}{\partial I} = -\beta, \frac{\partial f_3}{\partial P} = 0 \end{aligned}$$

$$1) \text{ 对于平衡点 } E_0(0, 0, 0), \text{ 它的 Jacobi 矩阵变为 } J(E_0) = \begin{pmatrix} r-d_1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 \end{pmatrix}.$$

它的特征方程为 $[\lambda - (r-d_1)](\lambda + d_2)(\lambda + d_3) = 0$, 很显然此特征方程对应的特征根为 $\lambda_{01} = r-d_1$, $\lambda_{02} = -d_2$, $\lambda_{03} = -d_3$, 因此 E_0 是一个不稳定的结点。

$$2) \text{ 对于平衡点 } E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right), \text{ 它的 Jacobi 矩阵变为}$$

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} d_1 - r & -\frac{(r-d_1)[kr+a(1-m)]}{b} & -\frac{(r-d_1)(kr+a)}{b} \\ 0 & \frac{\alpha a(1-m)(r-d_1)}{b} - d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha a(r-d_1)}{b} - d_3 \end{pmatrix}$$

它的特征方程为 $(\lambda + r - d_1) \left[\lambda - \frac{\alpha a(1-m)(r-d_1)}{b} + d_2 \right] \left[\lambda - \frac{\alpha a(r-d_1)}{b} + d_3 \right] = 0$, 对应的特征值为 $\lambda_{11} = d_1 - r$, $\lambda_{12} = \frac{\alpha a(1-m)(r-d_1)}{b} - d_2$, $\lambda_{13} = \frac{\alpha a(r-d_1)}{b} - d_3$, 因此, 当且仅当满足以下条件时, 平衡点 $E_1 \left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0 \right)$ 是局部渐近稳定的。

$$\frac{\alpha a(r-d_1)}{b} < \frac{d_2}{1-m} \quad (4a)$$

$$\frac{\alpha a(r-d_1)}{b} < d_3 \quad (4b)$$

3) **定理 2** 当满足以下条件(5a) (5b)时, $E_2 \left(\frac{d_3}{\alpha a}, 0, \bar{P} \right)$ 是局部渐近稳定的。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r}{1+k\bar{P}} - a\bar{P} - d_1 \right) < \frac{bd_3}{\alpha a} < r - d_1 \quad (5a)$$

$$(1-m)d_3 + \beta\bar{P} - d_2 < 0 \quad (5b)$$

证明 对于平衡点 $E_2 \left(\frac{d_3}{\alpha a}, 0, \bar{P} \right)$, 其 Jacobi 矩阵为

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{-2bd_3}{\alpha a} + \frac{r}{1+k\bar{P}} - a\bar{P} - d_1 & \frac{d_3}{\alpha a} \left[\frac{-kr}{(1+k\bar{P})^2} - a(1-m) \right] & \frac{d_3}{\alpha a} \left[\frac{-kr}{(1+k\bar{P})^2} - a \right] \\ 0 & (1-m)d_3 + \beta\bar{P} & 0 \\ \alpha a\bar{P} & -\beta\bar{P} & 0 \end{pmatrix}$$

其特征方程为: $[\lambda - (1-m)d_3 - \beta\bar{P} + d_2](\lambda^2 - T_1\lambda + D_1) = 0$

$$T_1 = \frac{r}{1+k\bar{P}} - \frac{2bd_3}{\alpha a} - a\bar{P} - d_1, D_1 = \bar{P}d_3 \left[\frac{kr}{(1+k\bar{P})^2} + a \right] > 0$$

其特征根为: $\lambda_{21} = (1-m)d_3 + \beta\bar{P} - d_2$, $\lambda_{22} = \frac{T_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{T_1^2 - 4D_1}$, $\lambda_{23} = \frac{T_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{T_1^2 - 4D_1}$ 。

可知当且仅当 $\lambda_{21} < 0, T_1 < 0$ 时, 平衡点 E_2 是局部渐近稳定的。

4) **定理 3** 当满足以下条件(6a) (6b)时, $E_3 \left(\frac{d_2}{\alpha a(1-m)}, \bar{I}, 0 \right)$ 是局部渐近稳定的。

$$\frac{1}{2} \left[\frac{r}{1+k\bar{I}} - a(1-m)\bar{I} \right] < \frac{bd_2}{\alpha a(1-m)} < r - d_1 \quad (6a)$$

$$\frac{d_2}{1-m} - \beta \bar{I} - d_3 < 0 \quad (6b)$$

证明 对于平衡点 $E_3\left(\frac{d_2}{\alpha a(1-m)}, \bar{I}, 0\right)$, 其 Jacobi 矩阵为

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} \frac{-2bd_2}{\alpha a(1-m)} + \frac{r}{1+k\bar{I}} - a(1-m)\bar{I} - d_1 & \frac{-krd_2}{\alpha a(1-m)(1+k\bar{I})^2} - \frac{d_2}{\alpha} & \frac{-krd_2}{\alpha a(1-m)(1+k\bar{I})^2} - \frac{d_2}{\alpha(1-m)} \\ \alpha a(1-m)\bar{I} & 0 & \beta \bar{I} \\ 0 & 0 & \frac{d_2}{1-m} - \beta \bar{I} - d_3 \end{pmatrix}$$

其特征方程为: $\left[\lambda - \left(\frac{d_2}{1-m} - \beta \bar{I} - d_3\right)\right](\lambda^2 - T_2\lambda + D_2) = 0$

$$T_2 = \frac{-2bd_2}{\alpha a(1-m)} + \frac{r}{1+k\bar{I}} - a(1-m)\bar{I} - d_1, D_2 = \alpha a(1-m)\bar{I} \left[\frac{krd_2}{\alpha a(1-m)(1+k\bar{I})^2} + \frac{d_2}{\alpha} \right] > 0$$

其特征根为: $\lambda_{31} = \frac{d_2}{1-m} - \beta \bar{I} - d_3, \lambda_{32} = \frac{T_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{T_2^2 - 4D_2}, \lambda_{33} = \frac{T_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{T_2^2 - 4D_2}$.

可知当且仅当 $\lambda_{31} < 0, T_2 < 0$ 时, 平衡点 E_2 是局部渐近稳定的。

5) **定理 4** 若 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 存在, 当 $\Delta_1 > 0$, 且 $\Delta_2 > 0$ 时, 正平衡点 E^* 局部渐近稳定。

证明 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -2bS^* + \frac{r}{1+k(P^*+I^*)} - a(1-m)I^* - aP^* - d_1 & S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right] & S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] \\ \alpha a(1-m)I^* & \alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2 & \beta I^* \\ \alpha aP^* & -\beta P^* & \alpha aS^* - \beta I - d_3 \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (A_1 + A_2 + A_3)\lambda + \left[A_1A_1 + A_2A_3 + A_1A_3 - \alpha a(1-m)I^*S^* \left(\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right) \right] \\ & + \alpha aP^*S^* \left(\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right) \lambda + S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right] (\alpha aS^* - \beta I^* - d_3) \\ & \times [\alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2] + a(1-m)\alpha \beta S^*I^*P^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] \\ & - \left[-2bS^* + \frac{r}{1+k(P^*+I^*)} - a(1-m)I^* - aP^* - d_1 \right] [\alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2] [\alpha aS^* - \beta I^* - d_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right] \beta I^* \\
& + S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] [\alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2] \alpha a P^* \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } A_1 = -2bS^* + \frac{r}{1+k(P^*+I^*)} - a(1-m)I^* - aP^* - d_1;$$

$$A_2 = \alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2;$$

$$A_3 = \alpha aS^* - \beta I^* - d_3.$$

$$\text{令 } M_1 = -(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$M_2 = A_1A_1 + A_2A_3 + A_1A_3 - \alpha a(1-m)I^*S^* \left(\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right) + \alpha aP^*S^* \left(\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right)$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right] (\alpha aS^* - \beta I^* - d_3) [\alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2] \\
& + a(1-m)\alpha\beta S^*I^*P^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] - \left[-2bS^* + \frac{r}{1+k(P^*+I^*)} - a(1-m)I^* - aP^* - d_1 \right] \\
& \times [\alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2] [\alpha aS^* - \beta I^* - d_3] \\
& - S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m) \right] \beta I^* \\
& + S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] [\alpha a(1-m)S^* + \beta P^* - d_2] \alpha a P^*
\end{aligned}$$

这里 $\Delta_1 = M_1, \Delta_2 = M_1M_2 - M_3$ 。

由 Hurwitz 判据知: 当 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ 时, 特征方程的一切根有负实部, 故 E^* 局部渐近稳定。

3.3. 全局稳定性分析

定理 5 设 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right)$ 是局部渐近稳定的, 当满足以下条件时, 它是全局渐近稳定的。

$$\frac{a(r-d_1)}{b} < \frac{d_2}{1-m} \quad (7a)$$

$$\frac{a(r-d_1)}{b} < d_3 \quad (7b)$$

证明 构造一个 Lyapunov 函数 $g_1(S, I, P) = \left(S - \tilde{S} - \tilde{S} \ln \frac{S}{\tilde{S}} \right) + I + P$, 其中 $\tilde{S} = \frac{r-d_1}{b}$ 。

对其求导, 再化简可得

$$\frac{dg_1}{dt} \leq -b(S - \tilde{S})^2 + [-d_2 + a(1-m)\tilde{S}]I + (a\tilde{S} - d_3)P$$

当满足条件(7a) (7b)时, $\frac{dg_1}{dt}$ 是负定的, 由 Lyapunov 函数稳定性判别定理知该平衡点是全局渐近稳定的。

定理 6 设 $E_2\left(\frac{d_3}{\alpha a}, 0, \bar{P}\right)$ 是局部渐近稳定的, 当满足以下条件时, 它是全局渐近稳定的。

$$d_2 + \frac{a(d_1 - r)}{b} - \beta\bar{P} > 0 \quad (8a)$$

$$bS^2 - (d_1 + aP - r)(S - \bar{S}) < M_1 + M_2 + M_3 \quad (8b)$$

其中 $M_1 = \left[\sqrt{b}(S - \bar{S}) - \frac{a}{2\sqrt{b}}(P - \bar{P})\right]^2$, $M_2 = \frac{a^2}{4b}(P - \bar{P})^2$, $M_3 = I(d_2 - a\bar{S} - \beta\bar{P})$ 。

证明 构造一个 Lyapunov 函数 $g_2(S, I, P) = \left(S - \bar{S} - \bar{S} \ln \frac{S}{\bar{S}}\right) + I + \left(P - \bar{P} - \bar{P} \ln \frac{P}{\bar{P}}\right)$, 其中 $\bar{S} = \frac{d_3}{\alpha a}$ 。

对其求导, 再化简可得

$$\begin{aligned} \frac{dg_2}{dt} &\leq -b(S - \bar{S})^2 + a(S - \bar{S})(P - \bar{P}) - I(d_2 - a\bar{S} - \beta\bar{P}) + 2bS^2 + (r - d_1 - aP)(S - \bar{S}) \\ &= -M_1 - M_2 - M_3 + bS^2 - (d_1 + aP - r)(S - \bar{S}) \end{aligned}$$

当满足条件(8a) (8b)时, $\frac{dg_2}{dt}$ 是负定的, 由 Lyapunov 函数稳定性判别定理知该平衡点是全局渐近稳定的。

定理 7 设 $E_3\left(\frac{d_2}{\alpha a(1-m)}, \bar{I}, 0\right)$ 是局部渐近稳定的, 当满足以下条件时, 它是全局渐近稳定的。

$$\beta\bar{I} + d_3 - \frac{a(r - d_1)}{b} > 0 \quad (9a)$$

$$\frac{a^2(1-m)^2}{4b} + [r - d_1 - a(1-m)I](S - \bar{S}) + bS^2 < N_1 + N_2 \quad (9b)$$

其中 $N_1 = \left[\sqrt{b}(S - \bar{S}) - \frac{a(1-m)}{2\sqrt{b}}(I - \bar{I})\right]^2$, $N_2 = P(\beta\bar{I} + d_3 - a\bar{S})$ 。

证明 构造一个 Lyapunov 函数 $g_3(S, I, P) = \left(S - \bar{S} - \bar{S} \ln \frac{S}{\bar{S}}\right) + \left(I - \bar{I} - \bar{I} \ln \frac{I}{\bar{I}}\right) + P$, 其中 $\bar{S} = \frac{d_2}{\alpha a(1-m)}$ 。

对其求导, 再化简可得

$$\begin{aligned} \frac{dg_3}{dt} &\leq -b(S - \bar{S})^2 + a(1-m)(S - \bar{S})(I - \bar{I}) + P(a\bar{S} - \beta\bar{I} - d_3) \\ &\quad + (r - d_1)(S - \bar{S}) + bS^2 - a(1-m)I(S - \bar{S}) \\ &= -N_1 - N_2 - \frac{a^2(1-m)^2}{4b} + [r - d_1 - a(1-m)I](S - \bar{S}) + bS^2 \end{aligned}$$

当满足条件(9a) (9b)时, $\frac{dg_3}{dt}$ 是负定的, 由 Lyapunov 函数稳定性判别定理知该平衡点是全局渐近稳定的。

根据文献[7]相关定理可得出以下定理:

定理 8 只要 E^* 存在, 则其为全局渐近稳定的。

证明 构造一个 Lyapunov 函数

$$g_4(S, I, P) = c_1 \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + c_2 \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + c_3 \left(P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*} \right)$$

对其求导, 再化简可得

$$\begin{aligned} \frac{dg_4}{dt} &= c_1 (S - S^*) \left[\frac{r}{1+k(P+I)} - bS - a(1-m)I - aP - d_1 \right] + (c_3a - c_1 - c_1a)(S - S^*)(P - P^*) \\ &\quad + c_2 (I - I^*) [\alpha a(1-m)S + \beta P - d_2] + c_3 (P - P^*) (\alpha aS - \beta I - d_3) \\ &= -c_1 b (S - S^*)^2 + (c_3a - c_1 - c_1a)(S - S^*)(P - P^*) \\ &\quad + (c_2a - c_1 - c_1a)(S - S^*)(I - I^*) + (c_2\beta - c_3\beta)(I - I^*)(P - P^*) \end{aligned}$$

取 $c_3a - c_1 - c_1a = 0, c_2a - c_1 - c_1a = 0, c_2\beta - c_3\beta = 0$ 。

则 $\frac{dg_4}{dt} = -c_1 b (S - S^*)^2 \leq 0$, 由 Lyapunov 函数稳定性判别定理知该平衡点是全局渐近稳定的。

4. 分岔分析

本文研究了改变参数值对系统动态的影响。动力系统中的非双曲平衡点是捕食系统发生分岔的必要条件, 但不是充分条件。因此, 选择使平衡点为非双曲点的值作为候选分岔参数。将系统(1)改写为向量形式:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \varepsilon), X = (S, I, P)^T, F = (Sf_1, If_2, Pf_3)$$

系统(1)的二阶方向导数也可以计算为:

$$D^2F(X, \varepsilon)(\Phi, \Phi) = [q_{il}]_{3 \times 1} \quad (10)$$

其中 $\Phi = (v_1, v_2, v_3)^T$, ε 为任意分岔参数, 且

$$\begin{aligned} q_{11} &= -2bv_1^2 - 2 \left[\frac{rk}{(1+kP+kI)^2} + a(1-m) \right] v_1v_2 - 2 \left[\frac{rk}{(1+kP+kI)^2} + a \right] v_1v_3 \\ &\quad + 4 \frac{rk^2S}{(1+kP+kI)^3} (v_2v_3 + v_2^2 + v_3^2) \\ q_{21} &= 2\alpha a(1-m)v_1v_2 + 2\beta v_2v_3 \\ q_{31} &= 2\alpha av_1v_3 - 2\beta v_2v_3 \end{aligned}$$

定理 9 如果条件(4b)得到满足, 当参数 d_2 经过 $d_2^* = \frac{\alpha a(1-m)(r-d_1)}{b}$ 时, 系统(1)在 $E_1 \left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0 \right)$ 附近发生跨临界分岔。

证明 当 $d_2 = d_2^*$ 时, 系统(1)在 E_1 处的 Jacobi 矩阵为

$$J_1 = J(E_1, d_2^*) = \begin{pmatrix} d_1 - r & \frac{-(r-d_1)[kr+a(1-m)]}{b} & \frac{-(r-d_1)(kr+a)}{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha a(r-d_1)}{b} - d_3 \end{pmatrix}$$

此时 J_1 所对应的特征方程的两个特征值 $\lambda_{11}^* = d_1 - r, \lambda_{13}^* = \frac{\alpha a(r-d_1)}{b} - d_3$ 有负实部, 而第三个特征值 λ_{12}^* 为 0, 所以 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right)$ 是一个非双曲点。

设 $\Phi_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T$ 为特征值 $\lambda_{12}^* = 0$ 所对应的特征向量, 根据 $J_1 \Phi_1 = 0$ 可以得出 $\Phi_1 = \left(\frac{(r-d_1)[k+a(1-m)]}{b} v_{12}, v_{12}, 0\right)^T$, 其中 v_{12} 是任何非零实数。

设 $\psi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13})^T$ 为与零特征值相关的特征向量, 根据 $J_1^T \psi_1 = 0$ 可以得出 $\psi_1 = (0, \varphi_{12}, 0)^T$, 其中 φ_{12} 是任何非零实数。

此时, 因为 $F_{d_2}(X, d_2) = (0, -I, 0)^T$, 从而 $F_{d_2}(E_1, d_2^*) = (0, 0, 0)^T$, $\psi_1^T F_{d_2}(E_1, d_2^*) = 0$, 所以系统(1)不存在鞍结分岔。

此外, $\psi_1^T [DF_{d_2}(E_1, d_2^*) \Phi_1] = -\varphi_{12} v_{12} \neq 0$ 。

通过式(10)可以得出

$$\psi_1^T [D^2 F(E_1, d_2^*)(\Phi_1, \Phi_1)] = \frac{2\alpha a(1-m)(r-d_1)[k+a(1-m)]}{b} \varphi_{12} v_{12}^2 \neq 0$$

根据 Sotomayor 定理, 可以证明当 $d_2 = d_2^*$ 时系统(1)在 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right)$ 附近发生跨临界分岔。

定理 10 当满足条件 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ 时, 如果参数 m 经过 $m = m^*$ 且满足以下条件时, 系统(1)在 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 附近发生鞍结分岔。

$$\frac{h_{33} - h_{31}}{h_{21} - h_{23}} q_{21} + \varphi_{33} q_{31} \neq 0 \quad (11)$$

证明 当 $m = m^*$ 时, 系统(1)在 E^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned} J_2 &= J(E^*, m^*) \\ &= \begin{pmatrix} -2bS^* + \frac{r}{1+k(P^*+I^*)} - a(1-m^*)I^* - aP - d_1 & S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a(1-m^*) \right] & S^* \left[\frac{-kr}{(1+kP^*+kI^*)^2} - a \right] \\ \alpha a(1-m^*)I^* & 0 & \beta I^* \\ \alpha aP^* & -\beta P^* & \alpha aS^* - \beta I - d_3 \end{pmatrix} \\ &= h_{ij} \end{aligned}$$

此时 J_2 所对应的特征方程的两个特征值有负实部, 而第三个特征值 λ_{22}^* 为 0, 所以 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 是一个非双曲点。

设 $\Phi_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$ 为特征值 $\lambda_{22}^* = 0$ 所对应的特征向量, 根据 $J_2 \Phi_2 = 0$ 可以得出

$$\Phi_2 = \left(\frac{-h_{33}}{h_{31}} v_{33}, \frac{h_{33}h_{11} - h_{13}h_{31}}{h_{31}h_{12}} v_{33}, v_{33} \right)^T, \text{ 其中 } v_{33} \text{ 是任何非零实数。}$$

设 $\psi_2 = (\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23})^T$ 为与零特征值相关的特征向量, 根据 $J_1^T \psi_1 = 0$ 可以得出

$$\psi_2 = \left(0, \frac{h_{33} - h_{31}}{h_{21} - h_{23}} \varphi_{33}, \varphi_{33} \right)^T, \text{ 其中 } \varphi_{33} \text{ 是任何非零实数。}$$

此时, 因为 $F_m(X, m) = (aSI, -\alpha aSI, 0)^T$, 从而 $F_m(E^*, m) = (aS^*I^*, -\alpha aS^*I^*, 0)^T$,

$$\psi_2^T F_m(E^*, m^*) = -\alpha aS^*I^* \varphi_{23} \frac{h_{33} - h_{31}}{h_{21} - h_{23}} \neq 0。$$

通过式(10)和式(11)可以得出

$$\psi_2^T [D^2 F(E^*, m^*)(\Phi_2, \Phi_2)] = \varphi_{33} \left(\frac{h_{33} - h_{31}}{h_{21} - h_{23}} q_{21} + \varphi_{33} q_{31} \right) \neq 0$$

根据 Sotomayor 定理, 可以证明当 $m = m^*$ 时系统(1.1)在 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 附近发生鞍结分岔。

5. 数值模拟

在本节中, 我们使用数值模拟来验证理论结果, 并了解改变 k 的参数值对系统动力学的影响。因此, 使用 MATLAB 版本 R2013a 对不同初始值的系统(1)进行数值求解。因此, 为了运行模拟, 本节使用了以下假设的生物可行性数据集:

$$r = 0.5; b = 0.2; a = 0.25; m = 0.9; c = 0.25;$$

$$d_1 = 0.1; d_2 = 0.7; d_3 = 0.6; n = 0.4。$$

我们通过设置不同的 k 值得到的模拟结果如图 1 所示。

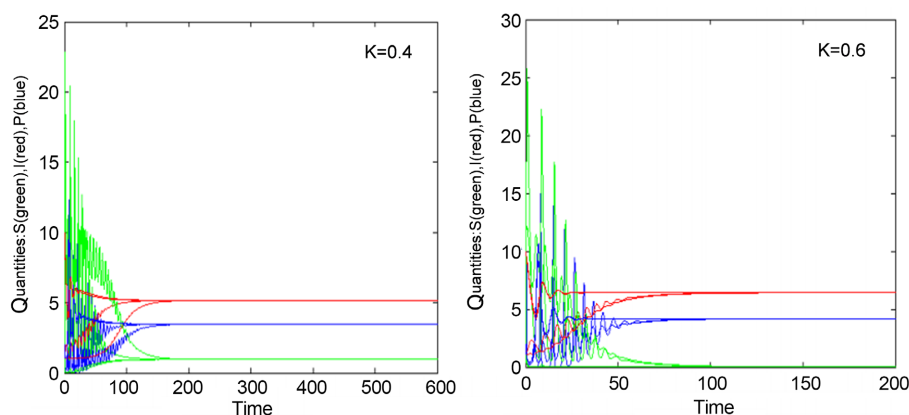


Figure 1. The time series graph of the population when k is 0.4 and 0.6

图 1. k 为 0.4 和 0.6 时种群的时间序列图

由此可见, 猎物种群的存在取决于 K 的值。

6. 结论

本文中, 我们讨论了带有恐惧的捕食者染病的捕食者 - 食饵模型动力学行为。通过上述的讨论可知,

系统(1)所有正解均为最终有界的, 系统总有不稳定的平衡点 $E_0 = (0, 0, 0)$; 当 $\frac{a(r-d_1)}{b} < \frac{d_2}{1-m}$ 且 $\frac{a(r-d_1)}{b} < d_3$ 时, 平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right)$ 是全局渐近稳定的; 当 $\frac{1}{2}\left(\frac{r}{1+k\bar{P}} - a\bar{P} - d_1\right) < \frac{bd_3}{\alpha a} < r - d_1$, 且 $(1-m)d_3 + \beta\bar{P} - d_2 < 0$, 系统存在局部渐近稳定的无病平衡点 $E_2\left(\frac{d_3}{\alpha a}, 0, \bar{P}\right)$, 当其满足条件(8a) (8b)时为全局渐近稳定的; 当 $\frac{d_2}{1-m} - \beta\bar{I} - d_3 < 0$ 且 $\frac{1}{2}\left[\frac{r}{1+k\bar{I}} - a(1-m)\bar{I}\right] < \frac{bd_2}{\alpha a(1-m)} < r - d_1$ 时, $E_3 = \left(\frac{d_2}{\alpha a(1-m)}, \bar{I}, 0\right)$ 是局部渐近稳定的, 且满足条件(9a) (9b)时其为全局渐近稳定的; 当 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 存在, 即 S^* 在 $\frac{d_3}{\alpha a} < S < \frac{d_2}{\alpha a(1-m)}$ 内有唯一解, 且满足 $[a(1-m)d_3 - ad_2 + \beta d_1](\beta + kd_2 - kd_3) - \beta^2 r < 0$ 时, 正平衡点 E^* 为全局渐近稳定的。

关于分岔的研究, 我们得出以下结果: 当满足 $\frac{\alpha a(r-d_1)}{b} < d_3$ 时, 参数 d_2 经过 $d_2^* = \frac{\alpha a(1-m)(r-d_1)}{b}$ 时, 系统(1)在 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0, 0\right)$ 附近发生跨临界分岔。

当满足条件 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ 时, 参数 m 经过 $m = m^*$ 且满足 $\frac{h_{33} - h_{31}}{h_{21} - h_{23}} q_{21} + \varphi_{33} q_{31} \neq 0$ 时, 系统(1)在 $E^*(S^*, I^*, P^*)$ 附近发生鞍结分岔。

经过数值模拟, 我们可以得出 k 值影响猎物种群的存在, 且 k 值越大猎物种群规模越小。

参考文献

- [1] Mahmood, Z.K. and Satar, H.A. (2022) The Influence of Fear on the Dynamic of an Ecoepidemiological System with Predator Subject to the Weak Allee Effect and Harvesting. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, **2022**, Article No. 90.
- [2] Anderson, R.M. and May, R.M. (1980) Infectious Diseases and Population Cycles of Forest Insects. *Science*, **210**, 658-661. <https://doi.org/10.1126/science.210.4470.658>
- [3] Liu, X. (2011) Bifurcation of an Eco-Epidemiological Model with a Nonlinear Incidence Rate. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 2300-2309.
- [4] Wang, X., Zanette, L. and Zou, X. (2016) Modelling the Fear Effect in Predator-Prey Interactions. *Journal of Mathematical Biology*, **73**, 1179-1204. <https://doi.org/10.1007/s00285-016-0989-1>
- [5] Xiao, Z. and Li, Z. (2019) Stability Analysis of a Mutual Interference Predator-Prey Model with the Fear Effect. *Journal of Applied Science and Engineering*, **22**, 205-211.
- [6] 孙树林, 原存德. 捕食者有病的生态-流行病 SIS 模型的分析[J]. 工程数学学报, 2005, 22(1): 30-31.
- [7] 王淑潘, 马智慧, 李文龙, 等. 具有庇护所效应的生态流行病模型[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2013, 49(5): 703-709.
- [8] 郭中凯, 李文龙, 程雷虎, 等. 具有功能性反应且捕食者有病的生态-流行病模型[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2009, 45(3): 117-121.
- [9] 杨建雅, 张凤琴. 捕食者有病的食饵-捕食者模型[J]. 生物数学学报, 2007, 22(3): 419-424.
- [10] 马知恩. 常微分方程与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 12-13.
- [11] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 58-59.