Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 45-56
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143091

带对数项的非局部Choquard方程解的存在性

陶　泽

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2025年2月5日；录用日期：2025年2月28日；发布日期：2025年3月5日

摘　要

我们主要关注如下非局部Choquard方程解的存在性：

$$-\Delta u=\left(\int_{\Omega}\frac{|u|^{2_\mu^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u+\lambda\left(\int_{\Omega}\frac{|u|^{q}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{q-2}u+\beta u\log u^2\quad \text{in } \Omega$$

这里 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中一个具有光滑边界的有界区域，$\lambda,\beta>0$ 为实参数，$2<q<2_\mu^*$，$2_\mu^*=\frac{2N-\mu}{N-2}(N\geq 5)$ 是Hardy-Littlewood-Sobolev不等式意义下的上临界指标。

关键词

Choquard方程，Hardy-Littlewood-Sobolev不等式，次临界非局部项，对数项

Existence of Solutions to Non-Local Choquard Equations with Logarithmic Terms

Ze Tao

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 5th, 2025; accepted: Feb. 28th, 2025; published: Mar. 5th, 2025

Abstract

We are interested in the existence of the following nonlocal Choquard equation:

文章引用: 陶泽. 带对数项的非局部 Choquard 方程解的存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 45-56.
DOI: 10.12677/aam.2025.143091

$$-\Delta u=\left(\int_{\Omega}\frac{|u|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_{\mu}^{*}-2}u+\lambda\left(\int_{\Omega}\frac{|u|^{q}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{q-2}u+\beta u\log u^{2}\quad \text{in } \Omega$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary, $\lambda,\beta>0$ are real parameters, $2<q<2_{\mu}^{*}$, $2_{\mu}^{*}=\frac{2N-\mu}{N-2}(N\geq 5)$ is the upper critical exponent in the sense of the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality.

Keywords

Choquard Equation, Hardy-Littlewood-Sobolev Inequality, Subcritical Nonlocal Term, Logarithmic Term

1. 引言

椭圆方程

$$\begin{cases}-\Delta u=|u|^{2^{*}-2}u+\lambda u, & x\in\Omega,\\ u\geq 0, & x\in\Omega,\\ u\in H_{0}^{1}(\Omega),\end{cases}\tag{1.1}$$

被称为 Brezis-Nirenberg 型临界问题，并且许多学者致力于方程(1.1)解的存在性研究，这里 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个有界区域，$N\geq 3$，$2^{*}=\frac{2N}{N-2}$，$\lambda\in(0,\lambda_1)$，其中 $\lambda_1(\Omega)$ 为 $-\Delta$ 在 Ω 上的第一个特征值。若 $N\geq 4$，$\lambda\in(0,\lambda_1)$，或者 $N=3$，Ω 是一个球并且 $\frac{1}{4}\lambda_1(\Omega)<\lambda<\lambda_1(\Omega)$，方程(1.1)解的存在性已由 Brezis 和 Nirenberg 在[1]中证明；涉及方程(1.1)变号解和径向解的解决方案，G Cerami 等学者在[2]中通过全局紧性定理建立。更多相关的结果可在[3]-[6]中找到。

本文讨论了如下带有次临界非局部项和对数项的方程的解的存在性：

$$\begin{cases}-\Delta u=\left(\int_{\Omega}\frac{|u|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_{\mu}^{*}-2}u+\lambda\left(\int_{\Omega}\frac{|u|^{q}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{q-2}u+\beta u\log u^{2} \quad \text{in } \Omega\\ u\in H_{0}^{1}(\Omega)\end{cases}\tag{1.2}$$

这里 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中一个具有光滑边界的有界区域，$\lambda,\beta>0$ 为实参数，$2<q<2_{\mu}^{*}$，$2_{\mu}^{*}=\frac{2N-\mu}{N-2}(N\geq 5)$ 是 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式意义下的上临界指标(见[7])。

当 $\beta=0$ 时，高发顺和杨敏波[8]利用著名的山路定理证明了：当 $N\geq 3$，$0<\mu<N$，方程至少有一个非平凡解如果满足(1) $N>\frac{2(q+1)-\mu}{q-1}$ 并且 $\lambda>0$；或者(2) $N\leq\frac{2(q+1)-\mu}{q-1}$ 并且 λ 足够大。

何其涵等学者[9]使用变分方法证明了方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(\int_{\Omega} \frac{|u|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}y \right) |u|^{2_\mu^*-2} u + \lambda u + \beta u \log u^2 \quad \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.3}$$

在参数(λ, β)不同范围内方程解的存在性。更多相关的结果可在[10]-[13]中找到。

2. 主要定理

定理 2.1 令$2 < q < 2_\mu^*$，$0 < \mu < N$，$N \ge 5$，$\lambda, \beta > 0$，则方程(1.2)有一个正解如果满足

(1) $N > \max\left\{ \min\left\{ \frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq}, 2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq} \right\}, \frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu} \right\}$或者

(2) $N \le \max\left\{ \min\left\{ \frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq}, 2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq} \right\}, \frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu} \right\}$并且$\lambda$足够大。

3. 预备工作

我们运用变分方法解决问题(1.2)从一个著名的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式[7]开始。

命题 3.1 令$t, r > 1$以及$0 < \mu < N$满足$\frac{1}{t} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2$。假设$f \in L^t(\mathbb{R}^N)$和$h \in L^r(\mathbb{R}^N)$，那么存在不依赖于$f$和$h$的常数$C(r, N, \mu)$，使得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)h(y)}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \le C(r, N, \mu) |f|_t |h|_r \tag{3.1}$$

注意到，由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，当$t > 1$且满足$\frac{2}{t} + \frac{\mu}{N} = 2$，$|u(x)|^p \in L^t(\mathbb{R}^N)$时，积分

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p |u(y)|^p}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

是良定义的。由 Sobolev 嵌入定理，对任意的$u \in H^1(\mathbb{R}^N)$要求p满足

$$\frac{2N-\mu}{N} \le p \le \frac{2N-\mu}{N-2}$$

我们称$\frac{2N-\mu}{N}$为 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式意义下的下临界指标，$\frac{2N-\mu}{N-2}$为 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式意义下的上临界指标。

在[14]中，我们总是使用$S_{H,L}$来表示最佳常数

$$S_{H,L} := \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}} \tag{3.2}$$

接下来，我们提出在随后的证明中起关键作用的两个事实(见[14])。

引理 3.2 最佳常数$S_{H,L}$的一个达到元为

$$u = C \left(\frac{1}{a^2 + |x-b|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}$$

其中 $a\in(0,+\infty)$，$b\in\mathbb{R}^N$，C 为大于零的常数，进一步，我们有 $S_{H,L}=\frac{S}{C(N,\mu)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}}$，其中 S 为 Sobolev 嵌入最佳常数。

引理 3.3 若 $N\ge 3$，那么对于 $\mathbb{R}^N$ 的任意开子集 Ω 都有

$$S_{H,L}(\Omega):=\inf_{u\in D^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}}=S_{H,L}$$

当 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 时，$S_{H,L}$ 不可达。

我们用 $J_\lambda(u)$ 表示方程(1.2)对应的能量泛函：

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2\cdot 2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_+(x)|^{2_\mu^*}|u_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{2q}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_+(x)|^q|u_+(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\beta}{2}\int_\Omega u_+^2\left(\log u_+^2-1\right)\mathrm{d}x$$

显然，$J_\lambda(u)\in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$ 并且 u 是(1.2)的弱解当且仅当 u 是泛函 $J_\lambda(u)$ 的一个临界点。

在本文中，我们表示在 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数 $\|u\|:=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，这里 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中一个具有光滑边界的有界区域，用 $|\cdot|_p$ 表示 $p\in[1,\infty]$ 时的 $L^p(\Omega)$ 范数。另外，我们定义空间

$$D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right):=\left\{u\in L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right)\middle|\nabla u\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$$

显然，$D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 是一个 Hilbert 空间。如下的范数被定义在 $L^{2^*}(\Omega)$ 上[14]：

$$\|\cdot\|_{NL}:=\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|\cdot|^{2_\mu^*}|\cdot|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2\cdot 2_\mu^*}}$$

我们还设

$$\lambda_1(\Omega):=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x}\tag{3.3}$$

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_\lambda(\gamma(t))\tag{3.4}$$

这里

$$\Gamma:=\left\{\gamma\in C[0,1],H_0^1(\Omega)\middle|\gamma(0)=0,J_\lambda(\gamma(1))<0\right\}$$

$$I_\lambda(u):=\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_+(x)|^{2_\mu^*}|u_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_+(x)|^q|u_+(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\beta\int_\Omega u_+^2\log u_+^2\mathrm{d}x\tag{1.9}$$

4. 主要定理证明

4.1. 山路几何结构与 $(PS)_c$ 序列的有界性

首先我们来验证能量泛函 $J_\lambda(u)$ 满足山路几何结构：

引理 4.1 当 $1<q<2^*-1$ 且 $\lambda,\beta>0$ 时，泛函 J_λ 满足如下的性质：

(1) 存在 $\alpha,\rho>0$ 使得对任意的 $\|u\|=\rho$ 都有 $J_\lambda(u)\ge\alpha$；

(2) 存在 $e\in H_0^1(\Omega)$ 满足 $\|e\|>\rho$ 使得 $J_\lambda(e)<0$。

证明：(1) 显然对任意的 $p\in(2,+\infty)$，存在 $C_p>0$ 使得对任意的 $t\ge1$ 有 $t^2\log t^2\le C_p t^p$ 成立，则运用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u)\ge{}&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}C(N,\mu)|u|_{2^*}^{2\cdot2_\mu^*}-\frac{\lambda}{2q}C(N,\mu)|u|_{\frac{2Nq}{2N-\mu}}^{2q}\\
&-\frac{\beta}{2}\int_{\Omega\cap\{e^{-1}u_+^2\ge1\}}u_+^2\log\left(e^{-1}u_+^2\right)\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}\int_{\Omega\cap\{e^{-1}u_+^2\le1\}}u_+^2\log\left(e^{-1}u_+^2\right)\mathrm{d}x\\
\ge{}&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}C(N,\mu)\|u\|^{2\cdot2_\mu^*}-\frac{\lambda}{2q}C(N,\mu)\|u\|^{2q}-C\beta\int_\Omega|u|^{2^*}\mathrm{d}x\\
\ge{}&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}C(N,\mu)\|u\|^{2\cdot2_\mu^*}-\frac{\lambda}{2q}C(N,\mu)\|u\|^{2q}-C\beta\|u\|^{2^*}
\end{aligned}
$$

因为 $2<2q<2\cdot2_\mu^*$，我们可以选择适当的 $\alpha,\rho>0$ 使得 $J_\lambda(u)\ge\alpha$ 且 $\|u\|=\rho$。

(2) 假设 $u(x)\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ 且在 Ω 内大于零，则当 $t\to+\infty$ 时，

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(tu)={}&\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{t^{2\cdot2_\mu^*}}{2\cdot2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_+(x)|^{2_\mu^*}|u_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-\frac{\lambda t^{2q}}{2q}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_+(x)|^q|u_+(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\beta}{2}t^2\log t^2\int_\Omega u_+^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}t^2\int_\Omega u_+^2\log\left(e^{-1}u_+^2\right)\mathrm{d}x\\
\to{}&-\infty
\end{aligned}
$$

因此，我们可以选择充分大的 $t_0>0$ 使得 $u_0=t_0u$ 满足(2)。

注 4.2 由引理 4.1 及山路定理[15]，$H_0^1(\Omega)$ 中存在一个 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 满足当 $n\to+\infty$ 时，有

$$J_\lambda(u_n)\to c,\quad J_\lambda'(u_n)\to0$$

引理 4.3 设 $N\ge5$，λ，$\beta>0$，则 J_λ 的任意 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 内必定有界。

证明：由 $\lambda>0$，当 n 足够大时有

$$
\begin{aligned}
C(1+\|u_n\|)\ge{}&J_\lambda(u_n)-\frac{1}{2}I_\lambda(u_n)\\
={}&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)\int_\Omega\int_\Omega\frac{|(u_n)_+(x)|^{2_\mu^*}|(u_n)_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2q}\right)\int_\Omega\int_\Omega\frac{|(u_n)_+(x)|^q|(u_n)_+(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\beta}{2}\int_\Omega(u_n)_+^2\mathrm{d}x\\
\ge{}&\frac{\beta}{2}\int_\Omega(u_n)_+^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

结合(4.1)以及下列对数不等式(见[7]或[16])

$$\int_\Omega u^2\log u^2\le\frac{a}{\pi}\|u\|^2+\left(\log|u|_2^2-N(1+\log a)\right)|u|_2^2 \tag{4.2}$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
C\left(1+\|u_n\|\right) &\ge J_\lambda(u_n)-\frac{1}{q+1}I_\lambda(u_n)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega(u_n)_+^2\log(u_n)_+^2\mathrm{d}x+\frac{\beta}{2}\int_\Omega(u_n)_+^2\mathrm{d}x\\
&\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\left(1-\beta\frac{a}{\pi}\right)\|u\|^2-C\left\|(u_n)_+\right|_2^2\log\left|(u_n)_+\right|_2^2\Big|-C\left(1+\|u_n\|\right)\\
&\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\left(1-\beta\frac{a}{\pi}\right)\|u\|^2-C\left(\left|(u_n)_+\right|_2^{2-\varepsilon}+\left|(u_n)_+\right|_2^{2+\varepsilon}+\|u_n\|+1\right)\\
&\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\left(1-\beta\frac{a}{\pi}\right)\|u\|^2-C\left(\|u_n\|^{\frac{2-\varepsilon}{2}}+\|u_n\|^{\frac{2+\varepsilon}{2}}+\|u_n\|+1\right)
\end{aligned}
$$

由 $q+1>2$，我们可以选择 $a>0$ 足够小使得 $a<\dfrac{\pi}{2\beta}$ 及 $\varepsilon\in(0,1)$。这就表明了序列 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 内有界。

现在我们需要对 Brézis-Lieb 收敛引理进行一些变形来证明 $(PS)_c$ 条件。

引理 4.4 (见[17])设 $\{u_n\}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界序列满足当 $n\to\infty$ 时，有 $u_n\to u$ 在 Ω 上几乎处处成立，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n^2\log u_n^2\mathrm{d}x=\int_\Omega u^2\log u^2\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega(u_n)_+^2\log(u_n)_+^2\mathrm{d}x=\int_\Omega u_+^2\log u_+^2\mathrm{d}x$$

引理 4.5 (见[14]和[18])设 $N\ge3$，$0<\mu<N$ 且 $(2N-\mu)/2N\le p\le2_\mu^*$。若 $\{u_n\}$ 为 $L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ 中的有界序列且满足当 $n\to\infty$ 时，有 $u_n\to u$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega\left(|x|^{-\mu}*|u_n|^p\right)|u_n|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(|x|^{-\mu}*|u_n-u|^p\right)|u_n-u|^p\mathrm{d}x\right)=\int_\Omega\left(|x|^{-\mu}*|u|^p\right)|u|^p\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega\left(|x|^{-\mu}*(u_n)_+^p\right)(u_n)_+^p\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(|x|^{-\mu}*(u_n-u)_+^p\right)(u_n-u)_+^p\mathrm{d}x\right)=\int_\Omega\left(|x|^{-\mu}*u_+^p\right)u_+^p\mathrm{d}x$$

引理 4.6 设 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是 u_n 的弱极限，则 u 是方程(1.2)的一个弱解。

证明：根据引理 4.3，直到一个子列，在 $H_0^1(\Omega)$ 上存在 u_n 的一个弱极限 u 使得

$$u_n\to u \text{ 在 } L^p(\Omega) \text{ 中，} 1\le p<2^*\text{，} u_n\rightharpoonup u \text{ 在 } L^{2^*}(\Omega) \text{ 中}$$

则当 $1<s<2^*$，$n\to\infty$ 时，在 $L^{\frac{2N}{s(N-2)}}(\Omega)$ 中有 $|u_n|^s\rightharpoonup|u|^s$，由 H-L-S 不等式，Riesz 位势定义一个从 $L^{\frac{2N}{s(N-2)}}(\Omega)$ 到 $L^{\frac{2N}{2N-sN+2s}}(\Omega)$ 的连续线性映射，因此当 $n\to\infty$ 时，在 $L^{\frac{2N}{2N-sN+2s}}(\Omega)$ 中有

$$|x|^{-\mu}*|u_n|^s\rightharpoonup|x|^{-\mu}*|u|^s$$

联合当 $n\to\infty$ 时，在 $L^{\frac{2N}{(s-1)(N-2)}}(\Omega)$ 中有 $|u_n|^{s-2}u_n\rightharpoonup|u|^{s-2}u$，所以在 $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ 中，我们有

$$\left(|x|^{-\mu}*|u_n|^s\right)|u_n|^{s-2}u_n\rightharpoonup\left(|x|^{-\mu}*|u|^s\right)|u|^{s-2}u$$

并且对任意的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ 有

$$0 \leftarrow \left\langle J_\lambda(u_n), \varphi \right\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(u_n)_+(x)\right|^{2_\mu^*} \left|(u_n)_+(y)\right|^{2_\mu^*-2} (u_n)_+(y)\varphi(y)}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\lambda \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(u_n)_+(x)\right|^{q} \left|(u_n)_+(y)\right|^{q-2} (u_n)_+(y)\varphi(y)}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \beta \int_\Omega (u_n)_+ \varphi \log (u_n)_+^2 \mathrm{d}x$$

令 $n \to \infty$，我们得到

$$0 = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*-2} u(y)\varphi(y)}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\lambda \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^{q} |u(y)|^{q-2} u(y)\varphi(y)}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \beta \int_\Omega u\varphi \log u^2 \mathrm{d}x$$

这就表明了 u 是方程(1.2)的一个弱解。

最后，我们在方程(1.2)中取测试函数 $\varphi = u \in H_0^1(\Omega)$，我们有

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_+(x)|^{2_\mu^*} |u_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \lambda \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_+(x)|^{q} |u_+(y)|^{q}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \int_\Omega u_+^2 \log u_+^2 \mathrm{d}x$$

因此对 $2 < q < 2_\mu^*$，我们有

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*}\right) \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(u_n)_+(x)\right|^{2_\mu^*} \left|(u_n)_+(y)\right|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2q}\right) \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(u_n)_+(x)\right|^{q} \left|(u_n)_+(y)\right|^{q}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\beta}{2} \int_\Omega (u_n)_+^2 \mathrm{d}x \geq 0$$

引理 4.7 令 $2 < q < 2_\mu^*$，$\lambda, \beta > 0$，$\{u_n\}$ 为 J_λ 的一个 $(PS)_c$ 序列满足 $c < \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$。则 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列。

证明：定义 $v_n := u_n - u$，则在 $H_0^1(\Omega)$ 中我们有 $v_n \rightharpoonup 0$，在 Ω 中 $v_n \to 0$ 几乎处处成立。由 Brezis-Lieb 引理[19]以及引理 4.5 可得

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + o_n(1) \tag{4.3}$$

$$\int_\Omega |u_n|^{q+1} \mathrm{d}x = \int_\Omega |v_n|^{q+1} \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{q+q} \mathrm{d}x + o_n(1) \tag{4.4}$$

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x)|^{2_\mu^*} |u_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + o_n(1) \tag{4.5}$$

利用(4.3)，(4.4)，(4.5)以及引理 4.4，我们有

$$\begin{aligned} c \leftarrow J_\lambda(u_n) &= J_\lambda(u) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(v_n)_+(x)\right|^{2_\mu^*} \left|(v_n)_+(y)\right|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad - \frac{\lambda}{2q} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(v_n)_+(x)\right|^{q} \left|(v_n)_+(y)\right|^{q}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + o_n(1) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|(v_n)_+(x)\right|^{2_\mu^*} \left|(v_n)_+(y)\right|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + o_n(1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

由 $J_\lambda(u)\ge 0$ 及 $\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)|^q|v_n(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le C(N,\mu)|v_n^q|_{\frac{2N}{2N-\mu}}^2 \to 0$。同理，由 $\langle J'_\lambda(u),u\rangle = 0$ 有

$$o_n(1)=\langle J'_\lambda(u_n),u_n\rangle=\int_\Omega|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{|(v_n)_+(x)|^{2_\mu^*}|(v_n)_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o_n(1) \tag{4.7}$$

由(4.7)，我们可以假设存在一个非负常数 m 使得

$$\int_\Omega|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x\to m,\quad \int_\Omega\int_\Omega\frac{|(v_n)_+(x)|^{2_\mu^*}|(v_n)_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to m$$

因此由(4.6)和(4.7)，我们得到

$$c\ge\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}m \tag{4.8}$$

由最佳常数 $S_{H,L}$ 的定义可知

$$S_{H,L}m^{\frac{N-2}{2N-\mu}}\leftarrow S_{H,L}\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|(v_n)_+(x)|^{2_\mu^*}|(v_n)_+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}\le\int_\Omega|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x\to m$$

这表明 $m\ge S_{H,L}m^{\frac{N-2}{2N-\mu}}$。因此要么 $m=0$ 要么 $m\ge S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N-\mu+2}}$。若 $m\ge S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N-\mu+2}}$，由(4.8)得

$$\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N-\mu+2}}\le\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}m\le c$$

与引理条件矛盾，故 $m=0$，从而 $\|u_n-u\|\to 0$。

4.2. 能量估计

下面我们将构造函数来估计 Choquard 项和对数项的能量使得 $c<\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$。由引理 3.2，我们知 $U(x)=\frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$ 是 S 和 $S_{H,L}$ 的极小可达元。不失一般性，假设 $B_{2\delta}(0)\in\Omega$，$\delta>0$ 且设 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases}\varphi(x)=1 & x\in B_\delta(0)\\ \varphi(x)=0 & x\in\mathbb{R}^N\setminus B_\delta(0)\\ 0\le\varphi(x)\le 1 & x\in\mathbb{R}^N\\ |D\varphi(x)|\le C & x\in\mathbb{R}^N\end{cases}$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，记

$$U_\varepsilon(x):=\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad u_\varepsilon(x):=\varphi(x)U_\varepsilon(x)$$

由[20]中的引理 1.46，我们知道 $|\nabla U_\varepsilon(x)|_2^2=S^{\frac{N}{2}}$，因此当 $\varepsilon\to 0^+$，d 为常数，我们有

$$\int_{\Omega}|\nabla u_{\varepsilon}|^2\,\mathrm{d}x=S^{\frac{N}{2}}+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)=C(N,\mu)^{\frac{N-2}{2N-\mu}\cdot\frac{N}{2}}S_{H,L}^{\frac{N}{2}}+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)$$

$$\int_{\Omega}|u_{\varepsilon}|^2\,\mathrm{d}x\geq\begin{cases}d\varepsilon^2|\log\varepsilon|+O\left(\varepsilon^2\right) & N=4\\ d\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^{N-2}\right) & N\geq 5\end{cases}$$

引理 4.8 (见[14])设 $N\geq 3$，则

$$\left(\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}\leq C(N,\mu)^{\frac{N(N-2)}{4N-2\mu}}S_{H,L}^{\frac{N-2}{2}}+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)$$

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq C(N,\mu)^{\frac{N}{2}}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{2}}-O\left(\varepsilon^{\frac{2N-\mu}{2}}\right)$$

引理 4.9 (见[17])设 $N\geq 5$， $C>0$ 是常数，则当 $\varepsilon\to 0^{+}$ 时

$$\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^2\log u_{\varepsilon}^2\mathrm{d}x=C\varepsilon^2\log\frac{1}{\varepsilon}+O\left(\varepsilon^2\right)$$

引理 4.10 设 $N\geq 5$， $\beta>0$，则存在 u_{ε} 使得

$$\sup_{t\geq 0}J_{\lambda}(tu_{\varepsilon})<\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$$

如果满足

(1) $N>\max\left\{\min\left\{\frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq},2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq}\right\},\frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu}\right\}$ 且 $\lambda>0$ 或者

(2) $N\leq\max\left\{\min\left\{\frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq},2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq}\right\},\frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu}\right\}$ 并且 λ 足够大。

证明：我们把证明分成两部分。

Case 1 $N>\max\left\{\min\left\{\frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq},2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq}\right\},\frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu}\right\}$ 且 $\lambda>0$。

对任意足够小的 ε， 当 $t\to+\infty$ 时我们有

$$J_{\lambda}(tu_{\varepsilon})\to-\infty$$

由此可知 $\sup_{t\geq 0}J_{\lambda}(tu_{\varepsilon})$ 会在某点 $t_{\varepsilon}>0$ 处可达到并且 t_{ε} 满足

$$\int_{\Omega}|\nabla u_{\varepsilon}|^2\,\mathrm{d}x=t_{\varepsilon}^{2\cdot 2_{\mu}^{*}-2}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_{\varepsilon}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda t_{\varepsilon}^{2q-2}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u_{\varepsilon}(x)|^{q}|u_{\varepsilon}(y)|^{q}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^2\log t_{\varepsilon}^2u_{\varepsilon}^2\mathrm{d}x$$

由[21]中的引理 4.1 的证明，对充分小的 $\varepsilon>0$， 我们有

$$\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{\frac{2Nq}{2N-\mu}}\mathrm{d}x=O\left(\varepsilon^{N-\frac{Nq(N-2)}{2N-\mu}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{Nq(N-2)}{2N-\mu}}\right)=O\left(\varepsilon^{N-\frac{Nq(N-2)}{2N-\mu}}\right)$$

则当 $\varepsilon\to 0^{+}$ 时

$$\frac{1}{2}S^{\frac{N}{2}} \le \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \beta\int_\Omega u_\varepsilon^2 \log u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x$$

$$= t_\varepsilon^{2\cdot 2_\mu^*-2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^{2_\mu^*}|u_\varepsilon(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \lambda t_\varepsilon^{2q-2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^q|u_\varepsilon(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta\log t_\varepsilon^2\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x$$

$$\le 2C(N,\mu)^{\frac{N(N-2)}{4N-\mu}} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{2}} t_\varepsilon^{2\cdot 2_\mu^*-2} + Ct_\varepsilon^{2q-2} + Ct_\varepsilon^2$$

这表明存在 $C_1>0$ 使得 $t_\varepsilon > C_1$。

另一方面，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，

$$2S^{\frac{N}{2}} \ge \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \lambda t_\varepsilon^{2q-2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^q|u_\varepsilon(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \beta\int_\Omega u_\varepsilon^2\log u_\varepsilon^2\mathrm{d}x$$

$$= t_\varepsilon^{2\cdot 2_\mu^*-2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^{2_\mu^*}|u_\varepsilon(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta\log t_\varepsilon^2\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x$$

$$\ge \frac{1}{2}C(N,\mu)^{\frac{N}{2}} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{2}} t_\varepsilon^{2\cdot 2_\mu^*-2} - C\left|\log t_\varepsilon^2\right|$$

因此存在一个 $C_2>0$ 使得 $t_\varepsilon < C_2$。因此对足够小的 ε，存在两个与 ε 无关的常数 $C_2 > C_1 > 0$ 使得 $t_\varepsilon \in (C_1, C_2)$。

联合引理 4.8 与引理 4.9，对足够小的 ε，我们有

$$c \le \sup_{t\ge 0} J_\lambda(tu_\varepsilon)$$

$$\le \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2 - \frac{t_\varepsilon^{2\cdot 2_\mu^*}}{2\cdot 2_\mu^*}\|u_\varepsilon\|_{NL}^{2\cdot 2_\mu^*} - \frac{\beta}{2}t_\varepsilon^2\log t_\varepsilon^2\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x - \frac{\beta}{2}t_\varepsilon^2\int_\Omega u_\varepsilon^2\log u_\varepsilon^2\mathrm{d}x + O(\varepsilon^2)$$

$$\le \frac{N-\mu+2}{4N-2\mu}\left(\frac{\|u_\varepsilon\|^2}{\|u_\varepsilon\|_{NL}^2}\right)^{\frac{2N-\mu}{N-\mu+2}} - \frac{\beta C_1^2}{2}\varepsilon^2\log\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{N-\mu+2}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N-\mu+2}} - \frac{\beta C_1^2}{2}\varepsilon^2\log\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2)$$

$$< \frac{N-\mu+2}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N-\mu+2}}$$

Case 1 $N \le \max\left\{\min\left\{\frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq}, 2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq}\right\}, \frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu}\right\}$ 且 λ 足够大，对任意固定的 ε，当 $t\to+\infty$ 时我们有

$$J_\lambda(tu_\varepsilon) \to -\infty$$

由此可知 $\sup_{t\ge 0} J_\lambda(tu_\varepsilon)$ 会在某点 $t_\lambda > 0$ 处可达到并且 t_λ 满足

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x = t_\lambda^{2\cdot 2_\mu^*-2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^{2_\mu^*}|u_\varepsilon(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \lambda t_\lambda^{2q-2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon(x)|^q|u_\varepsilon(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta\int_\Omega u_\varepsilon^2\log t_\lambda^2 u_\varepsilon^2\mathrm{d}x$$

由于 $\left.\frac{\partial J_\lambda(tu_\varepsilon)}{\partial t}\right|_{t=t_\varepsilon} = 0$，因此当 $\lambda\to+\infty$ 时 $t_\lambda \to 0$。则当 $\lambda\to+\infty$ 时，

$$\max_{t\geq 0} J_\lambda(tu_\varepsilon)=\frac{t_\lambda^2}{2}\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{t_\lambda^{2\cdot 2_\mu^*}}{2\cdot 2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon(x)|^{2_\mu^*}|u_\varepsilon(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\frac{\lambda t_\lambda^{2q}}{2q}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon(x)|^q|u_\varepsilon(y)|^q}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\beta}{2}t_\lambda^2\int_\Omega u_\varepsilon^2\left(\log t_\lambda^2u_\varepsilon^2-1\right)\mathrm{d}x\to 0$$

这就得到了我们想要的结论。

定理 2.1 的证明：当 $N\geq 5$ 时，由引理 4.1 和山路定理，我们得到一组 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 使得在 $H_0^1(\Omega)^{-1}$ 上有 $J_\lambda(u_n)\to c$， $J_\lambda'(u_n)\to 0$。由引理 4.10 知 $c<\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$ 若满足

(1) $N>\max\left\{\min\left\{\frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq},2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq}\right\},\frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu}\right\}$ 且 $\lambda>0$ 或者

(2) $N\leq\max\left\{\min\left\{\frac{4N+2Nq-2\mu}{Nq},2+\frac{\mu(2N-\mu)}{2Nq}\right\},\frac{4Nq}{2Nq-2N+\mu}\right\}$ 并且 λ 足够大。

应用引理 4.6 和引理 4.7，我们知道 $\{u_n\}$ 有一个弱收敛的子列，其弱极限 $u\in H_0^1(\Omega)$ 并且 J_λ 有一个临界值 $c\in\left(0,\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu}S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}\right)$，这就表明了 u 是问题(1.2)的一个解。设 v 是 J_λ 的一个临界点，我们取 v_- 作为测试函数，则我们有

$$0=\langle J'(v),v\rangle=\int_\Omega|\Delta v_-|^2\mathrm{d}x$$

这就表明了 u 还是方程(1.2)的正解。

5. 总结

本文针对方程(1.2)，采用变分方法，通过构造能量泛函来证明山路几何结构与 $(PS)_c$ 序列的有界性，再构造函数来估计 Choquard 项和对数项的能量证明了方程存在解，进而证明该解还是方程的正解。由于 Choquard 方程在物理学上的重要性，我们认为对 Choquard 型方程解的存在性研究是非常重要的。之后我们可以进一步研究带有不同非局部项的椭圆形方程解的存在性，例如对于分数阶 Laplace 方程、Kirchhoff 型方程等带有非局部项的椭圆方程，我们的方法证明其存在正解是适用的。但是，对于解的唯一性、多重性，本文给出的方法并不适用，在文献[15]中或许可以给我们一些启发。

参考文献

[1] Brezis, H. and Nirenberg, L. (1983) Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 437-477. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405

[2] Cerami, G., Solimini, S. and Struwe, M. (1986) Some Existence Results for Superlinear Elliptic Boundary Value Problems Involving Critical Exponents. *Journal of Functional Analysis*, **69**, 289-306. https://doi.org/10.1016/0022-1236(86)90094-7

[3] Capozzi, A., Fortunato, D. and Palmieri, G. (1985) An Existence Result for Nonlinear Elliptic Problems Involving Critical Sobolev Exponent. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **2**, 463-470. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30395-x

[4] Ferrero, A. and Gazzola, F. (2001) Existence of Solutions for Singular Critical Growth Semilinear Elliptic Equations. *Journal of Differential Equations*, **177**, 494-522. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3999

[5] Cao, D. and Peng, S. (2003) A Note on the Sign-Changing Solutions to Elliptic Problems with Critical Sobolev and Hardy Terms. *Journal of Differential Equations*, **193**, 424-434. https://doi.org/10.1016/s0022-0396(03)00118-9

[6] Lions, P.L. (1982) On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations. *SIAM Review*, **24**, 441-467. https://doi.org/10.1137/1024101

[7] Lieb, E. and Loss, M. (2001) Analysis, Graduate Studies in Mathematics. Vol. 14, American Mathematical Society.

[8] Gao, F. and Yang, M. (2017) On Nonlocal Choquard Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **448**, 1006-1041. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.015

[9] He, Q., He, Y. and Lv, J. (2023) The Existence of Positive Solutions to the Choquard Equation with Critical Exponent and Logarithmic Term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **519**, Article ID: 126737. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126737

[10] Li, G. and Tang, C. (2018) Existence of a Ground State Solution for Choquard Equation with the Upper Critical Exponent. *Computers & Mathematics with Applications*, **76**, 2635-2647. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.052

[11] Mukherjee, T. and Sreenadh, K. (2017) Positive Solutions for Nonlinear Choquard Equation with Singular Nonlinearity. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **62**, 1044-1071. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1260559

[12] Li, X. and Ma, S. (2019) Choquard Equations with Critical Nonlinearities. *Communications in Contemporary Mathematics*, **22**, Article ID: 1950023. https://doi.org/10.1142/s0219199719500238

[13] Li, X., Ma, S. and Zhang, G. (2019) Existence and Qualitative Properties of Solutions for Choquard Equations with a Local Term. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **45**, 1-25. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.06.007

[14] Gao, F. and Yang, M. (2018) The Brezis-Nirenberg Type Critical Problem for the Nonlinear Choquard Equation. *Science China Mathematics*, **61**, 1219-1242. https://doi.org/10.1007/s11425-016-9067-5

[15] Struwe, M. (1990) Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer.

[16] Shuai, W. (2019) Multiple Solutions for Logarithmic Schrödinger Equations. *Nonlinearity*, **32**, 2201-2225. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab08f4

[17] Deng, Y., He, Q., Pan, Y. and Zhong, X. (2023) The Existence of Positive Solution for an Elliptic Problem with Critical Growth and Logarithmic Perturbation. *Advanced Nonlinear Studies*, **23**, Article ID: 20220049. https://doi.org/10.1515/ans-2022-0049

[18] Ackermann, N. (2004) On a Periodic Schrödinger Equation with Nonlocal Superlinear Part. *Mathematische Zeitschrift*, **248**, 423-443. https://doi.org/10.1007/s00209-004-0663-y

[19] Brézis, H. and Lieb, E. (2002) A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. In: Loss, M. and Ruskai, M.B., Eds., *Inequalities Selecta of Elliott H. Lieb*, Springer, 523-527.

[20] Willem, M. (1997) Minimax Theorems, Springer Science & Business Media.

[21] Drábek, P. and Huang, Y.X. (1997) Multiplicity of Positive Solutions for Some Quasilinear Elliptic Equation in RN with Critical Sobolev Exponent. *Journal of Differential Equations*, **140**, 106-132. https://doi.org/10.1006/jdeq.1997.3306