

$\Delta \geq 4$, $g \geq 6$ 的符号图的边染色

黄 婧

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2025年3月8日; 录用日期: 2025年3月31日; 发布日期: 2025年4月9日

摘 要

2020年, Behr及Zhang等人将边染色的概念推广到符号图上。令符号图 (G, σ) 可嵌入非负欧拉特征值的表面, 本文通过分析极小反例的结构性质, 证明了 $\Delta \geq 4$, $g \geq 6$ 的符号图 (G, σ) 边色数为 Δ 。

关键词

符号图, 边染色, 最大度, 围长

Edge Coloring of Signed Graphs with $\Delta \geq 4$ and $g \geq 6$

Jing Huang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 8th, 2025; accepted: Mar. 31st, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

In 2020, Behr and Zhang *et al.* extended the concept of edge coloring to signed graphs. Let the signed graph (G, σ) be embeddable in a surface with non-negative Euler characteristic. By analyzing the structural properties of the minimal counterexample, this paper proves that the edge chromatic number of the signed graph (G, σ) with $\Delta \geq 4$ and $g \geq 6$ is Δ .

Keywords

Signed Graph, Edge Coloring, Maximum Degree, Girth



1. 引言

令图 (G, σ) 可嵌入非负欧拉特征值的表面, 如果一个图可以画在一个表面上使得任何两条边之间不产生交叉, 上述这种画法称为 (G, σ) 的表面嵌入。本文考虑的每一个图都是简单的, 无向的, 有限的并且是非空的。对于图 (G, σ) , 把它顶点集、边集、面集、最大度、最小度以及围长分别记作 $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $F(G)$ 、 $\Delta(G)$ 、 $\delta(G)$ 和 $g(G)$ 。图 (G, σ) 中最短长度的圈称为 G 的围长。对于图 (G, σ) 的一个面 f , 若 $d(f) = k$ (或 $d(f) \geq k$, 或 $d(f) \leq k$), 则称 f 为一个 k -面 (或 k^+ -面, 或 k^- -面)。对于面 f , 我们用 $b(f)$ 来表示面 f 的边界, 当面 f 中的顶点依次为 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 时, 我们用 $[x_1 x_2 \cdots x_k]$ 表示面 f 。

2020 年, Behr [1] 和 Zhang 等人 [2] 分别给出符号图边染色定义。这给研究者提供了新的研究方向, 普通图的边染色通常是关注相邻边的颜色不同, 而符号图的边染色在此基础上还考虑了边的符号。这种扩展使得问题更加复杂, 也适用于更多现实场景, 如社交网络中的友好与敌对关系, 化学反应中的促进与抑制作用等, 所以符号图边染色的研究具有现实意义。本文即研究 $\Delta \geq 4$, $g \geq 6$ 的符号图的边染色, 将 Li 和 Luo [3] 的一部分结论推广至符号图中。

对于符号图 (G, σ) , 将 $E(G)$ 中的每条边 $e = uv$ 视为两条半边 $h(u:e)$ 和 $h(v:e)$, 分别是与 u 和 v 关联的半边。令 $H(G)$ 为 (G, σ) 中所有半边的集合, $H_G(v)$ 为关联顶点 v 的所有半边的集合。

符号图 (G, σ) 是带有符号 σ 的图 $G: E(G) \rightarrow \{+, -\}$, G 称为 (G, σ) 的底图。为了方便起见, 本文中 G 实指 (G, σ) , 只有在需要时才会指定符号 σ 。

令 k 为正整数且

$$M_k = \begin{cases} \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n & k = 2n \\ 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n & k = 2n + 1 \end{cases}$$

定义 1.1 [1]: 设映射 $\varphi: H(G, \sigma) \rightarrow M_k$, 满足以下两个条件:

- (1) 对任意 $v \in V(G)$, 任意两条半边 $h_1, h_2 \in H_G(v)$, $h_1 \neq h_2$;
- (2) 对任意 $e = uv \in E(G)$, 都有 $(h(u:e)) = -\sigma(e)(h(v:e))$ 。

则映射 φ 称为 (G, σ) 的 M_k -边染色, 简称 k -边染色。若符号图存在 k -边染色, 则称之为 k -边可染的。符号图 (G, σ) 的边色数用 $\chi'_\pm(G, \sigma)$ 表示。

在无符号图中存在一个著名的 Vizing 定理:

定理 1.2 [4]: 具有最大度 Δ 的图 G 正确边着色所需颜色数量是 Δ 或 $\Delta + 1$ 。

在 2003 年, Li 和 Luo [3] 根据以上定理以及一些引理证明出关于非平面图的一些结果:

定理 1.3 [3]: 图 G 为简单图, 最大度为 Δ , 围长为 g , 且图 G 可嵌入表面 Σ 满足欧拉特征值 $\chi(\Sigma) \geq 0$, 则在以下每种情况, 图 G 边色数为 Δ :

- (1) $\Delta \geq 5$ 且 $g \geq 4$;
- (2) $\Delta \geq 4$ 且 $g \geq 5$;
- (3) $\Delta \geq 3$ 且 $g \geq 9$ 或 $\Delta \geq 3$ 且 $g \geq 8$ 且 $\chi(\Sigma) = 0$ 。

在 2020 年, Behr [1] 证明了符号版本的 Vizing 定理。

定理 1.4 [1] (符号图 Vizing 定理): 对于一个简单符号图, $\Delta \leq \chi'_\pm(G, \sigma) \leq \Delta + 1$ 。

本文将定理 1.3 中(2)推广至符号图中, 证明以下定理:

定理 1.5 若符号图 (G, σ) 满足 $\Delta \geq 4$ 且 $g \geq 6$ 且可嵌入表面 Σ 满足欧拉特征值 $\chi(\Sigma) \geq 0$, 则 $\chi'_{\pm}(G, \sigma) = \Delta$ 。

2. 定理 1.5 的证明

2.1. 极小反例的性质

首先介绍定理证明所必需引理及定理：

2023 年，Cao 等人[5]证明了关于符号图偶最大度的 Vizing 邻接引理。

引理 2.1 设符号图 (G, σ) 为具有偶最大度 $\Delta \geq 2$ 的 Δ -临界符号图，若 $xy \in E(G)$ ，则顶点 x 至少有 $\max\{2, \Delta - d(y) + 1\}$ 个度为 Δ 的邻点。

从符号图 Vizing 邻接引理，容易得到以下推论：

推论 2.2 令 (G, σ) 为 Δ -临界符号图，则每个顶点邻接至多一个 2 度点和至少两个 Δ 度点。

设图 (G, σ) 可嵌入欧拉特征值为 $\chi(\Sigma)$ 的曲面 Σ 中，则图 (G, σ) 的面 f 的欧拉贡献定义如下：

$$\phi(f) = 1 - \frac{d(f)}{2} + \sum_{v \in V(f)} \frac{1}{d(v)}$$

这里的 $V(f)$ 表示面 f 的边界的顶点集。

定理 2.3 [6] [7]令图 G 为连通，无环，无桥图，可嵌入欧拉特征值为 $\chi(\Sigma)$ 的表面 Σ 中，则

$$\sum_{f \in F(G)} \phi(f) = \chi(\Sigma)$$

若一个面的欧拉贡献为非负(正、零)，则称其为非负(正、零)面。

通过定理 2.3 中的公式可以计算出最小度至少为 3 的简单图的正面和零面，如表 1 和表 2 所示。由于在证明过程中，只需长度至少为 4 的非负面的结构，所以只需表 1 中的正面及表 2 中的零面。令 H 是嵌入在欧拉特征值 $\chi(\Sigma) \geq 0$ 的曲面 Σ 上的图。

本文主要运用反证法，若定理不成立，则存在一个使得定理不成立的极小反例，通过研究极小反例的性质得到矛盾，说明极小反例不存在，从而定理成立。

设 G 是满足定理 1.5 的极小反例，其中 $|E(G)|$ 尽可能小。

Table 1. Positive faces

表 1. 正面

$d_H(f)$	边界顶点度序列
4	3, 3, 3, $\leq \Delta$
4	3, 3, 4, ≤ 11
4	3, 3, 5, ≤ 7
4	3, 4, 4, ≤ 5
5	3, 3, 3, 3, ≤ 5

Table 2. Zero faces

表 2. 零面

$d_H(f)$	边界顶点度序列
4	3, 3, 4, 12
4	3, 3, 6, 6
4	3, 4, 4, 6

续表

4	4, 4, 4, 4
5	3, 3, 3, 3, 6
5	3, 3, 3, 4, 4
6	3, 3, 3, 3, 3, 3

若路径 $v_0v_1\dots v_r$ 满足除 v_0 和 v_r 外其余点的度数都为 2, 且 $d(v_0), d(v_r) > 2$, 则路径 $v_0v_1\dots v_r$ 被称为长度为 r 的细分边。 v_0 和 v_r 被称为细分边的端点。若两条细分边至少有一个端点相同, 则称这两条细分边相邻。

那么, (1) (2) (3) 容易得出:

(1) G 为 2-连通且 $\delta \geq 2, \Delta \geq 4$ 。

(2) 任何细分边的长度至多为 2, 因为根据推论 2.2, 每个 2-点与两个 Δ -点相邻。

(3) 任意两条细分 2-边彼此不相邻, 因为根据推论 2.2, 每个顶点至多与一个 2-点相邻。

将 G 中的每条细分 2-边替换为单边得到图 $\bar{G}$ 。对于每条边 $e = xy \in E(G)$, 记 $\alpha(e)$ 为 e 在 G 中对应的边。所以 $\alpha(e)$ 要么是 e , 要么是端点为 x 和 y 的细分 2-边。

此时, 容易推出(4) (5):

(4) $\delta(\bar{G}) \geq 3$ 且 $\bar{G}$ 中任意顶点度数与 G 中顶点度数相同, 即对于每个 $v \in V(\bar{G}) \subseteq V(G)$, 有 $d_{\bar{G}}(v) = d_G(v)$ 。

(5) 对于图 $\bar{G}$ 中的每条边 $e = xy \in E(\bar{G})$, 若 x, y 为 Δ 度点, 则 $\alpha(e)$ 可能为细分 2-边, 否则 $\alpha(e) = e$ 。因为根据推论 2.2, 任何 2 度顶点都与两个 Δ 度顶点相邻。

引理 2.4 图 $\bar{G}$ 的围长至少为 4。

证明: 反证法, 假设 $\bar{G}$ 包含一个长度至多为 3 的圈 $\bar{C}$ 。记 C 为 $\bar{C}$ 在 G 中对应的圈。那么, 根据(3), C 的长度至多为 4, 否则在 C 上存在两条相邻的细分 2-边, 这与 G 的围长至少为 6 的假设相矛盾。

引理 2.5 在图 $\bar{G}$ 中, 任何度数为 3 的顶点至多与一个度数为 3 的顶点相邻。

证明: 反证法, 假设存在一个 3 度点 x 与两个 3 度点 y, z 相邻。根据(5), x, y, z 都不为 Δ 度点, 所以 $\alpha(xy) = xy$ 且 $\alpha(xz) = xz$ 。根据(4), $\bar{G}$ 中任意顶点度数与 G 中顶点度数相同, 所以 x, y, z 在 G 中均为 3 度点。因此, 在 G 中, 3 度点与两个 3 度点相邻。这表明 x 至多与一个 Δ 度点相邻, 这与推论 2.2 中 x 至少与两个 Δ 度点相邻相矛盾。

引理 2.6 对于 $\bar{G}$ 中的任意一个 4-面 $f' = [x_1x_2x_3x_4]$, 均有 $d_{\bar{G}}(x_i) \geq 4$, 其中 $i=1,2,3,4$ 。

证明: 反证法, 假设存在 $x_i, d_{\bar{G}}(x_i) \leq 3$ 。不妨令 $d_{\bar{G}}(x_1) = 3$, 由(4)可知, $\bar{G}$ 中任意顶点度数与 G 中顶点度数相同, 所以 $d_G(x_1) = 3$ 。由(5)可知, 由于 x_1 不为 Δ 度点, 所以 $\alpha(x_1x_2) = x_1x_2$ 且 $\alpha(x_1x_4) = x_1x_4$ 。由于假设中 G 的围长至少为 6, 所以 $\alpha(x_2x_3)$ 与 $\alpha(x_3x_4)$ 在 G 中必为细分 2-边, 这与(3)中任意两条细分 2-边彼此不相邻相矛盾。

引理 2.7 $\bar{G}$ 不包含任何正面。因此, $\bar{G}$ 的所有面均为零面。

证明: 反证法, 假设 $\bar{G}$ 包含一个正面 f' 。根据表 1, f' 的长度要么为 4, 要么为 5。若 $d(f') = 4$, 根据表 1, f' 的边界上至少有一个 3 度点, 这与引理 2.6 相矛盾。若 $d(f') = 5$, 根据表 1, 在 f' 的边界上存在一个 3 度点与两个 3 度点相邻, 这与引理 2.5 相矛盾。由于 $\chi(\Sigma) \geq 0$, 所以 $\bar{G}$ 的所有面均为零面。

引理 2.8 图 $\bar{G}$ 中的每个面的长度均为 4 且与四个 4 度点相邻。因此, 图 $\bar{G}$ 是 4-正则图, 且 $\bar{G}$ 中每个面的长度均为 4。

证明：设 $\bar{f} \in F(\bar{G})$ 。那么，根据引理 2.7， $\bar{f}$ 是零面。由引理 2.5 知任何度数为 3 的顶点至多与一个度数为 3 的顶点相邻，由引理 2.6 知 $\bar{G}$ 中的任意一个 4-面边界顶点度数至少为 4，再根据表 2，易得 $d(\bar{f}) = 4$ 且 $\bar{f}$ 边界的每个顶点均为 4 度点。

2.2. 证明

证明：设 $\bar{f}_1 = [x_1x_2x_3x_4]$ 是 $\bar{G}$ 的一个 4-面。记 $f_1 \in F(G)$ 为 $\bar{f}_1$ 对应的面。由于 G 的围长为 6，所以存在两条不邻接的边为细分 2-边。不失一般性，假设 $\alpha(x_1x_2)$ 与 $\alpha(x_3x_4)$ 是细分 2-边。记 $\alpha(x_1x_2) = x_1y_1x_2$ ， $\alpha(x_3x_4) = x_3y_2x_4$ ，其中 $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 2$ 。设 $f_2 = [x_2x_5x_6x_3]$ 是与 f_1 相邻且共用边 x_2x_3 的 4-面。根据(3)，任意两条细分 2-边彼此不相邻，所以 $\alpha(x_2x_5) = x_2x_5$ 、 $\alpha(x_2x_3) = x_2x_3$ 以及 $\alpha(x_3x_6) = x_3x_6$ 。因此， f_2 至多为 5-面，这与 $g \geq 6$ 相矛盾。以上矛盾说明极小反例 G 不存在，从而定理 1.5 成立。

参考文献

- [1] Behr, R. (2020) Edge Coloring Signed Graphs. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111654. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111654>
- [2] Zhang, L., Lu, Y., Luo, R., Ye, D. and Zhang, S. (2020) Edge Coloring of Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **282**, 234-242. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.12.004>
- [3] Li, X. and Luo, R. (2003) Edge Coloring of Embedded Graphs with Large Girth. *Graphs and Combinatorics*, **19**, 393-401. <https://doi.org/10.1007/s00373-002-0514-8>
- [4] Vizing, V. (1964) On an Estimate of the Chromatic Class of a p-Graph. *Diskretny Analiz*, **3**, 23-30.
- [5] Cao, Y., Luo, R., Miao, Z. and Zhao, Y. (2023) Vizing's Adjacency Lemma on Edge Chromatic Critical Signed Graphs and Its Applications. *Discrete Applied Mathematics*, **329**, 96-105. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.01.008>
- [6] Lebesgue, H. (1940) Quelques conséquences simples de la formule d'Euler. *Journal of Mathematics*, **9**, 27-43.
- [7] Ore, O. (1967) The Four-Color Problem. Academic Press.