

带利率的经典风险模型的最优分红问题

吴微丽

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2025年3月3日; 录用日期: 2025年3月26日; 发布日期: 2025年4月8日

摘要

本文应用策略迭代算法研究带利率的经典风险模型的最优分红问题。为了克服索赔额服从一般分布的最优分红问题求解的困难, 引入了与原问题对应的一系列辅助优化问题, 通过完整求解辅助优化问题, 来给出原最优分红问题的最优策略与值函数的新刻画。同时, 借助最小非负解理论, 给出了求解最优策略和值函数的策略迭代算法。最后, 给出了数值例子。

关键词

经典风险模型, 利率, 最优分红问题, 策略迭代算法

The Optimal Dividend Problem in the Classic Risk Model under Force of Interest

Weili Wu

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 3rd, 2025; accepted: Mar. 26th, 2025; published: Apr. 8th, 2025

Abstract

The paper applies the policy iteration algorithm to study the optimal dividend problem in the classic risk model under force of interest. To overcome the difficulties in solving the optimal dividend problem when the claim amount follows a general distribution, a sequence of auxiliary optimization problems corresponding to the original problem is introduced. By solving the auxiliary optimization problems completely, a new characterization of the optimal strategy and the value function for the original optimal dividend problem is provided. Additionally, using the theory of minimal non-negative solutions, a policy iteration algorithm for solving the optimal strategy and value function

is proposed. Finally, numerical examples are presented.

Keywords

The Classical Risk Model, Interest, Optimal Dividend Problem, The Policy Iterative Algorithm

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

从公司的财务角度来看, 一个公司的价值可以用直到破产时的期望折现分红总和来衡量。De Finetti [1]在第十五届国际精算大会上首次提出了最优分红问题, 在一个简单的离散时间随机游走模型中证明了最优分红策略是障碍分红策略。Gerber [2]通过一个相关离散问题的极限研究了经典风险的最优分红问题, 证明了最优分红策略为所谓的“波段”(band)策略。当索赔额服从指数分布时, “波段策略”一般退化为“障碍策略”(或称, 1-波段策略)。借助严格的随机控制理论, Azcue 和 Muler [3]将再保险作为另一可控量研究经典风险模型的最优分红问题。其将值函数刻画为 HJB 方程最小粘性上解, 证明了最优分红策略具有波段结构。关于最优分红问题的更多研究, 读者可参见文献[4]-[6]等。

在精算学中, 公司的盈余过程通常由不同模型表示。利率是影响公司盈余变化的一个重要因素; Paulsen [7]给出了在固定的常数利率作用下公司盈余的动态变化表达式。Wu [8]等研究了常利率风险模型中的破产时和破产前的瞬间盈余以及破产赤字, 并求解了三者的联合分布; Yuen [9]等研究了常利率风险模型中的 Gerber-Shiu 函数, Albrecher 和 Thonhauser [10]研究了常利率风险模型中的最优分红问题, Gao [11]考虑了在带常利率的风险模型中的 threshold 分红策略, Fang 和 Qu [12]利用动态规划原理研究了常利率风险模型下的最优分红与注资策略。

策略迭代算法是解决马氏决策问题的经典方法。不同的迭代方案取决于参考时间序列的选择。Thonhauser 和 Albrecher [13]将干涉时刻作为参考时刻研究了经典风险模型的最优脉冲分红问题。然而, 解决 HJB 方程的最优停止问题并不比解决最优分红问题容易。与文献[13]不同, Albrecher 等人[14]将索赔到达时间作为干预时间研究了两个保险公司合作的最优分红问题。与文献[14]类似的处理方式, Liu 等人[15]研究带约束分红率更新风险模型的最优分红问题并给出了与空间时间相关的阈值分红策略。最近, Liu 等人[16]应用策略迭代算法研究了经典风险模型的最优分红问题, 得出了索赔额为一般分布的值函数与对应最优分红策略的近似解。

尽管对于经典风险模型的最优分红问题的研究已经相对成熟, 但是正如 Albrecher [5]指出索赔额服从一般分布情况的最优分红问题没有求解值函数的一般方法, 也没有严格的数值分析。因此, 精算学者将策略迭代算法引入到最优分红问题的求解过程中。本文在文献[16]的基础上考虑带利率的最优分红问题。为了克服值函数服从一般分布时给最优分红问题的求解带来的困难, 引入了一列与原问题对应的辅助优化问题。借助最小非负解理论, 证明了值函数为动态规划方程的最小非负解, 则原问题的值函数可由辅助优化问题的值函数迭代近似。利用策略迭代算法计算出索赔额分布服从一般分布的值函数和对应的最优分红策略。

论文其余部分安排如下: 第 2 部分介绍数学模型并提出研究的问题。第 3 部分证明了值函数的基本性质并描述可行策略。第 4 部分证明了值函数为动态规划方程的最小非负解。构造了与原问题对应的辅

助优化问题,证明了原问题的值函数可由辅助优化问题值函数迭代近似。第5部分为数值实验部分,给出了数值例子。

2. 模型描述

假设所有的随机变量定义在完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上,其中域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常条件,即 $\mathcal{F}_t$ 为右连续和 P 完备的。带利率的保险公司的盈余过程为:

$$X_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} U_n + i \int_0^t X_s ds,$$

其中 $x \geq 0$ 为初始盈余, c 为单位时间收到的保费; $\{N_t\}_{t \geq 0}$ 是参数为 λ 泊松过程, N_t 是直到 t 时刻累计索赔次数。索赔额 $\{U_n\}_{n \geq 1}$ 是一列独立同分布的随机变量序列,其分布函数为 F , $\{N_t\}$ 和 $\{U_n\}$ 是相互独立的。令 τ_i 表示第 i 次索赔时刻。

令 $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ 为累计分红过程。给定分红策略 L ,受控的盈余过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为:

$$X_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} U_n + i \int_0^t X_s ds - L_t.$$

对应的破产时间记为

$$\tau^L = \inf \{t \geq 0 : X_t^L < 0\}.$$

称一个分红策略 L 是可行的,如果

1. L 是递减的左连右极 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -可料过程,满足 $L_0 = 0$;
2. 分红不导致破产,即破产只可能发生在索赔到达时刻。

令 Π_x 表示所有初始盈余为 x 的可行策略的集合。给定可行策略 $L \in \Pi_x$,累计期望折现分红为

$$V_L(x) = E_x \left[\int_0^{\tau^L} e^{-\delta s} dL_s \right],$$

其中 $\delta > 0$ 是折现因子。定义值函数为

$$V(x) = \sup \{V_L(x), L \in \Pi_x\}. \quad (2.1)$$

3. 值函数性质及可允许策略的表示

本节,证明值函数的基本性质并给出可行策略的充分必要条件。

3.1. 值函数性质

引理 3.1 当 $i < \delta$ 时,值函数 V 非负且满足

$$x + \frac{c}{\lambda + \delta} \leq V(x) \leq x + \frac{\delta x + c}{\delta - i}, x \geq 0.$$

证明: 盈余过程

$$X_t^L = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} U_n + i \int_0^t X_s ds - L_t,$$

有上界,即 $L_t \leq e^{it} \left(x + c \int_0^t e^{-is} ds \right)$ 。由分布积分公式可知

$$V_L(x) = E \left[\int_0^{\tau} e^{-\delta s} dL_s \right] = E \left[\int_0^{\infty} \delta e^{-\delta s} L_s ds \right] \leq x + \int_0^{\infty} \delta e^{-\delta s} \left(\int_0^s e^{iu} (ix + c) du \right) ds = \frac{\delta x + c}{\delta - i}.$$

任意给定初始盈余 $x \geq 0$, 令可行策略 $\hat{L} \in \Pi_x$ 为在初始时刻一次性支付分红 x , 第一次索赔到达之前将保费收入全部作为分红支付, 则第一次索赔发生时, 公司会破产, 则

$$V(x) \geq V_{\hat{L}}(x) = x + cE \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} ds \right] = x + \frac{c}{\lambda + \delta}.$$

证毕。

引理 3.2 值函数 V 是递增且具有局部利普希茨性。当 $y > x \geq 0$ 时:

$$y - x \leq V(y) - V(x) \leq V(x) \left(\left(\frac{iy + c}{ix + c} \right)^{\frac{\lambda + \delta}{i}} - 1 \right).$$

证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在可行策略 $\hat{L} \in \Pi_x$, 满足 $V_{\hat{L}}(x) \geq V(x) - \varepsilon$ 。当 $y > x \geq 0$ 时, 定义策略 $L_1 \in \Pi_y^L$: 在初始时刻支付 $y - x$ 为分红, 然后采用分红策略 $\hat{L}$ 则

$$V(y) \geq V_{L_1}(y) = V_{\hat{L}}(x) + (y - x) \geq V(x) - \varepsilon + (y - x).$$

给定初始盈余 $y > x \geq 0$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 定义可行策略 $\bar{L} \in \Pi_y$ 满足: $V_{\bar{L}}(y) \geq V(y) - \varepsilon$, 令策略 $\hat{L}_1 \in \Pi_x$ 为: $X_t^{\hat{L}_1} < y$ 时不分红, 盈余值到达 y 之后以策略 $\bar{L}$ 分红。在没有索赔发生的情况下, 盈余过程 $X_t^{\hat{L}_1}$ 到达盈余值 y 的时间为 $t_0 = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{iy + c}{ix + c} \right)$, 则

$$V(x) \geq V_{\hat{L}_1}(x) \geq V_{\bar{L}}(y) e^{-(\lambda + \delta)t_0} \geq (V(y) - \varepsilon) e^{-(\lambda + \delta)t_0}.$$

由以上公式可得,

$$V(y) - V(x) \leq V(x) \left(\left(\frac{iy + c}{ix + c} \right)^{\frac{\lambda + \delta}{i}} - 1 \right).$$

证毕。

3.2. 可允许策略特点

对于任意 $x \geq 0$, 令 $\mathbb{U}_x$ 表示满足如下条件的可测函数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 的全体:

1. α 是递增左连右极函数, 并且满足 $\alpha(0) = 0$;
2. 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$, 有 $f^\alpha(t) = x + ct + i \int_0^t f^\alpha(s) ds - \alpha(t) \geq 0$ 。

定理 3.3 分红策略 L 是可行的, 当且仅当 L 可表示为

$$L_t = \begin{cases} \alpha_0(X_0^L, t), & 0 \leq t < \tau_1; \\ L_{\tau_n} + \alpha_n(X_{\tau_n}^L, t - \tau_n), & \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\alpha_0(x, \bullet) \in \mathbb{U}_{x_0}$ 是 $\mathcal{B}(R_+)$ -可测函数, $\alpha_n(x, \bullet) \in \mathbb{U}_{x_{\tau_n}^L}$ 是 $\mathcal{F}_{\tau_n} \times \mathcal{B}(R_+)$ -可测函数。

证明: (3.1)式给出的策略显然是一个可行策略, 我们只需要证明必要性。注意到 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是离散流, 即对所有 $t \in \mathbb{R}_+, n = 0, 1, \dots$ 有

$$\mathcal{F}_t \cap \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\} = \mathcal{F}_{\tau_n} \cap \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}$$

其中,

$$\mathcal{F}_0 = \sigma\{X_0\}, \mathcal{F}_{\tau_n} = \sigma\{X_0; \tau_1, U_1; \dots; \tau_n, U_n\}, n=1, 2, \dots.$$

因此存在 $\mathcal{F}_0 \times \mathcal{B}(R_+)$ 可测函数 $\alpha_0(x, \bullet)$ 和 $\mathcal{F}_{\tau_n} \times \mathcal{B}(R_+)$ 可测函数 $\alpha_n(x, \bullet)$ 使得(3.1)成立, 由 $L \in \Pi_x$ 可知 $\alpha_0(x, \bullet) \in \mathbb{U}_{x_0}$, $\alpha_n(x, \bullet) \in \mathbb{U}_{x_{\tau_n}^L}$. 证毕。

4. 辅助优化问题

本节, 为了克服索赔额服从一般分布的最优分红问题求解的困难, 引入一系列辅助优化问题。证明了原问题的值函数与辅助优化问题的值函数的收敛关系。随后将值函数刻画为动态方程的最小非负解, 则值函数可由一个零初值的函数, 即不分红的策略迭代近似。

考虑辅助优化问题。值函数 V^n 定义为

$$V^n(x) := \sup_{L \in \Pi_x} V_L^n(x), n=1, 2, \dots \quad (4.1)$$

其中, $V_L^n(x) = E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right]$, 且 $V^0(x) \equiv 0$ 。

命题 4.1 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $V^n(x)$ 递增且收敛到 $V(x)$ 。

证明: 用数学归纳法证明 $V^n(x)$ 递增, 由 $L \in \Pi_x$ 和 $V^0(x) \equiv 0$ 有,

$$V^1(x) = \sup_{L \in \Pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s \right] \geq x + E_x \left[c \int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} ds \right] = x + \frac{c}{\lambda + \delta} \geq 0,$$

故 $V^0(x) \leq V^1(x) \leq V(x)$ 。假设 $V^{n-2}(x) \leq V^{n-1}(x) \leq V(x), n=1, 2, \dots$, 由(4.1)

$$\begin{aligned} V^{n-1}(x) &= \sup_{L \in \Pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} V^{n-2}(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right] \\ &\leq \sup_{L \in \Pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right] = V^n(x) \\ &\leq \sup_{L \in \Pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} V(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right] = V(x). \end{aligned}$$

因此 $V^0(x) \leq V^1(x) \leq \dots \leq V^n(x) \leq \dots \leq V(x)$ 。

由引理 3.1 得:

$$V(x) \leq \frac{\delta x + c}{\delta - i}.$$

对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$ 使得, 当 $t > T$ 时

$$e^{-\delta t} V \left(e^{it} \left(x + c \int_0^t e^{-is} ds \right) \right) < \frac{1}{3} \varepsilon. \quad (4.2)$$

定义 $\kappa = V \left(e^{it} \left(x + c \int_0^t e^{-is} ds \right) \right) > 0$, 存在 $n_0 > 0$ 使得,

$$P \{ \tau_{n_0} \geq T \} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3\kappa}. \quad (4.3)$$

存在一个可允许策略 $L \in \Pi_x$ 使得

$$V(x) - V_L(x) < \frac{1}{3} \varepsilon. \quad (4.4)$$

定义策略 L^{n_0} 为 $L_t^{n_0} = L_{t \wedge \tau_{n_0}}$ 。

$$\begin{aligned} V_L(x) - V_{L^{n_0}}(x) &\leq E_x \left[\int_{\tau_{n_0} \wedge \tau^L}^{\tau^L} e^{-\delta t} dL_t \right] \leq E_x \left[e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} V \left(X_{\tau_{n_0} \wedge \tau^L}^L \right) \right] \\ &\leq E_x \left[I_{\{\tau_{n_0} \wedge \tau^L \geq T\}} e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} V \left(e^{\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} \left(x + c \int_0^{\tau_{n_0} \wedge \tau^L} e^{-is} ds \right) \right) \right] \\ &\quad + E_x \left[I_{\{\tau_{n_0} < T\}} e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} V \left(e^{\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} \left(x + c \int_0^{\tau_{n_0} \wedge \tau^L} e^{-is} ds \right) \right) \right] \\ &\leq E_x \left[I_{\{\tau_{n_0} \wedge \tau^L \geq T\}} e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} V \left(e^{\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau^L)} \left(x + c \int_0^{\tau_{n_0} \wedge \tau^L} e^{-is} ds \right) \right) \right] + \kappa P\{\tau_{n_0} < T\} \leq \frac{2}{3} \varepsilon, \end{aligned}$$

由(4.2), (4.3)两式可得

$$V(x) \leq V_L(x) + \frac{1}{3} \varepsilon \leq V_{L^{n_0}}(x) + \varepsilon. \quad (4.5)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} V_{L^{n_0}}(x) &= E_x \left[\int_0^{\tau_{n_0}-1} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + E \left[\int_{\tau_{n_0}-1}^{\tau_{n_0}} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} \middle| \tau_{n_0-1}, X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right] \right] \\ &= E_x \left[\int_0^{\tau_{n_0}-1} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + e^{-\delta \tau_{n_0-1}} E \left[\int_0^{\tau_{n_0}-\tau_{n_0-1}} e^{-\delta s} dL_{\tau_{n_0-1}+s}^{n_0} \middle| \tau_{n_0-1}, X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right] \right] \\ &\leq E_x \left[\int_0^{\tau_{n_0}-1} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + e^{-\delta \tau_{n_0-1}} V^1 \left(X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{假设, } V_{L^{n_0}}(x) \leq E_x \left[\int_0^{\tau_{n_0}-k} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + e^{-\delta \tau_{n_0-k}} V^k \left(X_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}} \right) \right]$$

由(4.1)可知

$$\begin{aligned} &E \left[\int_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{\tau_{n_0}-k} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + e^{-\delta \tau_{n_0-k}} V^k \left(X_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}} \right) \middle| \tau_{n_0-(k+1)}, X_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}} \right] \\ &= e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} E \left[\int_0^{\tau_{n_0}-k-\tau_{n_0-(k+1)}} e^{-\delta s} dL_{\tau_{n_0-(k+1)}+s}^{n_0} + e^{-\delta \tau_{n_0-k}} V^k \left(X_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}} \right) \middle| \tau_{n_0-(k+1)}, X_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}} \right] \\ &\leq e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} V^{k+1} \left(X_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{因此, } V_{L^{n_0}}(x) \leq E_x \left[\int_0^{\tau_{n_0-(k+1)}} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} V^{k+1} \left(X_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}} \right) \right], k = 0, 1, \dots, n_0 - 2.$$

于是, 当 $k = n_0 - 2$ 时

$$V_{L^{n_0}}(x) \leq E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s^{n_0} + e^{-\delta \tau_1} V^{n_0-1} \left(X_{\tau_1}^{L^{n_0}} \right) \right] \leq V^{n_0}(x).$$

由(4.5)可得, 当 $n > n_0$ 时

$$V(x) \leq V_{L^{n_0}}(x) + \varepsilon \leq V^n(x) + \varepsilon.$$

证毕。

定理 4.2 值函数 V 是如下方程的最小非负解

$$V(x) = \sup_{L \in \pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} V \left(X_{\tau_1}^L \right) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right]. \quad (4.6)$$

如果问题(4.6)存在最优的一步分红策略 $\alpha^*(x, t), 0 \leq t < \tau_1$, 其中 $x \geq 0$, $\alpha^*(x, \bullet) \in U_x$ 且 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ -可测,

则如下策略是优化问题(2.1)的最优分红策略:

$$L_t^* = \begin{cases} \alpha^*(X_0^L, t), & 0 \leq t < \tau_1 \\ L_{\tau_n} + \alpha^*(X_{\tau_n}^L, t - \tau_n), & \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

证明: 由动态规划原理可知, 值函数 $V(x)$ 是(4.6)的一个非负解。假定存在另一个函数 $\bar{V}(x)$ 是(4.6)的一个非负解, 则 $\bar{V}(x) \geq V^0(x) \equiv 0$ 。假设 $\bar{V}(x) \geq V^{n-1}(x)$, 则

$$\begin{aligned} \bar{V}(x) &= \sup_{L \in \Pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} \bar{V}(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right] \\ &\geq \sup_{L \in \Pi_x} E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right] = V^n(x). \end{aligned}$$

对任意的 n , 有 $\bar{V}(x) \geq V^n(x)$ 。由 $V^n(x) \rightarrow V(x)$, 可得 $\bar{V}(x) \geq V(x)$ 。因此值函数 $V(x)$ 是动态规划方程的最小非负解。

假设 $\alpha^*(X_0^L, t), 0 \leq t < \tau_1$ 是最优的一步分红策略, 下面证明 L^* 是最优的分红策略。则

$$V(x) = E_x \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} dL_s^* + e^{-\delta \tau_1} V(X_{\tau_1}^L) I_{\{\tau_1 < \tau\}} \right].$$

由数学归纳法可知, 对任意的 n

$$V(x) = E_x \left[\int_0^{\tau_n \wedge \tau} e^{-\delta s} dL_s^* + e^{-\delta \tau_n} V(X_{\tau_n}^L) I_{\{\tau_n < \tau\}} \right],$$

由于, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E_x \left[e^{-\delta \tau_n} V(X_{\tau_n}^L) I_{\{\tau_n < \tau\}} \right] \rightarrow 0$ 令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$V(x) = E_x \left[\int_0^{\tau} e^{-\delta t} dL_s^* \right].$$

定理 4.2 不仅提供了一种值函数的迭代求解方法, 而且证明了(4.6)式中最优的一步分红策略能够推广并得到最优的分红策略。

下面应用文献[16]的方法, 后文给出辅助优化问题(4.1)的完整求解过程。

辅助优化问题(4.1)的值函数满足的 HJB 方程

$$\max \left\{ (c + ix)(V^n)'(x) - (\lambda + \delta)V^n(x) + \lambda \mathcal{G}V^n(x), 1 - (V^n)'(x) \right\} = 0,$$

其中, $\mathcal{G}V^n(x) = \int_0^x V^n(x-y) dF(y)$ 。

令

$$G^n(x) = \frac{c + ix}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \mathcal{G}V^n(x).$$

任意给定 $a \in R_+$, $W_a^n(x)$ 是方程 $(c + ix)(V^n)'(x) - (\lambda + \delta)V^n(x) + \lambda \mathcal{G}V^n(x) = 0$ 满足条件 $W_a^n(a) = G^n(a)$ 的解, 则

$$W_a^n(x) = \left(\frac{ia + c}{ix + c} \right)^{\frac{\lambda + \delta}{i}} \left(\frac{c + ia}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \mathcal{G}V^n(a) \right) + \int_x^a \frac{\lambda}{iu + c} \left(\frac{iu + c}{ix + c} \right)^{\frac{\lambda + \delta}{i}} \mathcal{G}V^n(u) du;$$

令 $U_a^n(x) = G^n(a) + x - a$ 。

定义

$$G_{\max}^n(x) := \max_{0 \leq u \leq x} (G^n(u) - u).$$

记 $\mathcal{A}_n$ 是 $G_{\max}^n(x)$ 所有常值区间的左端点的集合, 则 $\mathcal{A}_n$ 是非空可数集合且有上界。假设 $\mathcal{A}_n$ 含有有限个点, 即

$$\mathcal{A}_n = \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_{d^n}^n\}, 0 \leq a_i^n \leq a_{i+1}^n, \text{ 且 } i = 1, 2, \dots, d^n.$$

令

$$a_1^{n*} = \min \arg \max \{W_a^n(0) : a^n \in \mathcal{A}_n\} \quad (4.7)$$

$$a_i^{n*} = \min \arg \max \{W_a^n(0) : a^n \in \mathcal{A}_n \text{ 且 } a^n > a_{i-1}^{n*}\} \quad (4.8)$$

$$b_i^{n*} = \max \{b : W_{a_{i+1}^{n*}}^n(b) = U_{a_i^{n*}}^n(b), a_i^{n*} \leq b < a_{i+1}^{n*}\} \quad (4.9)$$

其中 $i = 1, \dots, d^{n*} - 1$, $d^{n*} = \max \{i : a_i^{n*} < \infty\}$, 则 $\mathcal{A}_n^* = \{a_1^{n*}, a_2^{n*}, \dots, a_{d^{n*}}^{n*}\}$, $\mathcal{B}_n^* = \left[\bigcup_{i=1}^{d^{n*}-1} (a_i^{n*}, b_i^{n*}] \cup (a_{d^{n*}}^{n*}, \infty) \right)$ 。

定理 4.3 假设集合 $\mathcal{A}_n$ 含有有限个点, 则值函数 $V^n(x)$ 为:

$$V^n(x) = \begin{cases} W_{a_1^{n*}}^n(x), 0 \leq x \leq a_1^{n*}; \\ U_{a_i^{n*}}^n(x), a_i^{n*} < x \leq b_i^{n*} \text{ 且 } i = 1, 2, \dots, d^{n*}; \\ W_{a_{i+1}^{n*}}^n(x), b_i^{n*} < x \leq a_{i+1}^{n*} \text{ 且 } i = 1, 2, \dots, d^{n*} - 1; \\ U_{a_{d^{n*}}^{n*}}^n(x), x \geq a_{d^{n*}}^{n*}. \end{cases} \quad (4.10)$$

且最优分红策略 L^* 是波段策略, 满足 $V_{L^*} = V$ 有着波段分割

$$\mathcal{A}_n^* = \{a_1^{n*}, a_2^{n*}, \dots, a_{d^{n*}}^{n*}\}, \mathcal{B}_n^* = \left[\bigcup_{i=1}^{d^{n*}-1} (a_i^{n*}, b_i^{n*}] \cup (a_{d^{n*}}^{n*}, \infty) \right), C_n^* = [0, a_1^{n*}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{d^{n*}-1} (b_i^{n*}, a_{i+1}^{n*}) \right).$$

5. 算法及数值实验

定义 5.1 $\bar{S}_n = \{s_1^n, s_2^n, \dots, s_{d^n}^n\}$, S_n 收敛 S 当且仅当 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_i^n - s_i| = 0$ 。

命题 5.2 假设当 $n \geq 1$ 时 $\mathcal{A}_n^*, \mathcal{B}_n^*$ 有定义, 如果存在子列 $\{\mathcal{A}_{n_k}^*\}, \{\mathcal{B}_{n_k}^*\}$ 使得 $\mathcal{A}_{n_k}^*, \mathcal{B}_{n_k}^*$ 分别收敛到 $\mathcal{A}_n^*, \mathcal{B}_n^*$, 值函数 V 与具有波段划分 $\mathcal{A}_n^*, \mathcal{B}_n^*$ 的波段策略对应的值函数相对应。

5.1. 策略迭代算法

下面给出求解值函数以及最优分红策略的策略迭代算法。

步骤 0 令 $n = 0$ 且 $V^0(x) = 0$,

步骤 1 策略优化

(a) 解方程 $G'(x^+) = 1$, 即

$$\left((c + ix^+) + \mathcal{G}V^{n-1}(x^+) \right)' = \lambda + \delta$$

得到所有解的集合记为 $\mathcal{S}_n$;

(b) $\mathcal{A}_n$ 是下列所有 a_i^n 的集合, 其中, $a_0^n = 0$

$$a_i^n := \min \{a > a_{i-1}^n : a \in \mathcal{S}_n \text{ 且 } (c + ia) + \mathcal{G}V^{n-1}(a) > (c + ia_{i-1}^n) + \mathcal{G}V^{n-1}(a_{i-1}^n)\}$$

(c) 所有的 a_i^{n*} 由下式递归

$$a_1^{n*} = \min \arg \max \{W_a^n(0) : a \in \mathcal{A}_n\}$$

并且

$$a_i^{n*} = \min \arg \max \{W_a^n(0) : a \in \mathcal{A}_n \text{ 且 } a > a_{d^{n-1}}^{n*}\}$$

(d) 解方程 $W_{a_i^{n*}}^n(x) = U_{a_i^{n*}}^n(x)$ 得出 b_i^{n*} 。

$$W_a^n(x) = \left(\frac{ia+c}{ix+c}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{i}} \left(\frac{c+ia}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \mathcal{G}V^{n-1}(a)\right) + \int_x^a \frac{\lambda}{iu+c} \left(\frac{iu+c}{ix+c}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{i}} \mathcal{G}V^{n-1}(u) du,$$

$$\text{且 } U_a^n(x) = \frac{c+ia}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \mathcal{G}V^{n-1}(a) + x - a.$$

$$\text{令 } \mathcal{B}_n^* = \bigcup_{i=1}^{d^{n*}-1} (a_i^{n*}, b_i^{n*}] \cup (a_d^{n*}, \infty)$$

步骤 2 策略计算——在第 n 次迭代。通过(4.10)计算 V^n 。

步骤 3 停止迭代——任给 $\varepsilon > 0$ 如果 $\sup_i |a_i^{n*} - a_{i-1}^{n*}| < \varepsilon$ ，停止迭代。

否则重复步骤(2)且 $n = n+1$ 。

5.2. 数值例子

例 1 (指数分布)。假设索赔额分布为指数分布，概率密度函数为 $f(x) = \beta e^{-\beta x}$ ，取参数 $c = 2.5, \lambda = 2, \beta = 1, \delta = 0.1, i = 0.05$ 。函数 $V(x) - x, G(x) - x$ 图像如图 1，图像显示两函数相交于 $a_1^* = 4.8198$ ，对应的障碍策略为 $A^* = \{4.8198\}, B^* = (4.8198, +\infty)$ 和 $C^* = [0, 4.8198)$ 。

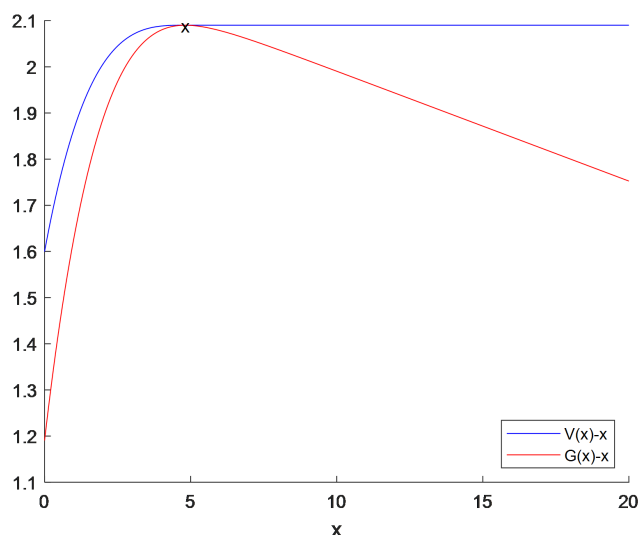


Figure 1. The claim amount obeys exponential distribution
图 1. 索赔额服从指数分布

例 2 (伽马分布)。假设伽马分布的索赔额分布为 $\Gamma(\alpha, \beta)$ ，概率密度函数为 $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ 。令

$c = 20, \lambda = 8, \beta = 1, \delta = 0.5, i = 0.05$ 。函数 $V(x) - x, G(x) - x$ 图像如图 2，图像显示两函数相交于 $a_1^* = 0$ ，

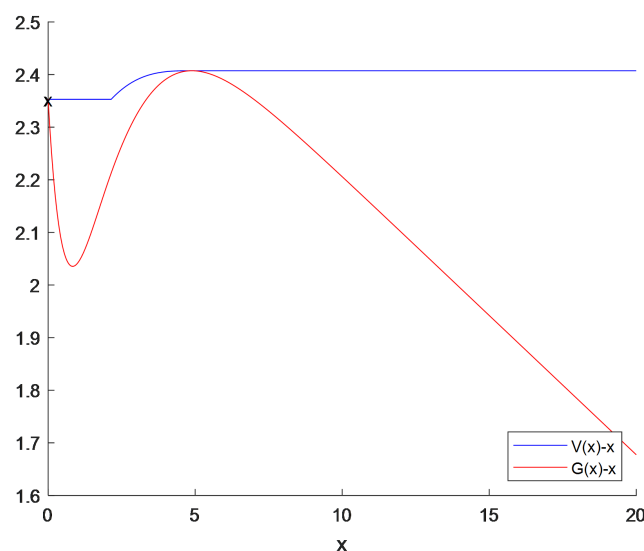


Figure 2. Claim amount obeys gamma distribution

图 2. 索赔额服从伽马分布

$a_2^* = 4.8888$ ，对应的波段策略为 $A^* = \{0, 4.8888\}$, $B^* = (0, 2.1441] \cup (4.8888, \infty)$ 和 $C^* = (2.1441, 4.8888)$ 。

参考文献

- [1] De Finetti, B. (1957) Su un'Impostazione Alternativa Della Teoria Collettiva del Rischio. *Transactions of the 15th International Congress of Actuaries*, 2, 433.
- [2] Gerber, H.U. (1969) Entscheidungskriterien Für Den Zusammengesetzten Poisson-Prozess. Doctoral Thesis, ETH zürich.
- [3] Azcue, P. and Muler, N. (2005) Optimal Reinsurance and Dividend Distribution Policies in the Cramér-Lundberg Model. *Mathematical Finance*, 15, 261-308. <https://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2005.00220.x>
- [4] Kulenko, N. and Schmidli, H. (2008) Optimal Dividend Strategies in a Cramér-Lundberg Model with Capital Injections. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43, 270-278. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.013>
- [5] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009) Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 103, 295-320. <https://doi.org/10.1007/bf03191909>
- [6] Schmidli, H. (2008) Stochastic Control in Insurance. Springer.
- [7] Paulsen, J. (1993) Risk Theory in a Stochastic Economic Environment. *Stochastic Processes and Their Applications*, 46, 327-361. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(93\)90010-2](https://doi.org/10.1016/0304-4149(93)90010-2)
- [8] Wu, R., Wang, G. and Zhang, C. (2005) On a Joint Distribution for the Risk Process with Constant Interest Force. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 365-374. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.03.001>
- [9] Yuen, K.C., Wang, G. and Li, W.K. (2007) The Gerber-Shiu Expected Discounted Penalty Function for Risk Processes with Interest and a Constant Dividend Barrier. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40, 104-112. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.03.002>
- [10] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2008) Optimal Dividend Strategies for a Risk Process under Force of Interest. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43, 134-149. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.03.012>
- [11] Gao, S. and Liu, Z. (2010) The Perturbed Compound Poisson Risk Model with Constant Interest and a Threshold Dividend Strategy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233, 2181-2188. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.10.004>
- [12] Fang, Y. and Qu, Z. (2013) Optimal Dividend and Capital Injection Strategies for a Risk Model under Force of Interest. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID: 750547. <https://doi.org/10.1155/2013/750547>
- [13] Thonhauser, S. and Albrecher, H. (2011) Optimal Dividend Strategies for a Compound Poisson Process under Transaction Costs and Power Utility. *Stochastic Models*, 27, 120-140. <https://doi.org/10.1080/15326349.2011.542734>
- [14] Albrecher, H., Azcue, P. and Muler, N. (2017) Optimal Dividend Strategies for Two Collaborating Insurance Companies.

-
- Advances in Applied Probability*, **49**, 515-548. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.11>
- [15] Liu, Y., Liu, Z. and Liu, G. (2020) Optimal Dividend Problems for Sparre Andersen Risk Model with Bounded Dividend Rates. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2020**, 128-151. <https://doi.org/10.1080/03461238.2019.1655475>
- [16] Liu, G., Liu, X. and Liu, Z. (2022) The Policy Iteration Algorithm for a Compound Poisson Process Applied to Optimal Dividend Strategies under a Cramér-Lundberg Risk Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **413**, Article 114368. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114368>