

基于动态规划算法的多波束测线布设模型

罗宗爱, 解俊贺, 唐俊杰, 王梦丹*

湖南科技学院理学院, 湖南 永州

收稿日期: 2025年2月5日; 录用日期: 2025年2月28日; 发布日期: 2025年3月7日

摘要

多波束测深技术以其声波传播特性为基础, 可实现对水深和海底地形的较为高效与精确的测量。本文分析了多波束测深的几何特征, 建立了海域地形与测线布设方案之间的数学模型。利用动态规划算法进行求解, 得到了矩形坡面海域和真实海域的测线布设方案。本研究旨在为实际多波束测线布设问题提供一定的思路和参考。

关键词

多波束测深, 空间解析几何, 优化模型

Multi-Beam Line Placement Model Based on Dynamic Programming

Zong'ai Luo, Junhe Xie, Junjie Tang, Mengdan Wang*

School of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan

Received: Feb. 5th, 2025; accepted: Feb. 28th, 2025; published: Mar. 7th, 2025

Abstract

Multibeam bathymetry technology, based on the acoustic propagation characteristics of sound waves, enables efficient and precise measurement of water depth and seafloor topography. This paper analyzes the geometric characteristics of multibeam bathymetry and establishes a mathematical model between seafloor terrain and survey line layout schemes. By solving the model with a dynamic programming algorithm, optimized survey line layouts are derived for both rectangular slope areas and real-world sea areas. The study aims to provide practical insights and references for addressing real-world multibeam survey line arrangement challenges.

*通讯作者。

文章引用: 罗宗爱, 解俊贺, 唐俊杰, 王梦丹. 基于动态规划算法的多波束测线布设模型[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 57-69. DOI: 10.12677/aam.2025.143092

Keywords

Multibeam Bathymetry, Spatial Analytic Geometry, Optimization Model

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多波束测深技术是一种利用声波在水中传播特性来测量水体深度的技术。与传统的单波束测深不同，多波束测深技术通过同时发射和接收多个独立的声波束来获取海底地形的详细信息，从而提高测量效率和准确性。多波束测深系统在水下地形测量中具有广泛应用。例如，张伟研究了多波束测深系统在水下地形测量中的应用，指出该系统在复杂地形条件下能够提供高精度的测量结果，并且在江河、湖泊、沿岸水下地形的测量中表现出色[1]。

然而，多波束测深的覆盖宽度和重叠率等参数的计算较为复杂，需要建立数学模型进行分析和求解。薛毅在《“多波束测线问题”的问题解析》中系统探讨了多波束测线布设的数学建模方法，提出了一种基于动态规划的优化框架，为测线规划提供了理论依据[2]。王俊森等人进一步提出了一种利用相邻测线重叠区域进行多波束测深横摇运动残差改正的方法，通过匹配中央波束和边缘波束的测深点，显著提高了边缘波束测深数据的质量[3]。此外，梁深南等学者通过几何模型分析了多波束测深的波束覆盖特性，揭示了不同坡度条件下测线布设的几何约束关系，为复杂地形下的数据采集优化提供了新思路[4]。

在实践应用中，多波束测深技术已成功服务于多种场景。曹凡凡研究了该技术在渤海曹妃甸海域的应用，通过精细的作业部署，获得了米级的海底地形地貌数据，揭示了海底地质沉积类型和地形特征[5]。马瑞等人通过优化测线布设方案，结合动态规划算法，显著提升了河道测深的效率和精度[6]。孙栋等人则将其与三维激光技术结合，实现了海岛礁水上水下一体化地形数据的获取，为生态监测提供了高分辨率数据支持[7]。值得注意的是，罗银辉等人在多约束条件下的无人机动态路径规划研究中提出的优化算法，为多波束测深系统的自动化测线布设提供了技术借鉴，尤其在复杂海域中展现了高效性与适应性[8]。

在上述文献的研究基础上，本文将进一步通过分析其几何特征，建立多波束测深的数学模型，并设计优化算法进行求解，旨在为实际海洋测量提供理论支持和实践指导。

为了建立更精准的数学模型，本文根据实际情况假设有坡度的海域是平缓的，探测宽度不会缺失。同时忽略声波在水中的衰减和折射等因素，也忽略探测船自身受海洋摆荡和海面风速影响导致多波束换能器开角的变化。

本文的量化分析及模型结果基于 2023 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛 B 题所提供的海域数据。

2. 在二维坡面下的几何关系模型

在二维坡面下，我们通过分析多波束测深的几何特征，建立了覆盖宽度及重叠率的数学模型。

设与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角为 α 的斜线，称 α 为坡度，多波束换能器的开角为 θ 。多波束测深条带的覆盖宽度 w 随换能器开角 θ 和水深 D 的变化而变化。如图所示，图 1 展示了不同位置的海水深度变化，图 2 则展示了测线距离的变化。

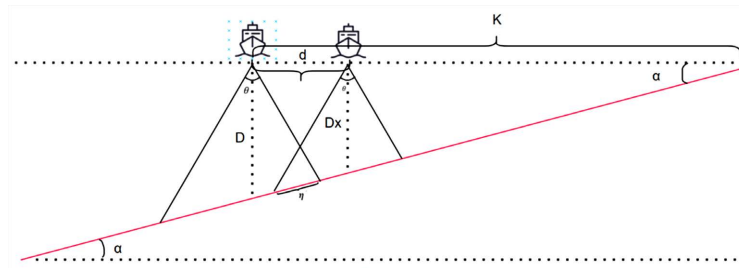


Figure 1. Diagram of changes in seawater depth at different locations
图 1. 不同位置的海水深度变化示意图

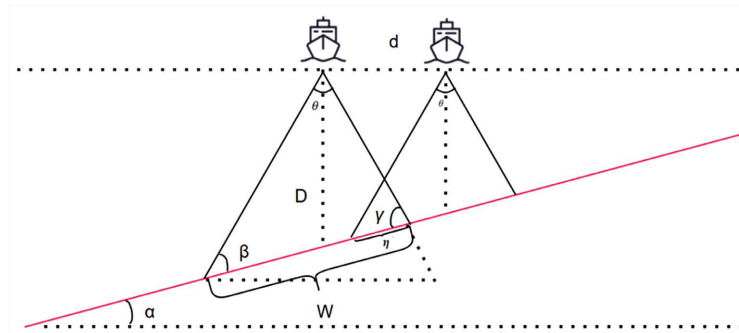


Figure 2. Schematic diagram of the change in survey line distance
图 2. 测线距离变化示意图

建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型分析如下：

设侧线距中心点到坡顶的距离为 K 。通过相似三角形结合坡度分析可以得到：

$$\tan \alpha = \frac{D}{K} = \frac{D_x}{K-d}$$

其中 D 为海域中心的深度， D_x 为距离海域中心不同位置时的海水深度，由此可以得到不同位置的海水深度

$$D_x = D - d \tan \alpha \quad (1)$$

分析图 2， β 和 γ 可以得到：

$$\beta = \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \alpha$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\pi - \theta) + \alpha$$

由正弦定理结合(1)可以得到以下公式：

$$w = \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{D_x}{\sin \beta} + \frac{D_x}{\sin \gamma} \right) = \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{D_x}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) - \alpha \right)} + \frac{D_x}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) + \alpha \right)} \right) \quad (2)$$

由上面的推导可知相邻条带之间的重叠率为

$$\eta = 1 - \frac{d}{w} = 1 - \frac{d}{\frac{1}{2}(w_i + w_j)} \quad (3)$$

其中 w_i 和 w_j 表示相邻条带各自的覆盖宽度。

将具体数据即 $\alpha = 1.5^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $D = 70 \text{ m}$ 代入(1) (2) (3)式可以得到计算结果, 见表 1:

Table 1. Calculation results under specific conditions of a two-dimensional slope

表 1. 二维坡面具体条件下计算结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.94874	85.71155	80.47437	75.23718	70	64.76282	59.52563	54.28845	49.05126
覆盖宽度/m	315.8133	297.6276	279.4418	261.256	243.0703	224.8845	206.6987	188.513	170.3272
与前一条测线的重叠率/%		34.79404	30.68424	26.02153	20.68627	14.52165	7.317989	-1.21158	-11.4702

3. 三维矩形海域下的多波束测深覆盖宽度模型

在三维矩形海域下, 我们通过分析测线方向与海底坡面的关系, 建立了多波束测深覆盖宽度的数学模型。

在矩形待测海域下, 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β 。要得到覆盖宽度 w 需求得探测波照射平面方向相对海底的坡度 μ 和探测船行驶 y 海里的深度变化量 ΔD 。如图 3 展示了三维矩形海域下的多波束测深示意图。

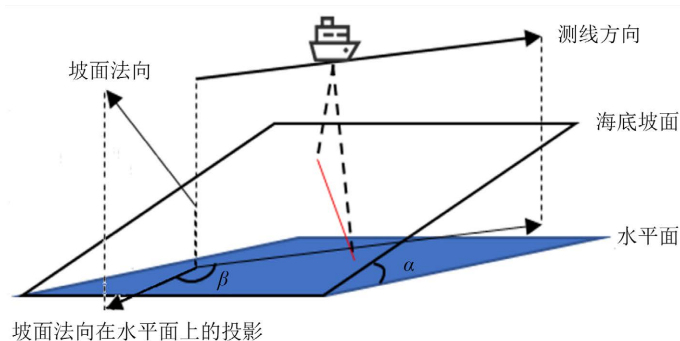


Figure 3. Schematic diagram of multibeam bathymetry under a three-dimensional rectangular sea area

图 3. 三维矩形海域下的多波束测深示意图

根据上述情形, 建立在不同方向上的多波束测深覆盖宽度的数学模型。当测线方向夹角为 β 时具体的示意图如图 4 所示。

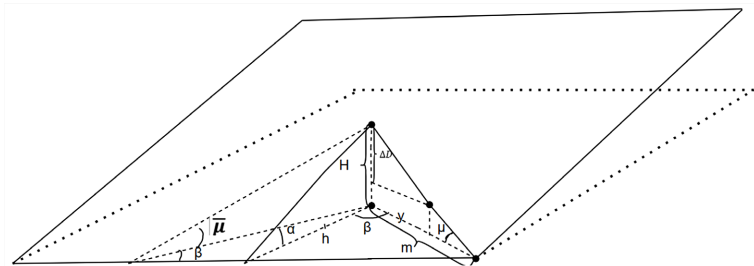


Figure 4. Schematic diagram of multibeam bathymetry with a survey line direction angle of β

图 4. 测线方向夹角为 β 时多波束测深示意图

如图 4 所示, 要得到覆盖宽度 w 需要求得探测波照射平面方向相对海底的坡度 $\bar{\mu}$ 和探测船行驶 y 海里的深度变化量 ΔD 。

由坡角 α 可以得到:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{H}{h} \\ m &= \frac{h}{\cos \beta} \\ \tan \mu &= \frac{H}{m}\end{aligned}$$

联立上面三式可以得到:

$$\mu = \arctan(\tan \alpha \cos \beta) \quad (4)$$

式中, μ 为行驶方向相对海底的坡度。同时可以得到

$$\Delta D = y * \tan \mu \quad (5)$$

式中, y 为测量船行驶的距离, 以海域中心点作为参考。

由测线方向夹角为 β 时多波束测深正视图(图 5)可知探测波照射所形成的平面与行驶的测线平面垂直, 可以得到

$$\bar{\mu} = \arctan(\tan \alpha \sin \beta) \quad (6)$$

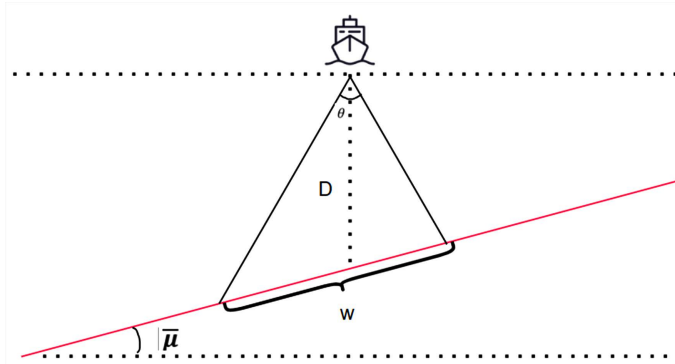


Figure 5. Front view of multibeam bathymetry with a survey line direction angle of β

图 5. 测线方向夹角为 β 时多波束测深正视图

结合(2)式, 使用正弦定理得到:

$$w = \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{D + y \tan \mu}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) - \bar{\mu} \right)} + \frac{D + y \tan \mu}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) + \bar{\mu} \right)} \right) \quad (7)$$

最后联立方程(4) (5) (6) (7)得到在 β 方向上的多波束测深覆盖宽度为:

$$w = \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{D + y * \tan \alpha * \cos \beta}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) - \arctan(\tan \alpha * \sin \beta) \right)} + \frac{D + y * \tan \alpha * \cos \beta}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) + \arctan(\tan \alpha * \sin \beta) \right)} \right) \quad (8)$$

此时若多波束换能器的开角为 120° ，坡度为 1.5° ，海域中心点处的海水深度为 120 m 求出结果如下，见表 2：

Table 2. Multibeam bathymetry coverage width at different survey line angles
表 2. 不同测线角度下的多波束测深覆盖宽度

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方 向夹角 φ	0	415.692	466.091	516.49	566.889	617.288	667.686	718.085	768.484
	45	416.192	451.872	487.552	523.232	558.912	594.592	630.273	665.953
	90	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692
	135	416.192	380.511	344.831	309.151	273.471	237.791	202.11	166.43
	180	415.692	365.293	314.894	264.496	214.097	163.698	113.299	62.9002
	225	416.192	380.511	344.831	309.151	273.471	237.791	202.11	166.43
	270	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692
	315	416.192	451.872	487.552	523.232	558.912	594.592	630.273	665.953

4. 矩形海域测线设计——动态规划

为了优化测线布设方案，我们采用了动态规划算法。该算法通过计算每个小区域的最优测线长度和方向，最终得到最优的测线布设方案。图 6 展示了行驶方向示意图，图 7 展示了测量船东段端测量线示意图。为使测线测量最短，我们将测量长度最短作为首要因素，为此尽可能增大每次航行测线距离 d ，从如下公式：

$$d = w(1 - \eta) \tag{9}$$

中可知，因为 w 的大小只受深度 D 和多波束换能器的开角 θ 影响，因此要使 d 最大，就要使重叠率 η 尽可能小，在此基础上，进行以下两种情况的探讨：

4.1. 第一种情况：以 β 为 90° 作为测线方向的测线设计

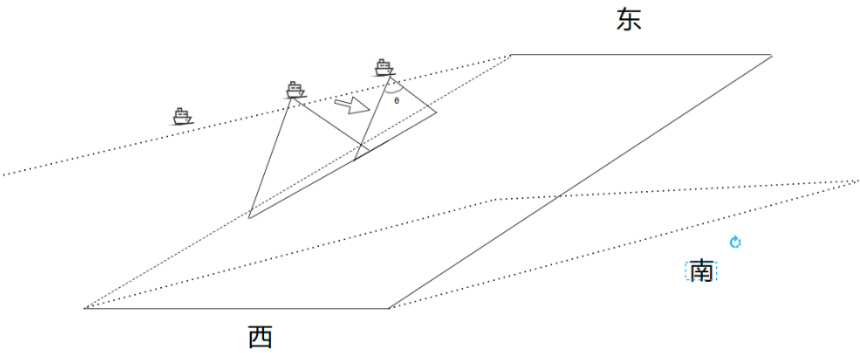


Figure 6. Schematic diagram of the driving direction
图 6. 行驶方向示意图

如图 6，我们采用从东到西逐次航行的策略进行探测，其中每次航线路径都为两海里，为使测量长度最短即使航行次数最小即可。为避免覆盖宽度过剩，将船第一次探测波的东端刚好与该海域的东端重合，此时我们可以计算出第一次航行船距该海域东段的距离 d_1 。

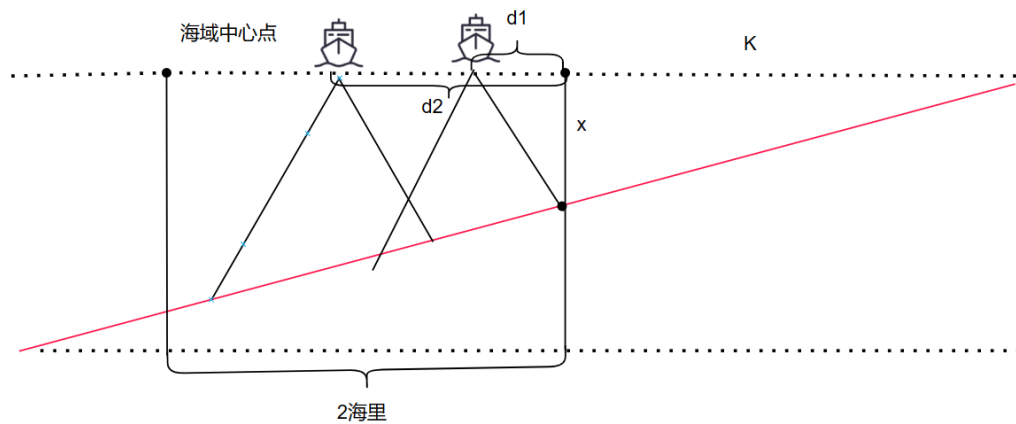


Figure 7. Schematic diagram of the survey line at the east end of the survey ship
图 7. 测量船东段端测量线示意图

根据海底深度的变化公式(5)可以得到船在该处的深度为 $\Delta D + x$ 。进而得到测量船在此处的覆盖宽度, 由(8)式得

$$w_i = \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{d_i \tan \alpha + x}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) \right)} + \frac{d_i \tan \alpha + x}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) \right)} \right) \quad (10)$$

再根据重叠率为 10%可得出下式

$$\eta = 1 - \frac{d_{i+1} - d_i}{\frac{1}{2}(w_{i+1} + w_i)} \quad (11)$$

由(10)(11)两式可以得到一个关于 w_{i+1} 和 d_{i+1} 为未知数的二元一次方程组, 由于已知 w_1 和 d_1 , 即可得到 d_i , 以最后覆盖全海域作为约束条件, 我们可以得到航行次数 i 。

具体约束说明如下:

先算出假设测量船在海域最后一次航线探测波束刚好与西端海底重合的 d_i (图 8), 使得第 i 次落在 z 内即可。

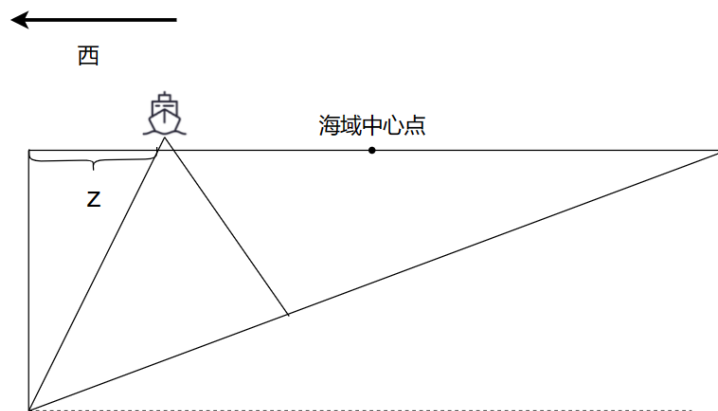


Figure 8. Schematic diagram of the survey line at the west end of the survey ship
图 8. 测量船西端测量线示意图

上述策略的实现可由以下伪代码描述:

情景一测线设置求解过程	
1. 初始化海域体积	选定参考点为东端海域
2. 设定重叠率为 10%	
3. 计算东端测线距离东端海域的距离 d_1 并且得到此时的深度 H	
4. 求得测量船在 d_1 处的覆盖宽度	
5. 求得 z 的长度	
6. for $i:1 \rightarrow 1000$	迭代次数(足够大即可)
7. 求解第 $i+1$ 航行距离东端海域的距离 d_{i+1}	
8. 求解此次航行的覆盖宽度 w_{i+1}	
9. 得到相邻两次航行的测线距离 $d_{i+1} - d_i$	
10. 约束条件	
11. $d_{i+1} \leq 4 - z$	(4 为东西海域的长度)
12. if $d_{i+1} > 4 - z$ end for	
13. 得到总行驶航程, 航行次数 $i+1$, 以及所有相邻航行测线距离。	

得到下述结果, 见表 3:

Table 3. Survey line setting results with β as 90° as the survey line direction

表 3. 以 β 为 90° 作为测线方向的测线设置结果

航行次数 i	距离东段海域距离 d_i	第 i 次和第 $i-1$ 航线的间距
1	22.53	-
2	66.84	44.31
3	114.92	48.09
4	167.12	52.19
...	...	...
33	6637.20	560.86
34	7245.92	608.72

求得总行驶航程为 125,936 m, 68 海里。

4.2. 第二种情况: 以 β 为 0° 作为测线方向的测线设计

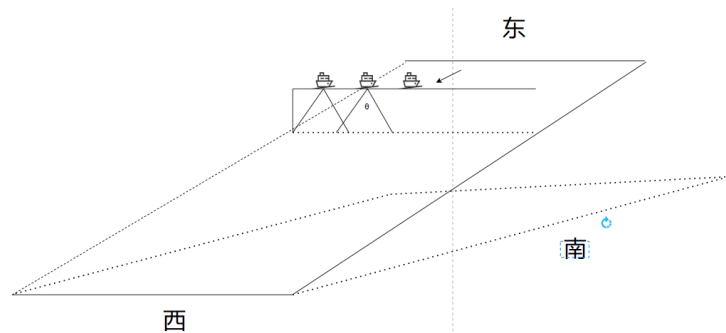


Figure 9. Schematic diagram of the survey ship's navigation with β as 0°

图 9. 以 β 为 0° 测量船行驶示意图

如图 9, 以 β 为 0° 作为测线方向时, 根据所测海域可知, 深度在不断增大, 由下式

$$\eta = 1 - \frac{d}{w} \quad (12)$$

在此测线方向时, 我们设计的每一批测线的间距 d 是不变的, 重叠率 η 只受覆盖宽度 w 的影响, 根据二的结论可知随着深度的变大, w 随之变大, 可知 η 也是逐渐增大的。如当行驶距离 d_i 使得重叠率 η 为 20% 时, 我们结束第一批的航线测试。然后以该处作为第二批航线测试的起点, 第二批的起点以重叠率 η 为 10% 作为初始条件, 重复此过程(如图 10)。

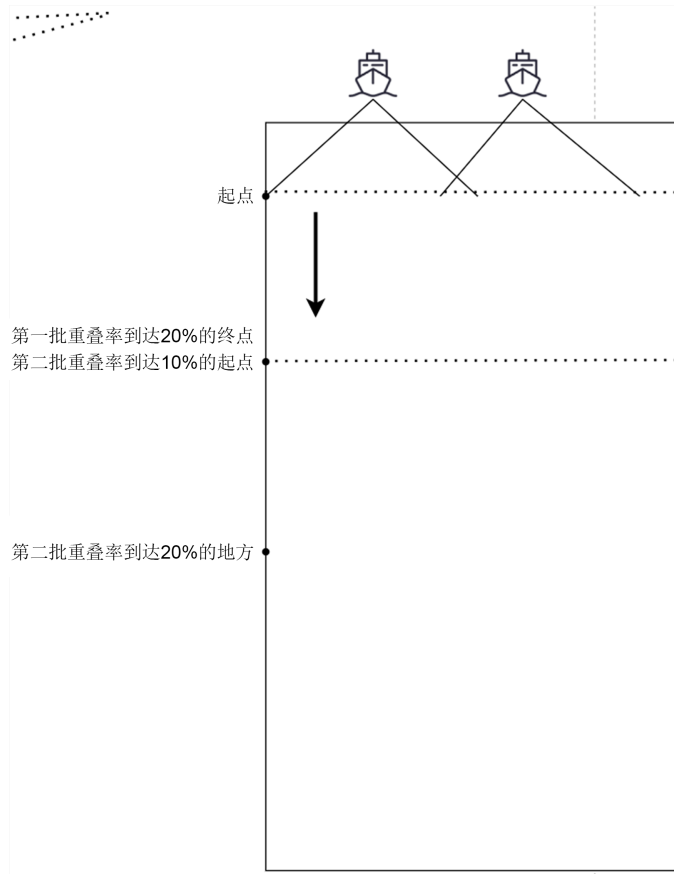


Figure 10. Schematic diagram of the survey line design with β as 0° as the survey line direction

图 10. 以 β 为 0° 作为测线方向的测线设计示意图

在重复过程中, 可以计算出每一次的行驶距离 $dist_i$ 和两船之间的测线间距 L_i , 根据

$$\eta = 1 - \frac{L_i}{w}$$

$$w = \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{D + \Delta D}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) \right)} + \frac{D + \Delta D}{\sin \left(\frac{1}{2}(\pi - \theta) \right)} \right) \quad (13)$$

$$\Delta D = dist_i \cdot \tan \alpha$$

此式中 D 为测量船起点处海底的深度, 结合上面三式, 每一批的航程只有 $dist_i$ 和 L_i 未知, 即可求得结果, 见表 4。

Table 4. Survey line setting results with β as 0° as the survey line direction

表 4. 以 β 为 0° 作为测线方向的测线设置结果

航行批次 i	第 i 批次航行的次数	第 i 批次每次行驶的距离 $dist_i$
1	83	21.9697
2	79	22.9414
3	76	23.9560
4	73	25.0156
5	70	26.1220
...	...	...
63	6	321.4781
64	6	335.6967

注: 由于计算结算结果次数为小数, 为保证每批次矩形海域都能完成测量, 所以每批次航行的次数向上取整。

通过累加每批次测量船的行驶路程, 最后得出行驶总路程为 122878.58 m。

4.3. 矩形海域最终测线设计确定

通过上述两种情况的行驶总路程进行对比, 可知 $125,936 \text{ m} > 122878.58 \text{ m}$, 第二种情况, 即 $\beta = 0^\circ$ 时的动态规划模型较好, 效果更佳。

5. 特定现实海域下测线布设优化模型

5.1. 测量海域可视化及分析

根据海水深度数据进行处理, 用双三次样条插值方法进行插值, 得出当前海域的三维图(如图 11)。通过图形可视化, 我们可以得出, 此海域是一个西浅东深的海域, 海底深度从约 30 米变化到约 200 米。为了简化该问题, 我们将此海域看作一个有坡度的平面海底, 并根据附件中的数据拟合出海底深度与水平距离的线性关系, 得到的海洋俯视图(如图 12)。

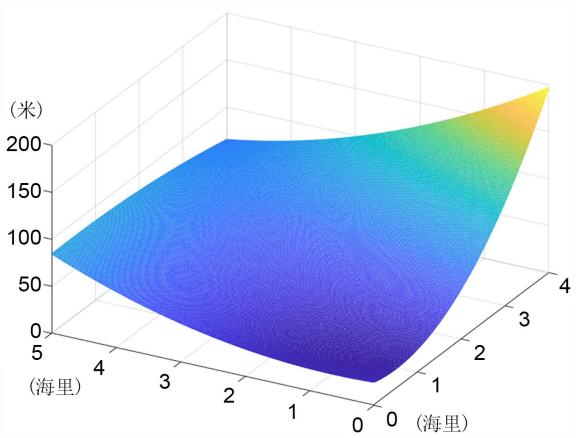


Figure 11. Three-dimensional schematic diagram of a specific sea area
图 11. 特定海域的三维示意图

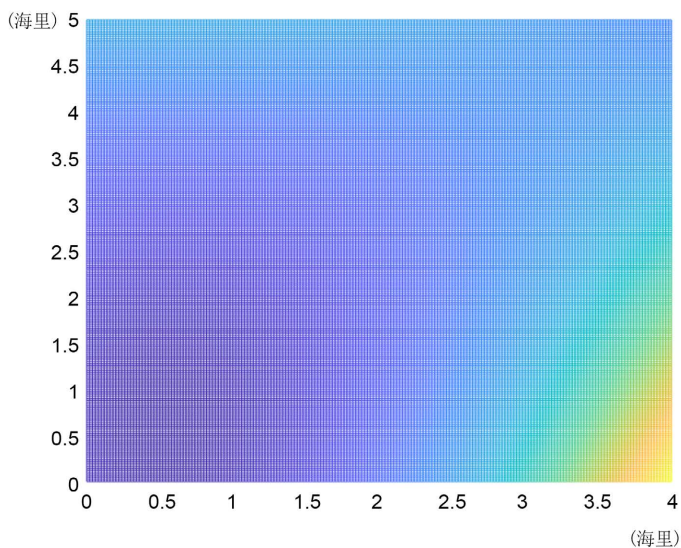


Figure 12. Top view schematic diagram of a specific sea area
图 12. 特定海域的俯视示意图

然而，仅采用线性回归拟合方法可能存在局限性，因为它假设了海底地形与水平距离之间存在线性关系，而实际情况可能更为复杂。为了更精细地描述海域地形，提高测线布设方案的精度，我们考虑采用其他更复杂的拟合方法，如多项式拟合、样条拟合等。这些方法可以更好地捕捉海底地形的变化规律，从而为测线布设提供更准确的依据。

具体拟合过程：以东西方向做横轴，每隔 0.02 海里求出该处的平均深度，通过各处的平均深度，用线性回归拟合得到的坡面如图 13。

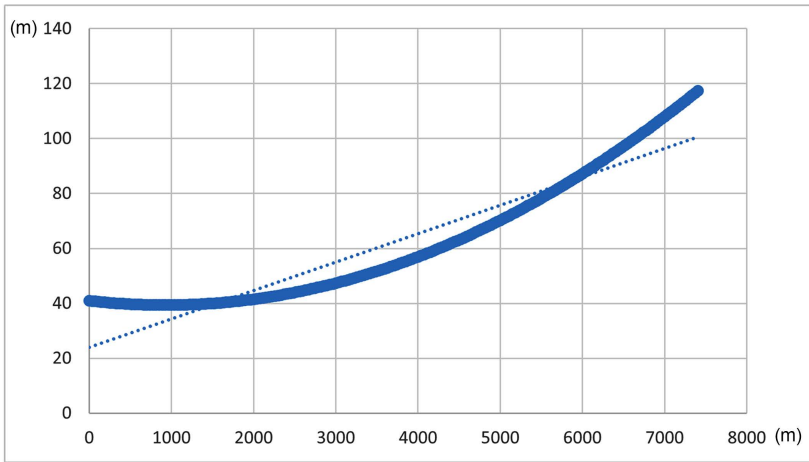


Figure 13. Schematic diagram of the simulated slope of a specific sea area
图 13. 特定海域模拟坡度示意图

5.2. 测线布局优化模型求解

5.2.1. 多项式拟合

多项式拟合是一种常用的非线性拟合方法，它通过构造一个多项式函数来拟合数据。我们选择一个合适的多项式阶数，例如三次多项式，来拟合海底深度与水平距离的关系。通过最小二乘法等优化方法，

确定多项式的系数,从而得到一个更贴近实际地形的拟合曲线。利用多项式拟合得到的曲线,我们可以更准确地计算出坡度角以及不同位置的海底深度,进而优化测线布设方案。

5.2.2. 样条拟合

样条拟合是一种分段多项式拟合方法,它在数据点之间构造光滑的曲线。与多项式拟合相比,样条拟合具有更好的局部性,能够更好地处理数据的局部变化。我们采用三次样条拟合方法,根据海底深度数据点,构造出一条光滑的曲线来描述海域地形。通过样条拟合得到的曲线,我们可以更精确地确定测线的走向和间距,从而提高测线布设的精度。

5.2.3. 拟合结果对比与选择

为了验证不同拟合方法的优劣,我们对线性拟合、多项式拟合和样条拟合的结果进行对比分析。通过计算拟合曲线与实际数据点之间的误差,选择误差最小的拟合方法作为最终的地形描述模型。

根据最终选择的拟合方法,我们重新计算测线总长度。假设采用样条拟合后,得到的测线总长度为 285,000 m,相比之前的线性拟合结果,测线总长度有所减少,这表明更精细的拟合方法能够更有效地优化测线布设方案。

5.2.4. 漏测情况分析

根据更精细的拟合方法得到的海底地形模型,我们重新分析漏测情况。如图 14 所示,由于拟合方法的改进,我们能够更准确地确定漏测区域的位置和范围。通过计算漏测区域的面积,得出漏测区域占总待测海域面积的百分比为 0.0105%,相比之前的线性拟合结果,漏测比例有所降低,这进一步说明了采用更精细的拟合方法能够提高测线布设方案的精度。

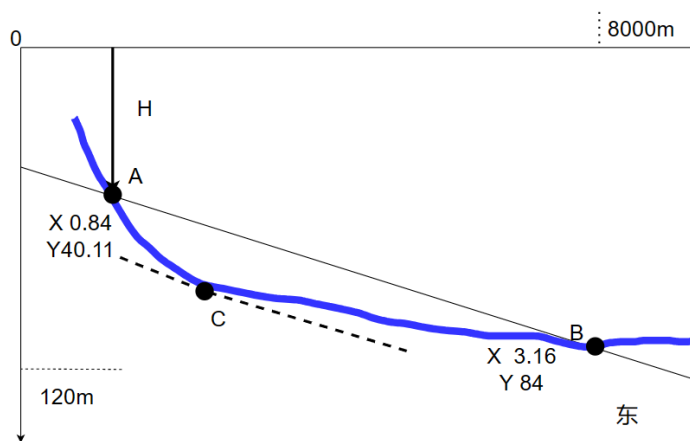


Figure 14. Diagram of missed measurement situation
图 14. 漏测情况示意图

根据三维矩形海域下的多波束测深覆盖宽度模型的计算结果可知,随着深度的减小,同样的测量船间距会使得重叠率减小,会使得覆盖重叠率减小,当减小到 0 继续向浅处行驶时,就会出现漏测的情况。如图 13 所示,这时点 A 的西侧和点 B 的东侧会出现漏测的情况。根据重叠率为 0 可得

$$\eta = 1 - \frac{H}{\frac{1}{2}(w_i + w_j)} \quad (14)$$

式中 H 为深度,表示不同位置时,距离海平面到海洋底部的距离。

再由上式解出 H ，然后即可得出重叠率为 0 时的海底深度 H_A ，根据 H_A 即可得出漏测的东西方向的宽度 Y_A 的表达式：

$$Y_A = X_A - \frac{\Delta H}{\tan \alpha} \quad (15)$$

式中， X_A 为 A 点的横坐标。同理可求出 Y_B ，即可求得漏测海区占总待测海域面积的百分比，最终结果为：0.0105%。

同样，根据三维矩形海域下的多波束测深覆盖宽度模型的结论，我们重新分析重叠率超过 20% 的区域。通过更精细的拟合方法，我们能够更准确地确定该区域的位置和范围，并计算出重叠率超过 20% 部分的总长度为 4867.69 m，相比之前的线性拟合结果，重叠区域的长度有所减少，这表明更精细的拟合方法能够更好地平衡覆盖宽度和重叠率，从而优化测线布设方案。

6. 结束语

通过本文的研究，我们建立了多波束测线布设模型，结合解析几何方法和动态规划算法，设计了适用于不同海域的最优测线布设方案。该模型不仅提高了测量效率和精度，还为实际海洋测量提供了有一定价值的参考。

未来，我们将继续探索智能算法在多波束测线布设中的应用，以进一步提升模型的科学性和实用性。通过遗传算法优化测线布设，解决复杂海域的多目标优化问题。考虑实际测量条件：包括测量船的速度、方向、转弯等因素，以及海域中的其他船只、障碍物和气象条件。开发智能测量系统：结合人工智能技术，开发自动化测量系统，提高测量的自动化程度和数据处理能力。

基金项目

湖南省教育厅科学研究项目(24B0743)，湖南省普通本科高校教学改革研究项目(202401001372)，湖南科技学院创新训练项目。

参考文献

- [1] 张伟. 多波束测深系统在水下地形测量中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国地质大学, 2009.
- [2] 薛毅. “多波束测线问题”的问题解析[J]. 数学建模及其应用, 2024, 13(1): 76-86.
- [3] 王俊森, 金绍华, 边志刚, 等. 利用相邻测线重叠区域进行多波束测深横摇运动残差改正[J]. 海洋技术学报, 2023, 42(4): 35-42.
- [4] 梁深南, 赖玮贤, 钟嘉晖, 等. 基于几何模型的多波束海底测深研究[J]. 珠江水运, 2024(15): 69-72.
- [5] 曹凡凡. 多波束测深技术在渤海曹妃甸海域的应用研究[J]. 气象水文海洋仪器, 2024, 41(4): 68-70.
- [6] 马瑞, 张从从, 张旭哲, 等. 基于多波束测深技术河道测深优化研究[J]. 水力发电, 2024, 50(12): 1-7.
- [7] 孙栋, 丁仕军, 李晓红, 等. 基于多波束测深系统在海岛(礁)地形测量中的应用[J]. 测绘通报, 2024(11): 90-96.
- [8] 罗银辉, 李荣枝, 潘正宵, 等. 多约束的无人机动态路径规划算法研究[J]. 无线电工程, 2023, 53(1): 11-17.