

6度边本原双本原图的分类

周文婷

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年3月3日; 录用日期: 2025年3月26日; 发布日期: 2025年4月8日

摘要

如果 $\Gamma = (V, E)$ 是一个6度连通的二部图, 其中 $V = U \cup W$, 令 $G \leq \text{Aut}\Gamma$, 若 G 中存在一个指数为2的正规子群 G^+ , 且 G^+ 在两个分部 U 和 W 上作用是本原的, 则我们称图 Γ 是 G -双本原的。本文通过对6度边本原图的分类, 确定了在非忠实的作用下, 6度图中存在的双本原图只有 $K_{6,6}$, 并进一步了解6度双本原图的结构和性质。

关键词

6度图, 双本原图, 边本原

Classification of 6-Valent Edge-Primitive and Bi-Primitive Graphs

Wenting Zhou

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 3rd, 2025; accepted: Mar. 26th, 2025; published: Apr. 8th, 2025

Abstract

If $\Gamma = (V, E)$ is a 6-valent connected bipartite graph, where $V = U \cup W$ and $G \leq \text{Aut}\Gamma$, if here exists a normal subgroup G^+ of index 2 in G , such that G^+ acts primitively on both parts U and W , then we say that the graph Γ is G -biprimitive. By classifying 6-valent edge-primitive graphs, this paper identifies that under non-faithful actions, the only biprimitive graph among 6-valent graphs is $K_{6,6}$. Furthermore, the structure and properties of 6-valent bi-primitive graphs are further explored.

Keywords

6-Valent Graph, Bi-Primitive Graph, Edge-Primitive

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在图论中,我们将有向图和无向图统称为图,其中任意两个点都存在一条路径称为连通图;若 $\Gamma=(V,E)$ 是一个有向图, $v \in V$ 。以 v 为起点的有向边的个数称为 v 的出度,记作 $d^+(v)$;而以 v 为终点的有向边的个数称为 v 的入度,记作 $d^-(v)$ 。我们令 $d(v)=d^+(v)+d^-(v)$,叫做点 v 的度数;若图的顶点 V 可划分为两个互不相交的非空子集 U 和 W (即 $V=U \cup W$ 且 $U \cap W = \emptyset$),并且图中每一条边的两个端点分别属于两个不同的子集,则称该图为二部图。

在本文中,所有的图都是有限连通图。

我们令 $\Gamma=(V,E)$ 是一个连通图,其中 V , E 分别表示顶点集、边集,我们用 A 表示弧集。图 Γ 的全体自同构的集合在映射乘法之下组成一个群,叫做图 Γ 的自同构群,记作 $\text{Aut}\Gamma$ 。具体来说,若 G 分别作用在 V , E 或 A 上是传递的,相应地,我们称图 Γ 是 G -点传递, G -边传递或 G -弧传递的。

在群与图的研究中,对于传递图的分类一直以来是一个热门的话题,特别是对于特定阶数图的分类。在上世纪七十年代,Chao 对素数阶对称图进行研究[1],开启了特定阶数对称图刻画与分类,为后续学者的深入研究奠定了基础;随后,Alspach 和 Sutcliffe 对 $2p$ 阶的点传递图进行了猜想[2],这一猜想激发了许多读者广泛的研究兴趣;众多学者在此基础上进行了深入研究,并取得一系列重要成果,如 p 、 $2p$ 、 $3p$ 阶对称图已经得到了分类[3]-[5];此外, Praeger 在文中给出了两个不同素因子乘积阶的对称图分类[6];化小会,冯衍全教授等人分别给 $2pq$ 阶 5 度和 7 度对称图分类[7][8];蓝婷和凌波给出 $4p$ 阶 11 度对称图的完全分类[9]。从阶数角度进行了剖析,通过分析图的结构特征,群的作用以及对称性等方面,为进一步理解代数图论提供了支撑和丰富案例。

本原性作为群作用的一种特殊类型,它在刻画对称图方面具有重要作用,我们称群 G 作用在集合 Ω 上是本原的,当且仅当 Ω 上不存在非平凡的 G 不变划分。特别地,对于图 $\Gamma=(V,E)$ 若 $G \leq \text{Aut}\Gamma$ 在边集 E 上的作用是本原的,那么称图 Γ 是 G -边本原的。对于边本原图的研究,最早起源于 Weiss 对 3 度边本原图的研究[10],如完全二部图 $K_{3,3}$ 、Heawood 图和 Biggs-Smith 图等。近年来,边本原图的研究取得了显著进展。2010 年, Giudici 和李才恒教授系统地运用 O’Nan-Scott 定理对边本原图和边拟本原图进行分析[11],详细阐述了可能的边和顶点作用类型,并给出了丰富多样的实例,确定了一些特殊情况下的边本原。随后,郭松涛教授、冯衍全教授和李才恒教授对 4 度边本原图展开了研究[12],并确定了 4 度边本原图包括完全图 K_5 、co-Heawood 和完全二部图 $K_{4,4}$ 等,这些结果明确了 4 度边本原图的具体类型。同样的相关研究,郭松涛教授和冯衍全教授等人也对 5 度边本原图进行了分类[13],证明了所以有限 5 度边本原图都是 2-弧传递的,并给出了相应的自同构群,点稳定自群和边稳定子群。研究发现,边本原图的边稳定子群在度数不超过 5 时是可解的,而度数大于 5 时可能不可解,基于此,吴辞旋教授和潘江敏教授证明了 6 度边本原图是 2-弧传递的[14],且除了 $K_{6,6}$ 外自同构群几乎是单群,还确定了具有可解边稳定子群的 6 度边本原图。

在边本原图研究的基础上,李才恒教授等人证明了当图 Γ 是一个连通的非凡的 G -边本原图且 Γ 是 G -弧传递的[11],则满足 Γ 是 G -点本原的、 G -双本原的或 G 局部非本原的。并进一步提出了双本原图的概念,我们设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个简单连通的二部图,其中 $V=U \cup W$, 其中 U 和 W 被称为二部图的分部,令 $G \leq \text{Aut} \Gamma$, 若 G 中存在一个指数为 2 的正规子群 G^+ , 即 G^+ 满足 $|G:G^+|=2$, 且 G^+ 在两个分部 U 和 W 上作用是本原的,则我们称图 Γ 是 G -双本原的

实际上对于双本原图的研究,最早可追溯到 1985 年, Ivanov 和 Iofinova 对 3 度的双本原边传递图进行了完整的分类[15]; 随后,李才恒和张华教授对 4 度双本原图进行了分类[16]; 最近,蔡琦和路在平教授完成了双本原边传递 5 度图的分类工作[17], 特别的,他们证明了双本原半对称 5 度图存在且唯一。

基于以上的研究,我们将以 6 度边本原图为研究对象,利用 G^+ 在 U 上作用是非忠实的,来讨论 6 度双本原图的分类,给出本文的主要结果:

定理 1.1 在非忠实的作用下, 6 度双本原边本原图只有 $K_{6,6}$ 。

2. 预备知识

本节将介绍一些重要的定义,引理和定理。

我们首先给出群作用的定义,如下:

定义 2.1 [18] 设 $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma,\dots\}$ 是一个非空集合,其元素称作点, S_Ω 表示 Ω 上的对称群。所谓群 G 在 Ω 上的一个作用 φ 指的是 G 到 S_Ω 内的一个同态,即对每个元素 $x \in G$, 对应 Ω 上的一个变换 $\varphi(x):\alpha \rightarrow \alpha^x$, 并满足 $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$, $x,y \in G$, $\alpha \in \Omega$ 或者 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x,y \in G$ 。如果 $\text{Ker} \varphi = 1$, 则称 G 在 Ω 上的作用是忠实的。如果 $\text{Ker} \varphi = G$, 则称 G 在 Ω 上的作用是非忠实的。

接下来是代数图论中的相关概念的介绍,我们始终假设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个简单的连通图。令 v 的所有邻域的集合为 $\Gamma(v)=\{u \in V | (v,u) \in E\}$, 邻域 $\Gamma(v)$ 称为 v 的度数。

引理 2.2 [19] 图的自同构保持顶点的度数不变,对于映射后的顶点 $u=g(v)$ 与 v 有相同的度数。

证明: 设 $N(v)$ 表示由顶点 v 在图 Γ 中的所有邻点诱导的子图, 则 $g(N(v))=N(g(v))=N(u)$ 。因此 $N(v)$ 和 $N(u)$ 是图 Γ 的同构子图, 它们具有相同的顶点数, 所以 v 和 u 的度数相同。

若图的自同构群 G 作用在边集上是本原的,我们称这个图是 G -边本原图。关于边本原图有下面的一些经典结论:

引理 2.3 [11] 如果 Γ 是一个连通的 G -边本原图, 并且满足以下情况之一成立:

- 1) 若 G 不是点传递(可得出 Γ 是星图)
- 2) 若 G 是点传递但不是弧传递的, 通过边稳定子和点稳定子可得圈图的性质
- 3) G 是点传递和弧传递的

基于引理 2.3 的结果,我们可以进一步讨论边本原图在弧传递的条件下, 有下面的结论:

引理 2.4 [11] 设 Γ 是一个连通的非凡的 G -边本原图, 那么 Γ 是 G -弧传递的, 并且满足以下情况之一成立:

- 1) Γ 是 G -点本原的
- 2) Γ 是 G -双本原的
- 3) Γ 是 G 本原图的扩张, 且该图是 G 局部非本原的

本原群作为一类特殊的置换群,它在群论的发展历史上有重要意义,1990 年 O’Nan Scot 和 Praeger 通过对本原置换群的结构进行分类,揭示了群的内在性质。最终得出了下面重要结果。

定理 2.5 (O’Nan Scot-Praeger 定理[20]) 设 G 是集合 Ω 上的本原置换群, 如果 $N = \text{Soc}(G) = T^k$ 为 G 的唯一极小正规子群, T 为非交换群, 给定 $v \in \Omega$ 。则 G 为以下八种情形之一: 仿射型(HA), 几乎单型

(AS), 单对角型(SD), 扭圈积型(TW), 乘积作用型(PA), 全形单型(HS), 全形复合群型(HC), 复合对角型(CD)。

最后我们以一个 6 度边本原图的分类结果来结束本节。

引理 2.6 [21] 设 Γ 是一个 6 度边本原 s -传递连通图, 其中 $2 \leq s \leq 4$, 令 $e = \{v, w\}$ 是一条边, v 是顶点。则自同构群 $\text{Aut}(\Gamma)$, 点稳定子 $\text{Aut}(\Gamma)_v$ 和边稳定子 $\text{Aut}(\Gamma)_e$, 如下表 1 所示:

Table 1. Classification of 6-valent edge-primitive graphs

表 1. 6 度边本原图的分类

s	$\text{Aut}(\Gamma)$	$\text{Aut}(\Gamma)_v$	$\text{Aut}(\Gamma)_e$	Γ (注记)
2	S_7	S_6	$S_5 \times S_2$	K_7
2	$\text{PGL}_2(11)$	A_5	D_{20}	\
2	$\text{PSL}_2(19)$	A_5	D_{20}	\
2	Th	A_6	S_5	\
3	$S_6 \wr S_2$	$S_5 \times S_6$	$S_5 \wr S_2$	$K_{6,6}$
4	$\text{PSL}_3(5).2$	$5^2 : \text{GL}_2(5)$	$(5^{1+2} : 4^2).2$	\
4	Ru	$5^2 : \text{GL}_2(5)$	$(5^{1+2} : 4^2).2$	\

3. 证明定理 1.1

设 $\Gamma = (V, E)$ 是一个 6 度连通的二部图, 其中 $V = U \cup W (U \cap W = \emptyset)$, G 是边本原的, 其中 $G^+ \triangleleft G$, $|G : G^+| = 2$, 且 G^+ 在 U 和 W 两个分部上作用是本原的。若 G^+ 在 U 上的作用是非忠实的, 则 $\Gamma = K_{6,6}$ 。

如果若 G^+ 在 U 上的作用是非忠实的, 设 $K = \{g \in G^+ | g \cdot u = u, \forall u \in U\}$ 是 G^+ 在 U 作用的核, 因为 G^+ 作用在 U 是非忠实的, 所以 K 是非平凡的。

假设 K 作用在 W 上也是非忠实的, 则存在非单位元 $k \in K$ 使得 $k \cdot w = w$ 对所有 $w \in W$ 成立。由于因为 $V = W \cup U$, 且 K 在 U 和 W 上作用是平凡的, 即 K 是 G^+ 在 V 上的核, 这与 G^+ 在 V 上作用是忠实矛盾。因此 K 作用在 W 上一定是忠实的。 K 是 G^+ 的正规子群, 因为对于任意 $g \in G^+$ 和 $k \in K$, 有 $g^{-1}kg \in K$, 且 G^+ 在 W 上作用是本原的。则 K 在 W 上作用是忠实且传递的。

由于 K 在 W 上是传递的, 对于任意 $w_i, w_j \in W (1 \leq i, j \leq 6)$, 存在 $k \in K$ 使得 $w_i^k = w_j$ 。因为 Γ 是 6 度连通二部图, 因此对于任意 $u \in U$, $|\Gamma(u)| = 6$ 。假设存在 $w_7 \in W$, 对于某个 $u \in U$ 有 $\{u, w_7\} \notin E$ 。由于 K 作用在 W 上是传递的, 且 $K \leq G^+$, $\forall w_i \in \Gamma(u)$, 存在 $k \in K$ 使得 $w_i^k = w_7$ 。然而 G^+ 是边传递的, 且 Γ 是 6 度连通二部图, 这意味着任意 $u \in U$ 和 $w \in W$ 都有边相连, 这与假设矛盾, 所以 $\Gamma = K_{6,6}$ 。

因为 $K_{6,6}$ 是一个完全二部图, 其中 $|U| = |W| = 6$, 且任意 $u \in U$ 和 $w \in W$ 之间都有边相连。因此, 由引理 2.5 和表 1, 可知 Γ 的自同构群 $\text{Aut}\Gamma$ 是 $S_6 \wr S_2$ 。因为 G^+ 在 U 和 W 上作用是本原的, 且 $G^+ \triangleleft G$, G 的结构必须满足 $Z_6 \leq G^+$ 或 $Z_2 \times Z_3 \leq G^+$ 。

综上, G^+ 在 U 上的作用是非忠实的条件下, 6 度连通二部图 Γ 只有完全二部图 $K_{6,6}$ 。

参考文献

- [1] Chao, C. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1971-0279000-7>
- [2] Alspach, B. and Sutcliffe, R.J. (1979) Vertex-Transitive Graphs of Order $2p$. *Annals of the New York Academy of*

- Sciences*, **319**, 18-27. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1979.tb32769.x>
- [3] Chao, C. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247. <https://doi.org/10.2307/1995785>
 - [4] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order $3p$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, 197-216. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037>
 - [5] Praeger, C.E., Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) Symmetric Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, 299-318. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1046>
 - [6] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **59**, 245-266. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068>
 - [7] Hua, X., Feng, Y. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order $2pq$. *Discrete Mathematics*, **311**, 2259-2267. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.07.007>
 - [8] Hua, X. and Chen, L. (2018) Valency Seven Symmetric Graphs of Order $2pq$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **68**, 581-599. <https://doi.org/10.21136/cmj.2018.0530-15>
 - [9] 蓝婷, 凌波. $4p$ 阶 11 度对称图[J]. 数学理论与应用, 2021, 41(2): 76.
 - [10] Weiss, R.M. (1973) Kantenprimitive Graphen vom Grad drei. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **15**, 269-288. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(73\)90041-5](https://doi.org/10.1016/0095-8956(73)90041-5)
 - [11] Giudici, M. and Li, C.H. (2010) On Finite Edge-Primitive and Edge-Quasiprimitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **100**, 275-298. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.09.001>
 - [12] Guo, S., Feng, Y. and Li, C.H. (2015) Edge-Primitive Tetravalent Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **112**, 124-137. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.12.004>
 - [13] Guo, S., Feng, Y. and Li, C.H. (2012) The Finite Edge-Primitive Pentavalent Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **38**, 491-497. <https://doi.org/10.1007/s10801-012-0412-y>
 - [14] Wu, C. and Pan, J. (2020) Finite Hexavalent Edge-Primitive Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **378**, Article ID: 125207. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125207>
 - [15] Ivanov, A. and Iofinova, M.E. (1985) Bi-Primitive Cubic Graphs. In: Faradžev, I.A., Ivanov, A.A., Klin, M.H. and Woldar, A.J., Eds., *Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects*, Springer, 459-472.
 - [16] Li, C.H. and Zhang, H. (2014) Finite Vertex-Biprimitive Edge-Transitive Tetravalent Graphs. *Discrete Mathematics*, **317**, 33-43. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.11.006>
 - [17] Cai, Q. and Lu, Z.P. (2024) Biprimitive Edge-Transitive Pentavalent Graphs. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 113871. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.113871>
 - [18] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 48-50.
 - [19] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 32-37.
 - [20] Praeger, C.E. (1990) The Inclusion Problem for Finite Primitive Permutation Groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 68-88. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-60.1.68>
 - [21] Wu, C. and Yin, F. (2024) A Complete Classification of Edge-Primitive Graphs of Valency 6. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 114205. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.114205>