

四价图的Kauffman-Vogel多项式

班子涵, 那欣雨, 冷旭东*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年3月10日; 录用日期: 2025年4月3日; 发布日期: 2025年4月11日

摘要

本文研究了纽结四价图的Kauffman-Vogel多项式, 它是以 A, B, a 为变元的三元有理多项式。且在 $a = A$, $B = A^{-1}$ 情况下运用归纳法和双曲定向法计算了几类四价图和纽结的Kauffman-Vogel多项式。

关键词

Kauffman-Vogel多项式, 四价图, 纽结

Kauffman-Vogel Polynomials of 4-Valent Graphs

Zihan Ban, Xinyu Na, Xudong Leng*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Apr. 3rd, 2025; published: Apr. 11th, 2025

Abstract

In this paper, we study the Kauffman-Vogel polynomials of knot 4-valent graphs, which are rational polynomials with A, B, a as variables. Then we calculate Kauffman-Vogel polynomials of some classes of 4-valent graphs and knots by induction and hyperbolic orientation in the case of $a = A$, $B = A^{-1}$.

*通讯作者。

文章引用: 班子涵, 那欣雨, 冷旭东. 四价图的 Kauffman-Vogel 多项式[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 247-255.
DOI: 10.12677/aam.2025.144157

Keywords

Kauffman-Vogel Polynomial, 4-Valent Graph, Knot

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自 1984 年 Jones [1] 偶然发现纽结的 Jones 多项式之后, 诸多纽结的多项式不变量如 HOMFLY 多项式、Kauffman 多项式被不同学者陆续发现。在三维空间中的空间图方面, Yamada [2] 在 1989 年构造出了空间图的 Yamada 多项式不变量。而对于刚性顶点的无向四价图, Kauffman 和 Vogel [3] 于 1992 年构造了 Kauffman-Vogel 多项式, 它是三变元的有理多项式。一般情况下这一多项式的计算比较复杂, 而在 $a = A$ 和 $B = A^{-1}$ 时, Carpentier 发现了平面四价图的计算公式 [4] 和存在双曲定向的空间四价图的计算公式 [5], 本文将运用这些方法计算几类空间四价图和链环的 Kauffman-Vogel 多项式。

2. Kauffman-Vogel 多项式

对于嵌入在三维空间中的刚性顶点的四价图, 设它在平面上一个投影图为 G , 按下面的拆接关系定义多项式 $[G]$, 它有三个变量 A 、 B 和 a , Kauffman 和 Vogel [3] 证明了 $[G]$ 是刚性顶点四价图的正则合痕不变量。

$$\begin{aligned} [\text{X}] &= A[\text{Y}] + B[\text{Z}] + [\text{W}], \\ [\text{V}] &= a[\text{U}], \quad [\text{T}] = a^{-1}[\text{S}]. \end{aligned}$$

进一步地, 它们还证明了下面的拆接关系:

$$\begin{aligned} [\text{Q}] &= \mu[\text{P}], \\ [\text{R}] &= O[\text{S}], \\ [\text{X}] &= (1-AB)[\text{Y}] + \gamma[\text{Z}] - (A+B)[\text{W}], \\ [\text{V}] - [\text{U}] &= AB([\text{T}] - [\text{S}] + [\text{R}] - [\text{Q}] + [\text{P}] - [\text{X}]) + \xi([\text{Y}] - [\text{Z}]). \end{aligned}$$

其中 $\mu = \frac{a-a^{-1}}{A-B} + 1$, $O = \frac{Aa^{-1}-Ba}{A-B} - (A+B)$, $\gamma = \frac{B^2a-A^2a^{-1}}{A-B} + AB$, $\xi = \frac{B^3a-A^3a^{-1}}{A-B}$ 。

例 2.1 计算 Hopf 链环的四价图的 Kauffman-Vogel 多项式如下, Hopf 链环如图 1 所示:

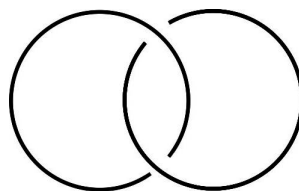


Figure 1. Hopf link
图 1. Hopf 链环

$$\begin{aligned}
[\text{Diagram}] &= A[\text{Diagram}] + B[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}] \\
&= Aa + Ba^{-1} + A[\text{Diagram}] + B[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}] \\
&= Aa + Ba^{-1} + AO + BO + (1-AB)[\text{Diagram}] + \gamma[\text{Diagram}] - (A+B)[\text{Diagram}] \\
&= Aa + Ba^{-1} + AO + BO + (1-AB)\mu + \gamma - (A+B)O \\
&= Aa + Ba^{-1} + (1-AB)\mu + \gamma
\end{aligned}$$

由 Kauffman-Vogel 多项式的定义容易得到:

命题 2.1 G 的镜面像 G^* 的多项式不变量 $[G^*]$ 可以通过互换 G 的多项式不变量 $[G]$ 中的 A 与 B , a 与 a^{-1} 得到, 且如果 $[G] \neq [G^*]$, 则 G 是手性的。

例 2.2 记下图为 G , 它含有一个顶点, 计算它的 Kauffman-Vogel 多项式 $[G]$ 及它的镜面像 G^* 的多项式, 并判断 G 是否为手性的。如图 2 所示。

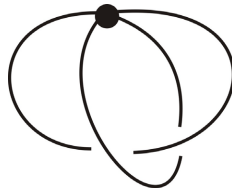


Figure 2. The graph G
图 2. 图 G

$$\begin{aligned}
[G] &= [\text{Diagram}] = A[\text{Diagram}] + B[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}] \\
&= A(A[\text{Diagram}] + B[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}]) + B(A[\text{Diagram}] + B[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}]) \\
&\quad + B\mu[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}] + (A[\text{Diagram}] + B[\text{Diagram}] + [\text{Diagram}]) \\
&= A(AO + BO + (\mu(1-AB) + \gamma - (A+B)O)) + B(AO + B\mu O + O^2) \\
&\quad + (A(\mu(1-AB) + \gamma - (A+B)O) + BO^2 + ((1-AB)[\text{Diagram}] + \gamma[\text{Diagram}] - (A+B)[\text{Diagram}])) \\
&= A(AO + BO + (\mu(1-AB) + \gamma - (A+B)O)) + B(AO + B\mu O + O^2) + (A(\mu(1-AB) \\
&\quad + \gamma - (A+B)O) + BO^2 + (1-AB)O + \gamma O - (A+B)(\mu(1-AB) + \gamma - (A+B)O))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2O + ABO + A\mu - A^2B\mu + A\gamma - A^2O - ABO + ABO + B^2\mu O + BO^2 + A\mu - A^2B\mu \\
&\quad + A\gamma - A^2O - ABO + BO^2 + O - ABO + O\gamma - A\mu + A^2B\mu - B\mu + AB^2\mu - A\gamma - B\gamma \\
&\quad + A^2O + B^2O + 2ABO \\
&= A\mu + A\gamma + B^2\mu O + 2BO^2 - A^2B\mu + O + O\gamma - B\mu + AB^2\mu - B\gamma + B^2O + ABO \\
&= (A - B - A^2B + AB^2)\mu + (1 + \gamma + AB + B^2)O + (A - B)\gamma + B^2\mu O + 2BO^2
\end{aligned}$$

$$\text{且 } \mu^* = \left(\frac{a - a^{-1}}{A - B} + 1 \right)^* = \frac{a^{-1} - a}{B - A} + 1 = \frac{a - a^{-1}}{A - B} + 1 = \mu;$$

$$O^* = \left(\frac{Aa^{-1} - Ba}{A - B} - A - B \right)^* = \frac{Ba - Aa^{-1}}{B - A} - B - A = \frac{Aa^{-1} - Ba}{A - B} - A - B = O;$$

$$\gamma^* = \left(\frac{B^2a - A^2a^{-1}}{A - B} + AB \right)^* = \frac{A^2a^{-1} - B^2a}{B - A} - BA = \frac{B^2a - A^2a^{-1}}{A - B} + AB = \gamma,$$

$$\text{故 } [G^*] = (B - A - B^2A + BA^2)\mu + (1 + \gamma + BA + A^2)O + (B - A)\gamma + A^2\mu O + 2AO^2.$$

因为 $[G^*] \neq [G]$, 所以 G 是手性的。

一般来说, 三变元的 Kauffman-Vogel 多项式的计算较为复杂, 如果令 $a = A$, $B = A^{-1}$, 则有:

$$\mu = 2,$$

$$O = -A - A^{-1},$$

$$\gamma = 0,$$

$$\xi = -A - A^{-1}.$$

在这种情况下:

$$[\bigcirc] = 2[\bigcirc],$$

$$[\infty] = -(A + A^{-1})[\bigcirc],$$

$$[\times] = -(A + A^{-1})[\times],$$

$$[\text{图1}]-[\text{图2}]=[\text{图3}]-[\text{图4}]+[\text{图5}]-[\text{图6}]+[\text{图7}]-[\text{图8}]-[\text{图9}]+(A+A^{-1})([\text{图10}]-[\text{图11}]).$$

对于不含交叉点的四价图即平面四价图的 Kauffman-Vogel 多项式, Carpentier [5] 证明了下面方便的计算公式。

定理 2.2 [5] 在 $a = A$ 和 $B = A^{-1}$ 的情况下, 对于任何的四价图 G , 都有 $[G] = 2^{c-1}(-A - A^{-1})^v$, 其中 c 为 G 的连通分支数, v 为 G 的顶点数。

对于计算某些只含有一个交叉点的四价图的多项式, 有下面这个十分有用的推论。

推论 2.3 [5] 如果四价图 G 只有一个交叉点, 移除这个交叉点之后并不会改变连通分支的数量, 则在 $a = A$ 和 $B = A^{-1}$ 的情况下, G 的多项式等于零。

定理 2.4 设 $G_{m,n}$ 是下图 3 所示的空间四价图, 其中 m 是刚性顶点数, n 是交叉点数, 且 $m \geq 1$, $G_{m,n}$

在 $a = A$ 和 $B = A^{-1}$ 情况下的 Kauffman-Vogel 多项式 $[G_{m,n}] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数;} \\ A^n(-A - A^{-1})^m, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

其中, m 是顶点数, n 是交叉点数, 且 $m \geq 1$ 。

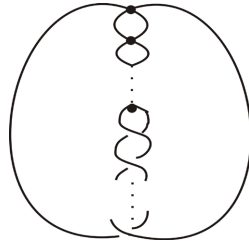


Figure 3. 4-valent graph with m rigid vertex and n intersection $G_{m,n}$

图 3. 含有 m 个刚性顶点和 n 个交叉点的四价图 $G_{m,n}$

证明 已知 $[G_{m,n}]$ 的递归关系为:

$$[G_{m,n}] = A^{n+1}(-A - A^{-1})^m + A^{-1}[G_{m,n-1}] + [G_{m+1,n-1}].$$

下面用二元数学归纳法证明引理成立:

(1) 由推论 2.3 可知, 对 $\forall m$, $[G_{m,1}] = 0$ 成立。

(2) 假设 $[G_{m,n}]$, $[G_{m+1,n}]$ 成立, 下证 $[G_{m,n+1}]$ 成立。

因为 $[G_{m,n+1}] = A^{n+1}(-A - A^{-1})^m + A^{-1}[G_{m,n}] + [G_{m+1,n}]$ 。

当 n 是奇数时, $n+1$ 为偶数, 有

$$[G_{m,n+1}] = A^{n+1}(-A - A^{-1})^m + 0 + 0 = A^{n+1}(-A - A^{-1})^m.$$

当 n 是偶数时, $n+1$ 为奇数, 有

$$\begin{aligned} [G_{m,n+1}] &= A^{n+1}(-A - A^{-1})^m + A^{-1}A^n(-A - A^{-1})^m + A^n(-A - A^{-1})^m \\ &= A^{n-1}(-A - A^{-1})^m (A^2 + 1 + A(-A - A^{-1})) \\ &= A^{n-1}(-A - A^{-1})^m (A^2 + 1 - A^2 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 用双曲定向法计算 Kauffman-Vogel 多项式

Carpentier 利用双曲定向的概念给出了一大类空间四价图的计算公式。

定义 3.1 [5] 如果四价图的每个顶点方向为 $\swarrow \nearrow$, 则四价图的边上的方向为双曲型。

注意, 平面四价图和纽结(或链环)作为特殊的空间四价图, 一定存在双曲定向。

定理 3.2 [5] 一个图多项式 G 在 $a = A$ 和 $B = A^{-1}$ 的情况下, $[G] = \frac{1}{2}(-A - A^{-1})^v \sum_{h \in H} A^{\omega(G^h)}$, 其中 H 为图

G 的所有双曲定向的集合, G^h 为图 G 的一条给定的双曲定向 h , v 是 G 的顶点数。

接下来我们用双曲定向的方法来证明定理 2.4, 注意 $G_{m,n}$ 含有两个双曲定向 $G_{m,n}^{h1}$, $G_{m,n}^{h2}$, 如图 4。

证明 如果有 n 个交叉点, n 为偶数, 此时刚性顶点数为 m , 有两个相反的双曲定向 $h1$ 和 $h2$,

$$w(G_{m,n}^{h1}) = n, w(G_{m,n}^{h2}) = n, \sum_{h \in H} A^{\omega(G^h)} = A^n + A^n = 2A^n, [G_{m,n}] = \frac{1}{2}(-A - A^{-1})^m (A^n + A^n) = (-A - A^{-1})^m A^n,$$

证毕。

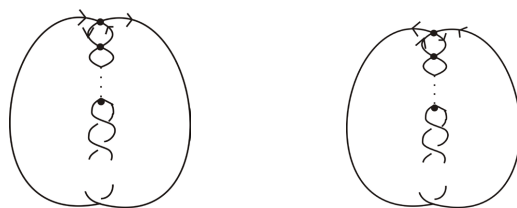


Figure 4. $G_{m,n}$ with two hyperbolic orientations $G_{m,n}^{h1}$, $G_{m,n}^{h2}$

图 4. $G_{m,n}$ 的两种双曲定向 $G_{m,n}^{h1}$, $G_{m,n}^{h2}$

可以看出, m 只和刚性顶点的数量有关, n 为交叉点的数量, $G_{m,n}$ 存在两种相反的双曲定向, 故 $\sum_{h \in H} A^{\omega(G^h)} = 2\{G\}$, 可以和多项式前面的 $\frac{1}{2}$ 抵消, 因此我们只需要找出刚性顶点的数量和交叉点数, 就可以直接得到多项式的结果为 $(-A - A^{-1})^m A^n$, 奇数个交叉点的情况没有双曲定向, 无法利用公式来进行计算, 但可以利用定理 2.4 证明当中的二元归纳法进行计算, 最后得到奇数时为 0 的结果。

4. 其他应用

本章利用二元归纳法和双曲定向法计算两类纽结 G_n 和 p-twist 纽结 P_n 的多项式。

定义 4.1 含有 n 个交叉点的纽结 G_n , 如图 5 所示。

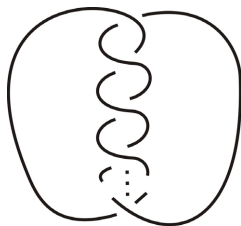
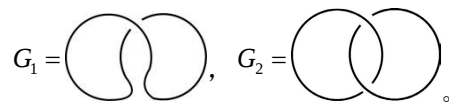


Figure 5. The knot of G_n

图 5. 纽结 G_n

$[G_n]$ 是 G_n 的多项式, 其中 n 是交叉点数。注: n 为奇数时, G_n 为纽结; n 为偶数时, G_n 是链环。

例 4.1 G_1 , G_2 。



n 为奇数时, G_n 的两种双曲定向 G_n^{h1} , G_n^{h2} , 如图 6 所示。

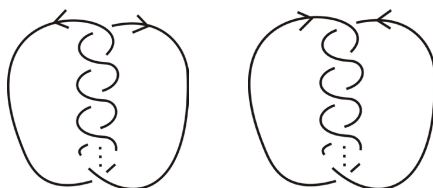


Figure 6. G_n with two hyperbolic orientations G_n^{h1} , G_n^{h2}

图 6. G_n 的两种双曲定向 G_n^{h1} , G_n^{h2}

n 为偶数时, G_n 有四种双曲定向分别为 G_n^{H1} , G_n^{H2} , G_n^{H3} , G_n^{H4} 。如图 7 所示。

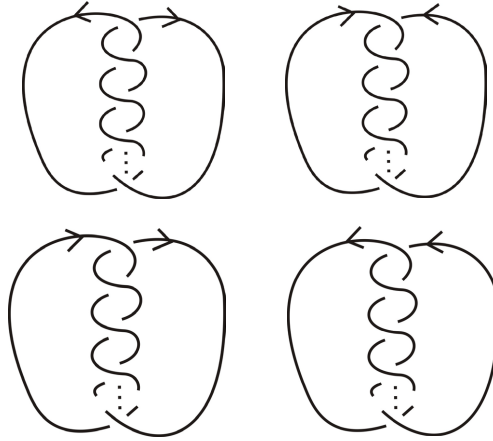


Figure 7. G_n with four hyperbolic orientations G_n^{H1} , G_n^{H2} , G_n^{H3} , G_n^{H4}

图 7. G_n 的四种双曲定向 G_n^{H1} , G_n^{H2} , G_n^{H3} , G_n^{H4}

定理 4.2 $[G_n] = \begin{cases} A^{-n}, & n \text{ 为奇数} \\ A^n + A^{-n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

证明 方法一, 用二元归纳法证明:

由上述的分析可知 $[G_n]$ 的递归关系式为:

$$[G_n] = \begin{cases} A^{-1} & n=1 \\ A^n + A^{-1}[G_{n-1}] + [G_{1,n-1}] & n \geq 2 \end{cases}$$

下面用归纳法证明定理:

当 $n=1$ 时, $[G_1] = A^{-1}$;

当 $n=2$ 时, $[G_2] = A^2 + A^{-1}[G_1] + [G_{1,1}] = A^2 + A^{-2} + 0 = A^2 + A^{-2}$ 成立。

假设 $n=k-1$ 时成立, 下证 $n=k$ 时成立:

当 k 为奇数时, $k-1$ 为偶数, 由定理 2.4 可知, $[G_{1,k-1}] = A^{k-1}(-A - A^{-1})$ 。

$$\begin{aligned} [G_k] &= A^k + A^{-1}[G_{k-1}] + [G_{1,k-1}] = A^k + A^{-1} \cdot (A^{k-1} + A^{-k+1}) - A^k - A^{k-2} \\ &= A^k + A^{k-2} + A^{-k} - A^k - A^{k-2} = A^{-k} \end{aligned}$$

当 k 为偶数时, $k-1$ 为奇数, 由定理 3.2 可知, $[G_{1,k-1}] = 0$,

$[G_k] = A^k + A^{-1}[G_{k-1}] + [G_{1,k-1}] = A^k + A^{-1} \cdot A^{-k+1} + 0 = A^k + A^{-k}$, 证毕。

方法二, 用双曲定向法证明:

n 为奇数时, 有两种双曲定向:

当双曲定向为 G_n^{h1} 时, $w(G_n^{h1}) = -n$, $A^{w(G_n^{h1})} = A^{-n}$;

当双曲定向为 G_n^{h2} 时, $w(G_n^{h2}) = -n$, $A^{w(G_n^{h2})} = A^{-n}$, 由于没有刚性顶点, 所以 v 等于零, 公式中

$(-A - A^{-1})^v$ 的部分等于 1, $[G_n] = \frac{1}{2}(A^{-n} + A^{-n}) = A^{-n}$ 。

当 n 为偶数时, 有四种双曲定向:

当双曲定向为 G_n^{H1} 时, $w(G_n^{H1}) = -n$, $A^{w(G_n^{H1})} = A^{-n}$;

当双曲定向为 G_n^{H2} 时, $w(G_n^{H2}) = -n$, $A^{w(G_n^{H2})} = A^{-n}$;

当双曲定向为 G_n^{H3} 时, $w(G_n^{H3}) = n$, $A^{w(G_n^{H3})} = A^n$;

当双曲定向为 G_n^{H4} 时, $w(G_n^{H4}) = n$, $A^{w(G_n^{H4})} = A^n$;

$[G_n] = \frac{1}{2}(A^{-n} + A^{-n} + A^n + A^n) = A^{-n} + A^n$, 证毕。

定义 4.3 p-twist 纽结 P_n , 其中 n 是扭转部分的交叉点数。如图 8 所示。



Figure 8. p-twist knot
图 8. p-twist 纽结

n 为奇数时, p-twist 的两种双曲定向 P_n^{h1} , P_n^{h2} , 如图 9 所示。



Figure 9. P_n with two hyperbolic orientations P_n^{h1} , P_n^{h2}

图 9. P_n 的两种双曲定向 P_n^{h1} , P_n^{h2}

n 为偶数时, p-twist 的两种双曲定向分别为 P_n^{H1} , P_n^{H2} , 如图 10 所示。



Figure 10. P_n with two hyperbolic orientations P_n^{H1} , P_n^{H2}

图 10. P_n 的两种双曲定向 P_n^{H1} , P_n^{H2}

定理 4.4 p-twist 纽结的多项式 P_n 为

$$[P_n] = \begin{cases} A^{n+2}, & n \text{ 是奇数;} \\ A^{n-2}, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

证明 n 为奇数时, 当双曲定向为 P_n^{h1} , 由于所有交叉点处的方向都相同, 扭转数为交叉点的数量之和, 也就是 $w(P_n^{h1}) = n+2$, $A^{w(P_n^{h1})} = A^{n+2}$, 当双曲定向为 P_n^{h2} 时, 此时交叉点处的方向相同, 扭转数仍为交叉点数之和, $w(P_n^{h2}) = n+2$, $A^{w(P_n^{h2})} = A^{n+2}$, 由于没有刚性顶点, 所以 v 等于零, 公式中 $(-A - A^{-1})^v$ 的部分等于 1, $[P_n] = \frac{1}{2}(A^{n+2} + A^{n+2}) = A^{n+2}$ 。

n 为偶数时, 当双曲定向为 P_n^{H1} , 此时交叉点处的方向不完全一致, 扭转部分的交叉点方向一致, 均为正数, 而上面的两个交叉点为负数, 所以全部交叉点的扭转数为 $n-2$, 因此 $w(P_n^{H1}) = n-2$, $A^{w(P_n^{H1})} = A^{n-2}$, 同理, 当双曲定向为 P_n^{H2} , $w(P_n^{H2}) = n-2$, $A^{w(P_n^{H2})} = A^{n-2}$, 由于 v 等于零, 故

$$[P_n] = \frac{1}{2}(A^{n-2} + A^{n-2}) = A^{n-2}.$$

5. 结论

Kauffman-Vogel 多项式的一般情况的计算较为复杂, 而在 $a = A$, $B = A^{-1}$ 的情况下其计算呈现诸多有趣规律, 特别是可以利用双曲定向来计算纽结、链环以及许多四价图的 Kauffman-Vogel 多项式, 无需利用拆接关系打开交叉点进行计算, 是一种简便的方法。

基金项目

国家自然科学基金项目(12001255)。

参考文献

- [1] Jones, V.F. (1985) A Polynomial Invariant for Knots via Von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2>
- [2] Yamada, S. (1989) An Invariant of Spatial Graphs. *Journal of Graph Theory*, **13**, 537-551. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190130503>
- [3] Kauffman, L.H. and Vogel, P. (1992) Link Polynomials and a Graphical Calculus. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **1**, 59-104. <https://doi.org/10.1142/S0218216592000069>
- [4] Carpentier, R.P. (2000) From Planar Graphs to Embedded Graphs—A New Approach to Kauffman and Vogel's Polynomial. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **9**, 975-986. <https://doi.org/10.1142/S0218216500000578>
- [5] Carpentier, R.P. (2003) Topological Notions for Kauffman and Vogel's Polynomial. *Journal of Knot Theory & Its Ramifications*, **12**, 67-78. <https://doi.org/10.1142/S0218216503002317>