

冠图 $P_n \circ P_m$ 的两种度结合边重构数

杨盈意*, 李 鹏, 薛心怡

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2025年3月3日; 录用日期: 2025年3月26日; 发布日期: 2025年4月8日

摘 要

本文研究了冠图 $P_n \circ P_m$ 的重构性及其两种度结合边重构数。通过分析冠图 $P_n \circ P_m$ 边主子图的结构, 确定冠图 $P_n \circ P_m$ 所有可能的扩展及其度结合边主子图; 利用图同构的必要条件和充分条件, 探索冠图 $P_n \circ P_m$ 扩展的度结合边主子图与冠图 $P_n \circ P_m$ 度结合边主子图的同构情况; 结合上下界逼近法证明了冠图 $P_n \circ P_m$ 的可重构性, 确定了它的两种度结合边重构数。

关键词

图论, 图同构, 重构猜想, 度结合边重构数, 冠图

Two Kinds of Degree Associated Edge Reconstruction Numbers of Corona Graph $P_n \circ P_m$

Yingyi Yang*, Peng Li, Xinyi Xue

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Mar. 3rd, 2025; accepted: Mar. 26th, 2025; published: Apr. 8th, 2025

Abstract

The investigation covers the reconfigurability of the corona graph $P_n \circ P_m$ and explores two kinds of degree associated edge reconstruction numbers. By analyzing the structure of the edge-card of the corona graph $P_n \circ P_m$, determine all possible extensions of the corona graph $P_n \circ P_m$ and its degree associated edge-card. Explore the isomorphism between the degree associated edge-card of

*通讯作者。

the corona graph $P_n \circ P_m$ extension and the corona graph $P_n \circ P_m$ by utilizing the necessary and sufficient conditions of graph isomorphism. Using the upper and lower bounds approximation method, the reconfigurability of the corona graph $P_n \circ P_m$ is proved, and its two kinds of degree associated edge reconstruction numbers are identified.

Keywords

Graph Theory, Graph Isomorphism, Reconstruction Conjecture, Degree Associated Edge Reconstruction Number, Corona Graph

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图重构猜想是图论中至今未被解决的重要问题之一。图重构猜想最早由 *Ulam* [1] 和 *Kelly* [2] [3] 提出：指每个至少有 3 个顶点的图都能唯一地被它的主子图集所确定。其后，*Harary* [4] 提出边重构猜想，即至少含有 4 条边的图能够被它的边主子图集所确定。

当前关于图重构猜想已有较丰富的成果。2012 年，*Monikandan* [5] 等为研究图的重构数提供了新的方法，并运用图同构的充分条件与必要条件，确定了当图 G 为正则图、完全二部图、路、轮图、双星图和平衡三部图时，图 G 的度结合边重构数 ($dern(G)$) 和一致度结合重构数 ($adern(G)$)。2015 年，*Monikandan* [6] 等通过分析冠图 $K_n \circ K_m, C_n \circ C_m, P_n \circ K_m, K_n \circ C_m$ 和 $K_n \circ P_m$ 的结构，确定了这些图的两度结合边重构数。2016 年，*黄陈辰* [7] 等探究了冠图 $P_n \circ C_m$ 的度结合边重构数，进一步丰富了冠图重构猜想的研究内容。关于图重构猜想问题还有如下重要进展：2019 年~2021 年，*Monikandan* 与他的团队对距离遗传图 [8]、双正则图 [9]、2-连通图 [10]、强双扫帚图 [11] 等图类的重构猜想问题进行了大量研究，推动了图重构猜想的研究。其他学者对图重构猜想问题的研究也作出了许多贡献：2020 年，*Douglas* [12] 提出从图的诱导子图重构原图的方法。2021 年 *Garamvölgyi* [13] 等结合代数几何的知识研究具有特殊性质图的弱可重构性与强可重构性。2022 年，*Hosaka* [14] 研究了有限简单图和相关有向图的重构猜想。*Kapuhennayake* [15] 根据网图与轮图的度序列对原始图进行了重构。2024 年 *Clifton* [16] 等研究了无三角形图的重构与边重构，证明了直径为 2 且连通度为 3 的任意无三角形图的重构猜想成立。图重构猜想问题的研究不仅丰富和发展了图结构理论，而且也在计算机网络 [17]、鲁棒优化 [18] 方面有较好的应用。

冠图是两个或两个以上图的合并，经过冠积后可以生成巨大的节点网络，冠图也常常被用于理解化合物的结构、网络建模 [19] 等方面。虽然图重构猜想问题已经在很多图类上展开探讨，但关于冠图 $P_n \circ P_m$ 的重构猜想问题研究较少，因此本文在前人研究基础上，基于冠图 $P_n \circ P_m$ 的复杂结构，探究冠图 $P_n \circ P_m$ 的可重构性及其两度结合边重构数。

2. 基础知识

本节介绍相关的基本术语与符号，其他未加说明的术语与符号参见文献 [20]。本文所研究的图均为非空的、有限的无向简单图。一个无向图 G 是一个有序二元组 $\langle V, E \rangle$ ，记作 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 V 是一个非空集合， V 中的元素称为结点或顶点； E 是无序积 $V \times V$ 的多重子集 (元素可重复出现的集合)，称 E 是 G 的边集， E 中的元素称为无向边或简称为边。设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一无向图， $v \in V$ ，与 v 相关联边的次数称为 v

的度数, 简称为度, 记作 $d(v)$ 。在一个无向图 G 中, 若存在结点 v_i 到 v_j 的通路(当然也存在 v_j 到 v_i 的通路), 则称 v_i 与 v_j 是连通的。若无向图 G 中任意两个节点都是连通的, 则称图 G 是连通图。关联于同一对顶点的两条边称为平行边。不含平行边和环的图称为简单图。一条路径是一个简单图, 其顶点排序可以使得两个顶点是邻接的当且仅当它们在顶点的序列中是前后相继的。设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若存在 $V' \subseteq V$ ($E' \subseteq E$), 且 $V' \neq \emptyset$ ($E' \neq \emptyset$) 使得 $\omega(G - V') > \omega(G)$ ($\omega(G - E') > \omega(G)$), 而对于任意的 $V'' \subset V$ ($E'' \subset E$) 有 $\omega(G - V'') = \omega(G)$ ($\omega(G - E'') = \omega(G)$), 则称 V' 是 G 的点割集(E' 是 G 的边割集); 若 V' (E') 是单元集, 即 $V' = \{v\}$ ($E' = \{e\}$), 则称 v 为割点(e 为割边)。

图 G_1 和图 G_2 的冠图, 指图 G_1 的一个拷贝和图 G_2 的 $|V(G_1)|$ 个拷贝, 满足图 G_1 的第 k 个顶点与图 G_2 的第 k 个拷贝上的每个顶点相连, 记为 $G_1 \circ G_2$ 。边主子图, 即图 G 删去一条边 e 后得到的子图。度结合边主子图, 即一个有序对 $(G - e, d(e))$, 由一个边主子图 $G - e$ 与被删除边的度 $d(e)$ 组成, 其中 $d(e) = d(u) + d(v) - 2$, 点 u, v 为边 e 的两结点。在图 G 中, 由度结合边主子图 $(G - e, d(e))$ 添加一条 $d(e)$ 度边后得到的图称为图 $(G - e, d(e))$ 的扩展。度结合边重构数, 指能够重构图 G 所需的度结合边主子图的最少个数, 记为 $dern(G)$; 一致度结合边重构数: 即任意 k 个度结合边主子图都能重构图 G 的最小整数 k , 记为 $adern(G)$ 。对于每个图 G , 都有 $dern(G) \leq adern(G)$ 。

3. 主要结果

本文主要研究了冠图 $P_n \circ P_m$ 的两种度结合边重构数, 对于图 G , 为了证明 $dern(G) = k$ ($adern(G) = k$) 按下列步骤即可:

(1) 确定图 G 的度结合边主子图; (2) 确定图 G 的每一个度结合边主子图所有可能的扩展; (3) 证明除图 G 外至少有一个扩展(除 G 以外每一个扩展)与图 G 最多有 $k - 1$ 个相同的度结合边主子图, 且存在图 H' 与图 G 有 $k - 1$ 个相同的度结合边主子图。

定义 1 从简单图 G 到简单图 H 的同构是一个双射 $f: V(G) \rightarrow V(H)$, 使得 $uv \in E(G)$ 当且仅当 $f(u)f(v) \in E(H)$, 记为 $G \cong H$ [20]。

引理 1 图 G 与图 H 同构的 4 个必要条件:

(1) 顶点数相等; (2) 边数相等; (3) 度序列相同; (4) 割边(点)数相等

证明: 由定义 1, 两图若同构, 则可在两图的顶点之间、边与边之间找到一一对应关系, 使得图 G 的顶点为 u, v 的每一条边映射到一条顶点为 $f(u)$ 和 $f(v)$ 的边, 即两图若同构, 两图的顶点数、边数、度序列、割边(点)数相同。

引理 2 两个图同构当且仅当它们对应的邻接矩阵可以通过一系列的行列互换从一个图变换到另一个图[21]。

结合两图同构的充分条件与必要条件得出如下推论与定理:

推论 1 若在度结合边主子图 $(G - e, d(e))$ 中, 任意添加一条不同于边 e 的边 e' , 都不能使得 $d(e) = d(e')$, 则度结合边主子图 $(G - e, d(e))$ 可重构图 G 。

证明: 考虑在图 $G - e$ 中任意添加一条不同于边 e 的边 e' , 记添加边 e' 后的图为 H' , 若不存在边 e' , 使得 $d(e') = d(e)$, 则当且仅当边 e' 与边 e 相同时, 有 $H' \cong G$, 即度结合边主子图 $(G - e, d(e))$ 除图 G 外无其余扩展; 故度结合边主子图 $(G - e, d(e))$ 可重构图 G , 证毕。 □

$$\text{引理 3 令 } G = P_n \circ P_1, \text{ 则: } dern(G) = \begin{cases} 2, & n \neq 1, 2, 4 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}, adern(G) = \begin{cases} 1, & n = 1, 2 \\ 3, & n = 3 \\ 4, & n > 3 \end{cases} [6].$$

引理 4 令 $G = P_1 \circ P_m$, 则: $dern(G) = 1$, $adern(G) = \begin{cases} 1, & m \leq 4 \\ 3, & m > 4 \end{cases}$ [6]。

定理 1 令 $G = P_n \circ P_m (m \geq 2, n \geq 2)$, 则: $dern(G) = \begin{cases} 2, & m = 3, n \geq 5 \text{ 或 } m = 3, n = 3 \text{ 或 } m = 4, n \geq 5 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$ 。

证明: **情况 1:** $m = 2$ 。 $G = P_n \circ P_2$, 在图 G 中取一条 2 度边 e , 如图 1 边 $x_{1,1}x_{1,2}$, 其度结合边主子图为 $(G-e, 2)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与边 e 不同的边 e' , $d(e') = 3$ 或 4 或 5 或 6 或 7 或 8, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 2)$ 可重构图 G 。故 $dern(G) = 1$ 。

情况 2: $m = 3$

情况 2.1: 当 $n = 2$ 时, $G = P_2 \circ P_3$, 在图 G 中取一条 6 度边 e , 如图 1 边 z_1z_2 , 其度结合边主子图为 $(G-e, 6)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与边 e 不同的边 e' , $d(e') = 4$ 或 5, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 6)$ 可重构图 G 。故 $dern(G) = 1$ 。

情况 2.2: 当 $n = 4$ 时, $G = P_4 \circ P_3$, 在图 G 中取一条 8 度边 e , 如图 1 边 z_2z_3 , 其度结合边主子图为 $(G-e, 8)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与边 e 不同的边 e' , $d(e') = 4$ 或 5 或 6 或 7, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 8)$ 可重构图 G 。故 $dern(G) = 1$ 。

情况 2.3: 当 $n = 3$ 或 $n \geq 5$ 时, $G = P_n \circ P_3$, 在图 G 中取一条 3 度边 e , 如图 1 边 $x_{2,1}x_{2,2}$, 其度结合边主子图为 $(G-e, 3)$, 令 H' 为 $(G-e, 3)$ 中添加一条 3 度边 e' 后得到的图, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 3$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n-1$ 条割边, 而 $G-e$ 有 n 条割边, 即 $(H' - e'') \not\cong (G-e, 3)$, 所以图 H' 与图 G 有 1 个相同的度结合边主子图 $(G-e, 3)$ 。下面考虑图 G 的其余度结合边主子图, 在度结合边主子图 $(G-e, d(e))$ 中任意添加一条 $d(e)$ 度边 e' , 若 $d(e) = 4$, 边 e' 连接一个 1 度点与一个 3 度点或两个 2 度点; 若 $d(e) = 5$, 边 e' 连接一个 2 度点与一个 3 度点或一个 4 度点与一个 1 度点; 若 $d(e) = 7$, 边 e' 连接一个 4 度点与一个 3 度点或一个 2 度点与 5 度点; 若 $d(e) = 6$, 边 e' 连接两个 3 度点或一个 2 度点与一个 4 度点; 若 $d(e) = 8$, 边 e' 连接一个 5 度点与一个 3 度点或两个 4 度点。即总能找到一个图 H' 与图 G 有相同的度结合边主子图。故 $dern(G) = 2$ 。

情况 3: $m = 4$

情况 3.1: 当 $n = 2$ 时, $G = P_2 \circ P_4$, 在图 G 中取一条 8 度边 e , 如图 1 边 z_1z_2 , 其度结合边主子图为 $(G-e, 8)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与边 e 不同的边 e' , $d(e') = 4$ 或 5 或 6 或 7, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 8)$ 可重构图 G 。故 $dern(G) = 1$ 。

情况 3.2: 当 $n = 3$ 时, $G = P_3 \circ P_4$, 在图 G 中取一条 9 度边 e , 如图 1 边 z_1z_2 , 其度结合边主子图为 $(G-e, 9)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与 e 不同的边 e' , $d(e') = 4$ 或 5 或 6 或 7 或 8, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 9)$ 可重构图 G 。故 $dern(G) = 1$ 。

情况 3.3: 当 $n = 4$ 时, $G = P_4 \circ P_4$, 在图 G 中取一条 10 度边 e , 如图 1 边 z_2z_3 , 其度结合边主子图为 $(G-e, 10)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与 e 不同的边 e' , $d(e') = 4$ 或 5 或 6 或 7 或 8, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 10)$ 可重构图 G 。故 $dern(G) = 1$ 。

情况 3.4: 当 $n \geq 5$ 时, $G = P_n \circ P_4$, 在图 G 中取一条 3 度边 e , 如图 1 边 $x_{2,1}x_{2,2}$, 其度结合边主子图为 $(G-e, 3)$, 令 H' 为 $(G-e, 3)$ 中添加一条 3 度边 e' 后的图, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 3$, 此时图 $H' - e''$ 至多有 $n-1$ 条割边, 而图 $G-e$ 有 n 条割边, 即 $(H' - e'') \not\cong (G-e, 3)$, 故图 H' 与图 G 有 1 个相同的度结合边主子图 $(G-e, 3)$ 。下面考虑图 G 的其余度结合边主子图, 在度结合边主子图 $(G-e, d(e))$ 中添加一条 $d(e)$ 度边 e' , 若 $d(e) = 5$, 边 e' 连接一个 2 度点与一个 3 度点或一个 4 度点与一个 1 度点; 若 $d(e) = 9$, 边 e' 连接一个 4 度点与一个 5 度点或一个 6 度点与一个 3 度点; 若 $d(e) = 4$,

边 e' 连接不同 P_4 的两个 2 度点; 若 $d(e)=6$, 边 e' 连接不同 P_4 的两个 3 度点; 若 $d(e)=7$, 边 e' 连接不同路上的一个 2 度点与一个 5 度点; 若 $d(e)=10$, 边 e' 连接位于同一连通分支的两个 5 度点。即总能找到一个图 H' 与图 G 有相同的度结合边主子图。故 $dern(G)=2$ 。

情况 4: $m=5,6$ 。此时 $G=P_n \circ P_m$, 在图 G 中取一条 $2m+1$ 度边 e , 如图 1 边 z_1z_2 , 其度结合边主子图为 $(G-e, 2m+1)$, 在边主子图 $G-e$ 中任意添加一条与边 e 不同的边 e' , $d(e')=4$ 或 5 或 6 或 $m+2$ 或 $m+3$ 或 $m+4$ 或 $m+5$ 或 $2m+2$ 或 $2m+3$ 或 $2m+4$, 由推论 1 知, 度结合边主子图 $(G-e, 2m+1)$ 可重构图 G 。故 $dern(G)=1$ 。

情况 5: $m \geq 7$ 。此时 $G=P_n \circ P_m$, 在图 G 中取一条 $m+1$ 度边 e , 如图 1 边 $z_1x_{1,1}$, 其度结合边主子图为 $(G-e, m+1)$, 在图 $G-e$ 中任意添加一条与 e 不同的边 e' , $d(e')=3$ 或 4 或 5 或 6 或 $m+2$ 或 $m+3$ 或 $m+4$ 或 $m+5$ 或 $2m+1$ 或 $2m+2$ 或 $2m+3$, 由推论 1, 度结合边主子图 $(G-e, m+1)$ 可重构图 G , 故 $dern(G)=1$, 证毕。 \square

考虑图 $G=P_n \circ P_m (m \geq 2, n \geq 2)$, 易知图 G 有 7 类度结合边主子图, 分别为:

$$\alpha_1 = \begin{cases} (G-e_1, 2), & m=2 \\ (G-e_1, 3), & m \geq 3 \end{cases}, \alpha_2 = (G-e_2, m+1), \alpha_3 = \begin{cases} (G-e_3, 2m), & n=2 \\ (G-e_3, 2m+1), & n \geq 3 \end{cases}, \alpha_4 = (G-e_4, 4) (m \geq 4),$$

$$\alpha_5 = (G-e_5, m+2) (m \geq 3), \alpha_6 = (G-e_6, m+3) (n \geq 3, m \geq 3), \alpha_7 = (G-e_7, 2m+2) (n \geq 4).$$

其中,

$$e_1 \in \left\{ \bigcup_{j=1}^n \{x_{j,1}x_{j,2}, x_{j,m-1}x_{j,m}\} \right\}, e_2 \in \{z_1x_{1,1}, z_1x_{1,m}, z_nx_{n,1}, z_nx_{n,m}\}, e_3 \in \{z_1z_2, z_{n-1}z_n\},$$

$$e_4 \in \left\{ \bigcup_{j=1}^n \{x_{j,2}x_{j,3}, x_{j,3}x_{j,4}, \dots, x_{j,m-2}x_{j,m-1}\} \right\}, e_5 \in \left\{ \bigcup_{k=3}^m \{z_1z_{1,k-1}, z_nz_{n,k-1}\}, \bigcup_{j=2}^{n-1} \{z_jz_{j,1}, z_jz_{j,m}\} \right\},$$

$$e_6 \in \left\{ \bigcup_{k=2}^{m-1} \{z_2x_{2,k}, z_3x_{3,k}, \dots, z_{n-1}x_{n-1,k}\} \right\}, e_7 \in \left\{ \bigcup_{j=2}^{n-2} \{z_jz_{j+1}\} \right\}.$$

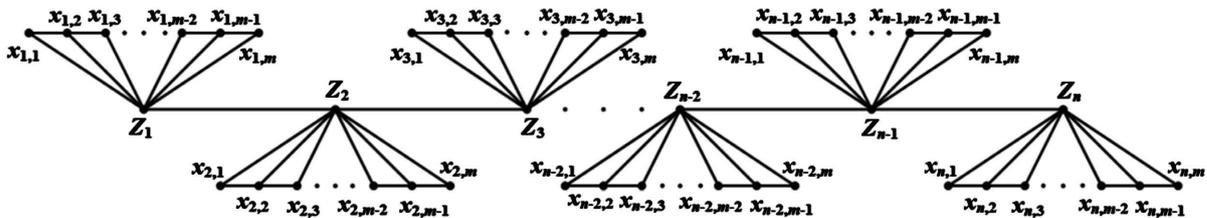


Figure 1. Corona graph $P_n \circ P_m$

图 1. 冠图 $P_n \circ P_m$

$$\text{定理 2 令 } G=P_n \circ P_m (m \geq 2, n \geq 2), \text{ 则: } adern(G) = \begin{cases} 2, & m=2, n=4 \\ 3, & m=2, n \in \{2,3\} \text{ 或 } m=2, n \geq 5 \text{ 或 } m=4, n \geq 2 \\ 4, & m=3, n \geq 2 \\ 5, & m \geq 5, n \geq 2 \end{cases}.$$

证明: e_i 如上定义, $i \in [7]$ 。由对称性知, 图 G 的各类度结合边主子图中同构图不超过 4 个。

情况 1: $m=2$

情况 1.1: 当 $n=2$ 时, $G=P_2 \circ P_2$, 显然图 G 有 3 类度结合边主子图, 分别为: $(G-e_1, 2), (G-e_2, 3),$

$(G-e_3,4)$ 。

情况 1.1.1: 令 H' 为 $(G-e_1,2)$ 添加一条 2 度边 e' 后的图, 在 $(G-e_1,2)$ 中只有两个 1 度点, 故 $H' \cong G$ 。

情况 1.1.2: 令 H' 为 $(G-e_2,3)$ 添加一条 3 度边 e' 后的图, 边 e' 连接一个 1 度点与 2 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'')=3$, 图 $(H'-e'',3)$ 与 $(G-e_2,3)$ 的邻接矩阵相等, 即 $(H'-e'',3) \cong (G-e_2,3)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 2 个相同的度结合边主子图 $(G-e_2,3)$ 。

情况 1.1.3: 令 H' 为 $(G-e_3,4)$ 添加一条 2 度边 e' 后的图, 图 $G-e_3$ 是由两个 3 顶点的环构成的非连通图, 任意连接两个不相邻的 2 度点得到图 H' , 有 $H' \cong G$ 。

由上分析可得: $adern(G) \leq 3$ 。由图 2 与图 G 有 2 个公共度结合边主子图 $(G-e_2,3)$ 可知, $adern(G) \geq 3$ 。综上所述, 当 $m=2, n=2$ 时, $adern(G)=3$ 。

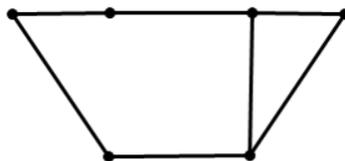


Figure 2. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_2 \circ P_2$

图 2. 与冠图 $P_2 \circ P_2$ 有公共度结合边主子图的重构图

情况 1.2: 当 $n=3$ 时, $G = P_3 \circ P_2$, 则图 G 有 4 类度结合边主子图, 分别为: $(G-e_1,2), (G-e_2,3), (G-e_3,5), (G-e_5,4)$ 。

情况 1.2.1: 令 H' 为 $(G-e_1,2)$ 添加一条 2 度边 e' 后的图。其证明与情况 1.1.1 类似, 限于文章篇幅这里不再赘述。

情况 1.2.2: 令 H' 为 $(G-e_2,3)$ 添加一条 3 度边 e' 后的图, 显然 e' 连接一个 1 度点和一个 2 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'')=3$, 图 $H'-e''$ 至多有 2 条割边, 而 $G-e_2$ 有 4 条割边, 即 $(H'-e'',3) \not\cong (G-e_2,3)$, 故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G-e_2,3)$ 。

情况 1.2.3: 令 H' 为 $(G-e_3,5)$ 添加一条 5 度边 e' 后的图, 易知 e' 连接一个 2 度点和一个 3 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'')=5$, 度结合边主子图 $(H'-e'',5)$ 与 $(G-e_3,5)$ 的邻接矩阵相等, 即 $(H'-e'',5) \cong (G-e_3,5)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 2 个相同的度结合边主子图 $(G-e_3,5)$ 。

情况 1.2.4: 令 H' 为 $(G-e_5,4)$ 添加一条 4 度边 e' 后的图, 易得 e' 连接两个 2 度点或一个 3 度点与一个 1 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'')=4$, 图 $H'-e''$ 至多有 3 条割边, 图 $G-e_5$ 有 4 条割边, 即 $(H'-e'',4) \not\cong (G-e_5,4)$, 故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G-e_5,4)$ 。

由上述分析可得: $adern(G) \leq 3$ 。由图 3 与图 G 有 2 个公共度结合边主子图 $(G-e_3,5)$ 可知, $adern(G) \geq 3$ 。即: 当 $m=2, n=3$ 时, $adern(G)=3$ 。



Figure 3. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_3 \circ P_2$

图 3. 与冠图 $P_3 \circ P_2$ 有公共度结合边主子图的重构图

情况 1.3: 当 $n \geq 4$ 时, $G = P_n \circ P_2$, 则图 G 有 5 类度结合边主子图, 分别为: $(G - e_1, 2), (G - e_2, 3), (G - e_3, 5), (G - e_5, 4), (G - e_7, 2m + 2)$ 。

情况 1.3.1: 令 H' 为 $(G - e_1, 2)$ 添加一条 2 度边 e' 后的图。其证明与情况 1.1.1 类似。

情况 1.3.2: 令 H' 为 $(G - e_2, 3)$ 添加一条 3 度边 e' 后的图, 显然 e' 连接一个 1 度点和一个 2 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 3$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n - 1$ 条割边, $G - e_2$ 有 $n + 1$ 条割边, 即 $(H' - e'', 3) \not\cong (G - e_2, 3)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_2, 3)$ 。

情况 1.3.3: 令 H' 为 $(G - e_3, 5)$ 添加一条 5 度边 e' 后的图, 易知 e' 连接一个 2 度点和一个 3 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 5$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n - 4$ 条割边, $G - e_3$ 有 $n - 2$ 条割边, 即 $(H' - e'', 5) \not\cong (G - e_3, 5)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_3, 5)$ 。

情况 1.3.4: 令 H' 为 $(G - e_5, 4)$ 添加一条 4 度边 e' 后的图, 那么 e' 连接两个 2 度点或一个 3 度点与一个 1 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 4$, 图 $H' - e''$ 至多有 n 条割边, $G - e_5$ 有 $n + 1$ 条割边, 即 $(H' - e'', 4) \not\cong (G - e_5, 4)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_5, 4)$ 。

情况 1.3.5: 对 n 的取值进行如下讨论。

情况 1.3.5.1: 当 $n = 4$ 时, 在图 $(G - e_7, 2m + 2)$ 中任意添加一条与 e_7 不同的边 e' , $d(e') = 4$ 或 5 或 6 或 $m + 3$ 或 $m + 4$, 由推论 1, 度结合边主子图 $(G - e_7, 2m + 2)$ 可重构图 G 。

情况 1.3.5.2: 当 $n \geq 5$ 时, 令 H' 为 $(G - e_7, 2m + 2)$ 添加一条 $2m + 2$ 度边 e' 后的图, 若 $H' \not\cong G$, 且 e' 的两端点在图 $G - e_7$ 的同一分支, 则 e' 在图 H' 的一个圈上, 圈上各边度为 $2m + 2$, 删去圈上任意一边得到的边主子图与图 $G - e_7$ 同构, 即图 H' 与图 G 至多有 2 个相同的度结合边主子图 $(G - e_7, 2m + 2)$ 。

由上分析可知, 当 $n = 4$ 时, $adern(G) \leq 2$; 由图 4 与图 G 有 1 个公共度结合边主子图 $(G - e_3, 5)$ 可知: $adern(G) \geq 2$ 。当 $n \geq 5$ 时, $adern(G) \leq 3$; 由图 5 与图 G 有 2 个公共度结合边主子图 $(G - e_7, 6)$ 可知: $adern(G) \geq 3$ 。综上所述, 当 $m = 2, n = 4$ 时, $adern(G) = 2$, 当 $m = 2, n \geq 5$ 时, $adern(G) = 3$ 。

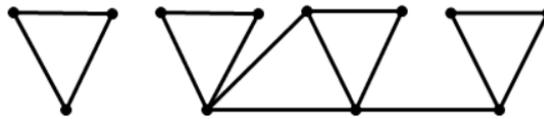


Figure 4. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_4 \circ P_2$

图 4. 与冠图 $P_4 \circ P_2$ 有公共度结合边主子图的重构图

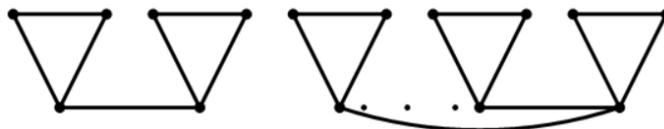


Figure 5. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_n \circ P_2 (n \geq 4)$

图 5. 与冠图 $P_n \circ P_2 (n \geq 4)$ 有公共度结合边主子图的重构图

情况 2: $m = 3, n \geq 2$

令图 $G = P_n \circ P_3 (n \geq 2)$, 则图 G 有以下几类度结合边主子图, 分别为: $(G - e_1, 3), (G - e_2, 4), (G - e_3, 7), (G - e_5, m + 2), (G - e_6, m + 3), (G - e_7, 2m + 2)$ 。

情况 2.1: 令 H' 为 $(G - e_1, 3)$ 添加一条 3 度边 e' 后的图, 显然 e' 连接一个 1 度点与一个 2 度点, 若

$H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 3$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n - 1$ 条割边, 而图 $G - e_1$ 有 n 条割边, 即 $(H' - e'', 3) \not\cong (G - e_1, 3)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_1, 3)$ 。

情况 2.2: 令 H' 为 $(G - e_2, 4)$ 添加一条 4 度边 e' 后的图, e' 连接两个 2 度点或一个 1 度点与一个 3 度点, 若 $H' \not\cong G$, 且 e' 连接两个同一 P_3 上的 2 度点, 那么边 e' 与 P_3 构成一个圈, 任意删去圈中一条边得到的度结合边主子图与 $(G - e_2, 4)$ 同构, 即图 H' 与图 G 至多有 3 个相同的度结合边主子图 $(G - e_2, 4)$ 。

情况 2.3: 对 n 的取值进行如下讨论。

情况 2.3.1: 当 $n = 2$ 时, 令 H' 为 $(G - e_3, 2m)$ 添加一条 $2m$ 度边 e' 后的图, 此时 $H' \cong G$ 。

情况 2.3.2: 当 $n = 3$ 时, 令 H' 为 $(G - e_3, 2m + 1)$ 添加一条 $2m + 1$ 度边 e' 后的图, 且边 e' 连接同一连通分支的一个 m 度点与 $m + 1$ 度点, 图 $(H' - e'', 2m + 1)$ 与 $(G - e_3, 2m + 1)$ 的邻接矩阵相等, 即 $(H' - e'', 2m + 1) \cong (G - e_3, 2m + 1)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 2 个相同的度结合边主子图 $(G - e_3, 2m + 1)$ 。

情况 2.3.3: 当 $n \geq 4$, 令 H' 为 $(G - e_3, 2m + 1)$ 添加一条 $2m + 1$ 度边 e' 后的图, e' 连接一个 m 度点与一个 $m + 1$ 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = 2m + 1$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n - 3$ 条割边, 而图 $G - e_3$ 有 $n - 2$ 条割边, 即 $(H' - e'', 2m + 1) \not\cong (G - e_3, 2m + 1)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_3, 2m + 1)$ 。

情况 2.4: 令 H' 为 $(G - e_5, m + 2)$ 添加一条 $m + 2$ 度边 e' 后的图, 易得 e' 连接一个 m 度点与一个 2 度点或一个 $m + 1$ 度点与一个 1 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = m + 2$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n - 1$ 条割边, 而图 $G - e_5$ 有 n 条或 $n - 1$ 条割边, 当图 $H' - e''$ 与图 $G - e_5$ 都有 $n - 1$ 条割边时, 图 $H' - e''$ 含有 1 度点, 而图 $G - e_5$ 无 1 度点, 即 $(H' - e'', m + 2) \not\cong (G - e_5, m + 2)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_5, m + 2)$ 。

情况 2.5: 令 H' 为 $(G - e_6, m + 3)$ 添加一条 $m + 3$ 度边 e' 后的图, 显然 e' 连接一个 2 度点与一个 $m + 1$ 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'') = m + 3$, 图 $H' - e''$ 至多有 $n - 2$ 条割边, 而图 $G - e_6$ 有 $n - 1$ 条割边, 即 $(H' - e'', m + 3) \not\cong (G - e_6, m + 3)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G - e_6, m + 3)$ 。

情况 2.6: 令 H' 为 $(G - e_7, 2m + 2)$ 添加一条 $2m + 2$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 1.3.5 类似。

由上分析可知, 图 $G = P_n \circ P_3 (n \geq 2)$, 其 $adern(G) \leq 4$, 由图 6 与图 G 有 3 个公共度结合边主子图 $(G - e_2, 4)$ 可知: $adern(G) \geq 4$, 综上所述, $adern(G) = 4$ 。

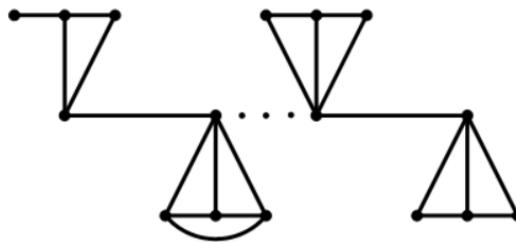


Figure 6. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_n \circ P_3 (n \geq 2)$

图 6. 与冠图 $P_n \circ P_3 (n \geq 2)$ 有公共度结合边主子图的重构图

情况 3: $m = 4, n \geq 2$

令图 $G = P_n \circ P_4 (n \geq 2)$, 易知图 G 有以下几类度结合边主子图, 分别为: $(G - e_1, 3), (G - e_2, 5), (G - e_3, 2m$ 或 $2m + 1), (G - e_4, 4), (G - e_5, m + 2), (G - e_6, m + 3), (G - e_7, 2m + 2) (n \geq 4)$ 。

情况 3.1: 令 H' 为 $(G-e_1,3)$ 添加一条 3 度边 e' 后的图。其证明与情况 2.1 类似。

情况 3.2: 令 H' 为 $(G-e_2,5)$ 添加一条 5 度边 e' 后的图, 显然 e' 连接一个 2 度点与一个 3 度点或一个 1 度点与一个 4 度点, 若 $H' \not\cong G$, 且边 e' 在图 H' 的一个圈上, 删去圈中任意 5 度边 $e'' (e'' \neq e')$ 得到的度结合边主子图与 $(G-e_2,5)$ 同构。故图 H' 与图 G 至多有 2 个相同的度结合边主子 $(G-e_2,5)$ 。

情况 3.3: 当 $n=2$ 时, 其证明与情况 2.3.1 类似; 当 $n=3$ 时, 图 $G-e_3$ 中除 e_3 的两端点外无其余 m 度点与 $m+1$ 度点, H' 为 $(G-e_3,2m+1)$ 添加一条 $2m+1$ 度边 e' 后的图, 则 $H' \cong G$; 当 $n \geq 4$ 时, 其证明与情况 2.3.3 类似。

情况 3.4: 令 H' 为 $(G-e_4,4)$ 添加一条 4 度边 e' 后的图, e' 连接两个 2 度点, 若 $H' \not\cong G$, 且 e' 连接两个位于同一 P_m 上的 2 度点, 则边 e' 与 P_m 构成一个圈, 圈上每条边的度都为 4, 任意删去圈中一条边得到的度结合边主子图与 $(G-e_4,4)$ 同构。由对称性知, 图 G 的度结合边主子图 $(G-e_4,4)$ 中, 同构图不超过两个, 故图 H' 与图 G 至多有 2 个相同的度结合边主子图 $(G-e_4,4)$ 。

情况 3.5: 令 H' 为 $(G-e_5, m+2)$ 添加一条 $m+2$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 2.4 类似。

情况 3.6: 令 H' 为 $(G-e_6, m+3)$ 添加一条 $m+3$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 2.5 类似。

情况 3.7: 令 H' 为 $(G-e_7, 2m+2)$ 添加一条 $2m+2$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 1.3.5 类似。

综上所述, 当 $m=4, n \geq 2$ 时, $adern(G) \leq 3$, 由图 7 与图 G 有 2 个公共度结合边主子图 $(G-e_4,4)$ 可知: $adern(G) \geq 3$ 。即 $adern(G)=3$ 。

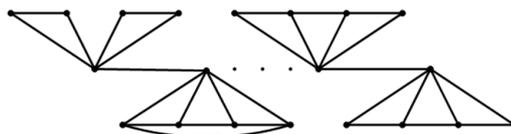


Figure 7. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_n \circ P_4 (n \geq 2)$

图 7. 与冠图 $P_n \circ P_4 (n \geq 2)$ 有公共度结合边主子图的重构图

情况 4: $m \geq 5, n \geq 2$

令图 $G = P_n \circ P_m (n \geq 2)$, 易知, 图 G 有以下几类度结合边主子图, 分别为:

$$\alpha_1 = (G-e_1,3), \alpha_2 = (G-e_2, m+1), \alpha_3 = \begin{cases} (G-e_3, 2m), & n=2 \\ (G-e_3, 2m+1), & n \geq 3 \end{cases}, \alpha_4 = (G-e_4,4),$$

$$\alpha_5 = (G-e_5, m+2), \alpha_6 = (G-e_6, m+3) (n \geq 3), \alpha_7 = (G-e_7, 2m+2) (n \geq 4).$$

情况 4.1: 令 H' 为 $(G-e_1,3)$ 添加一条 3 度边 e' 后的图。其证明与情况 2.1 类似。

情况 4.2: 对 m 的取值进行如下讨论。

情况 4.2.1: 当 $m=5$ 时, 令 H' 为 $(G-e_2,6)$ 添加一条 6 度边 e' 后的图, 显然 e' 连接两个 3 度点或一个 1 度点与一个 5 度点, 若 $H' \not\cong G$, 则对 $\forall e'' \in E(H') \setminus \{e'\}$, 且 $d(e'')=6$, 图 $H'-e''$ 至多有 n 条割边, $G-e_2$ 只有 n 条割边, 当图 $H'-e''$ 与图 $G-e_2$ 都有 n 条割边时, 在图 $H'-e''$ 中存在一个顶点度为 4,3,4 的回路, 即 $(H'-e'',6) \not\cong (G-e_2,6)$ 。故图 H' 与图 G 至多有 1 个相同的度结合边主子图 $(G-e_2,6)$ 。

情况 4.2.2: 当 $m \geq 6$ 时, 在图 $(G-e_2, m+1)$ 中任意添加一条与边 e_2 不同的边 e' , $d(e')=3$ 或 4 或 5 或 6 或 $m+2$ 或 $m+3$ 或 $m+4$ 或 $m+5$ 或 $2m+1$ 或 $2m+2$ 或 $2m+3$, 由推论 1, 度结合边主子图 $(G-e_2, m+1)$ 可重构图 G 。

情况 4.3: 令 H' 为 $(G-e_3, 2m$ 或 $2m+1)$ 添加一条 $2m$ 或 $2m+1$ 度边 e' 得到。其证明与情况 3.3 类似。

情况 4.4: 令 H' 为 $(G - e_4, 4)$ 添加一条 4 度边 e' 后的图, e' 连接两个 2 度点, 若 $H' \cong G$, 且 e' 连接两个位于同一 P_m 上的 2 度点, 则 e' 与 P_m 构成一个圈, 圈上每条边的度都为 4, 任意删去圈中一条边得到的度结合边主子图与 $(G - e_4, 4)$ 同构。即图 H' 与图 G 至多有 4 个相同的度结合边主子图 $(G - e_4, 4)$ 。

情况 4.5: 令 H' 为 $(G - e_5, m+2)$ 添加一条 $m+2$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 2.4 类似。

情况 4.6: 令 H' 为 $(G - e_6, m+3)$ 添加一条 $m+3$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 2.5 类似。

情况 4.7: 令 H' 为 $(G - e_7, 2m+2)$ 添加一条 $2m+2$ 度边 e' 后的图。其证明与情况 1.3.5 类似。

综上所述, 当 $m \geq 5, n \geq 2$ 时, $adern(G) \leq 5$, 由图 8 与图 G 有 4 个公共度结合边主子图 $(G - e_4, 4)$ 可知: $adern(G) \geq 5$ 。即 $adern(G) = 5$, 证毕。 □

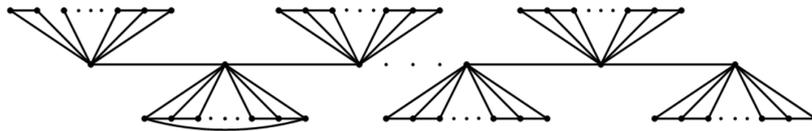


Figure 8. Reconstructed graph of degree associated edge-card common to corona graph $P_n \circ P_m (m \geq 5, n \geq 2)$

图 8. 与冠图 $P_n \circ P_m (m \geq 5, n \geq 2)$ 有公共度结合边主子图的重构图

4. 总结与展望

本文通过分析图 $G = P_n \circ P_m$ 的边主子图结构, 结合上下界逼近法, 证明了图 G 是可重构的, 并得到如下结果:

$$dern(G) = \begin{cases} 2, & m = 3, n \geq 5 \text{ 或 } m = 3, n = 3 \text{ 或 } m = 4, n \geq 5 \\ 1, & \text{其他} \end{cases},$$

$$adern(G) = \begin{cases} 2, & m = 2, n = 4 \\ 3, & m = 2, n \in \{2, 3\} \text{ 或 } m = 2, n \geq 5 \text{ 或 } m = 4, n \geq 2 \\ 4, & m = 3, n \geq 2 \\ 5, & m \geq 5, n \geq 2 \end{cases}.$$

本文得到的结果可以帮助我们分析冠图的顶点度分布、边的连接方式, 以及它的重构能力, 在选用冠图作为网络模型时提供参考。同时, 本文的结论和方法期望用来进一步研究不同图类的重构数, 拓展图重构猜想的研究工作, 但本文在判断两图的同构情况时所用方法比较单一, 下一步, 可继续探究冠图 $P_n \circ P_m$ 的两种度结合重构数, 并试图设计算法辅助验证两图同构。

基金项目

重庆市自然科学基金创新发展联合基金(CSTB2022NSCQ-LZX0003: 控制集及路覆盖若干优化算法问题研究)重庆理工大学研究生创新创业项目(gzlcx20242070: 图结构理论若干问题研究)。

参考文献

- [1] Ulam, S.M. (1960) A Collection of Mathematical Problems. Interscience Publishers, 20.
- [2] Kelly, P.J. (1942) On Isometric Transformations. University of Wisconsin-Madison.
- [3] Kelly, P. (1957) A Congruence Theorem for Trees. *Pacific Journal of Mathematics*, **7**, 961-968. <https://doi.org/10.2140/pjm.1957.7.961>
- [4] Harary, F. (1964) On the Reconstruction of a Graph from a Collection of Subgraphs. In: Ed., *Theory of Graphs and Its*

- Applications (Proc. Sympos. Smolenice, 1963)*, Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences, 47-52.
- [5] Monikandan, S. and Raj, S.S. (2012) Degree Associated Edge Reconstruction Number. In: Arumugam, S. and Smyth, W.F., Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 100-109. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35926-2_12
- [6] Devi, P.A. and Monikandan, S. (2015) Degree Associated Edge Reconstruction Number of Graphs with Regular Pruned Graph. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, **3**, 146-161. <https://doi.org/10.5614/ejgta.2015.3.2.4>
- [7] 黄陈辰, 马美杰. 一类冠图的 2 种度结合边重构数[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(3): 263-267.
- [8] Priya, P.D. and Monikandan, S. (2021) Stronger Reconstruction of Distance-Hereditary Graphs. *Journal of Applied and Engineering Mathematics*, **11**, 25-29.
- [9] Anu, A. and Monikandan, S. (2019) Nearly All Biregular Graphs Have Degree Associated Edge Reconstruction Number at Most Three. *Ars Combinatoria*, **147**, 263-279.
- [10] Priya, P.D. and Monikandan, S. (2021) Reconstruction of 2-Connected Parity Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **80**, 167-177.
- [11] Devi, P.A. and Monikandan, S. (2022) Degree Associated Edge Reconstruction Parameters of Strong Double Brooms. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, **27**, 259-269.
- [12] Spinoza, H. and West, D.B. (2020) Reconstruction of Graphs from the Deck of K-Vertex Induced Subgraphs. *Journal of Graph Theory*, **90**, 497-522.
- [13] Garamvölgyi, D. and Jordán, T. (2021) Graph Reconstruction from Unlabeled Edge Lengths. *Discrete & Computational Geometry*, **66**, 344-385. <https://doi.org/10.1007/s00454-021-00275-7>
- [14] Hosaka, T. (2022) The Reconstruction Conjecture for Finite Simple Graphs and Associated Directed Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article 112893. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.112893>
- [15] Kapuhennayake, K.M.P.G.S.C., Perera, A.C.G., Dhananjaya, K.D.E. and Perera, A.A.I. (2022) Reconstruction of Helm Graph and Web Graph. *Journal of Science*, **13**, 31-39. <https://doi.org/10.4038/jsc.v13i1.41>
- [16] Clifton, A., Liu, X., Mahmoud, R. and Shantanam, A. (2024) Reconstruction and Edge Reconstruction of Triangle-Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **347**, Article 113753. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113753>
- [17] Bouritsas, G., Frasca, F., Zafeiriou, S. and Bronstein, M.M. (2023) Improving Graph Neural Network Expressivity via Subgraph Isomorphism Counting. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **45**, 657-668. <https://doi.org/10.1109/tpami.2022.3154319>
- [18] Hemaspaandra, E., Hemaspaandra, L.A., Spakowski, H. and Watanabe, O. (2020) The Robustness of LWPP and WPP, with an Application to Graph Reconstruction. *Computational Complexity*, **29**, Article No. 7. <https://doi.org/10.1007/s00037-020-00197-5>
- [19] Singh, G.P., Borah, A. and Ray, S. (2020) A Review Paper on Corona Product of Graphs. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, **19**, 1047-1054.
- [20] West, D.B. (2001) Introduction to Graph Theory. Prentice Hall.
- [21] Ren, J. and Li, T. (2024) Graph Isomorphism—Characterization and Efficient Algorithms. *High-Confidence Computing*, **4**, Article 100224. <https://doi.org/10.1016/j.hcc.2024.100224>