

两类梳齿驱动器模型中周期解的存在性及稳定性研究

赵蕊

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2025年3月10日; 录用日期: 2025年4月3日; 发布日期: 2025年4月11日

摘要

梳齿驱动模型作为微机电系统(MEMS)中的核心组件, 其动力学特性对器件性能至关重要。本文针对两类典型的梳齿驱动模型——线性刚度项模型与非线性立方刚度项模型, 系统总结了其周期解存在性及稳定性的研究方法。

关键词

周期解, 梳齿驱动模型, 存在性, 稳定性

Study on the Existence and Stability of Periodic Solutions in Two Kinds of Comb-Drive Models

Rui Zhao

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Apr. 3rd, 2025; published: Apr. 11th, 2025

Abstract

The comb-drive model, as a core component in Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS), has dynamics characteristics that are crucial to the performance of the device. This paper systematically summarizes the research methods for the existence and stability of periodic solutions for two typical comb-drive models: the linear stiffness model and the nonlinear cubic stiffness model.

文章引用: 赵蕊. 两类梳齿驱动器模型中周期解的存在性及稳定性研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 266-272.
DOI: 10.12677/aam.2025.144159

Keywords

Periodic Solutions, Comb-Drive Model, Existence, Stability

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

微机电系统(MEMS)是一种基于微电子技术的多学科交叉技术,可在微小尺度实现传感、控制与执行功能[1]-[4]。该技术凭借体积小、效率高、功耗低、可批量生产等优势,在工业[5][6]、医疗[7]-[9]、通信[10][11]、国防[12][13]、资源勘测[14]-[17]等不同现代科技领域得到了广泛应用。

梳齿驱动器是一种基于静电驱动原理的微机电系统(MEMS),广泛应用于传感器[18]、谐振器[19][20]及光学器件[21]-[24]中。其核心结构由固定电极与可动电极组成,通过电压控制可动电极的横向位移。由于静电力的非线性特性及机械结构的复杂性,梳齿驱动模型的动力学行为常表现为强非线性振动,因此周期解的存在性与稳定性直接影响器件的稳定性和可靠性[25]。

现有研究中,梳齿驱动模型主要分为两类:带线性刚度项模型与非线性立方刚度项模型[26]-[29]。前者假设弹性恢复力与位移呈线性关系,后者则考虑机械刚度的高次非线性项(如立方刚度)。这两类模型分别对应不同的物理场景,其周期解的研究方法亦存在显著差异[30]-[36]。基于此,本文系统总结两类模型的周期解存在性及稳定性分析方法,并对比其结论的异同。

2. 模型介绍

线性刚度梳齿驱动模型和立方刚度梳齿驱动模型依赖于具有交叉指的两个梳状结构,其中一个梳状结构是固定的,另一个梳状结构是可移动的,如图1所示。可移动电极(可移动指)连接在类似弹簧的柔性锚上,在固定电极(固定指)之间纵向移动,当运动到中心时与固定电极上下两端的距离为 d 。使用相同的电压源从上下两侧对固定电极施加等效偏压,在这种配置下,两个静电力作用在可移动电极上,此时两模型中可移动电极的运动分别由以下方程表示:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{4dhxV^2(\tau)}{(d^2 - x^2)^2} \quad (1)$$

和

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{c}{m} x^3 = \frac{4dhxV^2(\tau)}{(d^2 - x^2)^2} \quad (2)$$

其中, x 表示可移动电极从其静止位置的垂直位移, $\omega^2 = k/m$, k 和 c 分别代表线性和非线性刚度系数, m 是可移动电极的质量, $h = el\varepsilon/2m$, ε 是粘性阻尼系数, e 是电容器的宽度, l 相互作用区中电容器的长度, $V(\tau)$ 表示输入电压。

通过选择适当的距离和时间单位,上述两个弹簧-质量模型可以表示为:

$$\ddot{x} + x \left[1 - \frac{4\beta V_\delta^2(t)}{(1 - x^2)^2} \right] = 0, \quad |x| < 1 \quad (3)$$

和

$$\ddot{x} + x \left[1 + \alpha x^3 - \frac{4\beta V_\delta^2(t)}{(1-x^2)^2} \right] = 0, \quad |x| < 1 \quad (4)$$

其中, $\alpha = \frac{cd^2}{k} > 0$, $\beta = \frac{el\varepsilon}{2kd^3} > 0$, $V_\delta(t)$ 表示直流-交流电压, 以 T 为周期满足

$$V_\delta(t) = V_0 + \delta q(t) \quad (5)$$

这里 V_0 表示直流电压, $q(t)$ 是使 $\int_0^T q(t)dt = 0$ 成立的偶函数, $\delta \in \left[0, -\frac{V_0}{q_m} \right]$, 其中 $q_m = \min_{t \in \mathbb{R}} q(t) < 0$ 。

为了方便计算, 令 $q(t) = \cos(\omega t)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 。

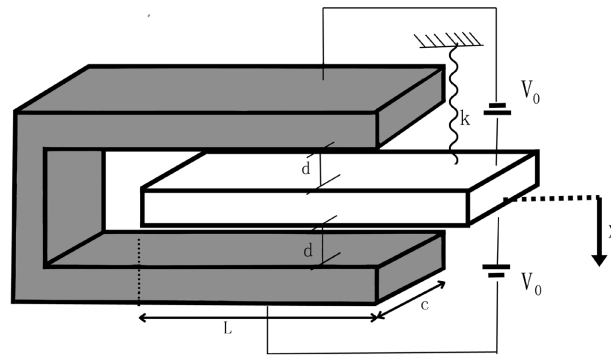


Figure 1. Comb-drive ideal model
图 1. 梳齿驱动器理想模型

3. 研究现状

作为微机电系统中的核心驱动结构, 梳齿驱动器模型凭借其优异的机电耦合特性, 在精密传感与动态执行领域具有重要应用价值。该系统的动力学特性通常通过外部激励电压调控, 但在实际工况下需严格限制电压幅值以防止可移动电极与固定电极间的接触失效(“pull-in”不稳定现象)。这种因静电驱动力超过机械恢复力而引发的 pull-in 不稳定现象[37], 可能直接导致器件功能失效甚至结构损毁, 因此精确建立电压阈值与动态稳定性间的量化关系成为优化系统可靠性的关键问题。

在基础理论研究方面, Nathanson 模型作为 MEMS 动力学研究的奠基性工作, 最早由 Nathanson 团队于 1967 年在研制谐振栅晶体管时提出[38]。该模型通过构建包含线性刚度项与粘滞阻尼项的平行板电容器动力学方程, 成功描述了交直流复合电压激励下可移动电极的受迫振动特性。这一经典模型为后续研究提供了范式基础, 国内外学者通过数值仿真与解析方法对其非线性动力学行为展开了系统性研究[39]-[42]。理论突破出现在 2013 年, Gutiérrez 与 Torres 创新性地采用拓扑度理论与变分原理, 首次严格证明了典型静电 MEMS 系统周期振荡解的全局存在性及 Lyapunov 稳定性, 其建立的 Poincaré 映射

与能量泛函分析方法为梳齿驱动系统的动态特性研究开辟了新途径[43]。此后, 针对梳齿驱动模型周期解动力学的研究持续深化, 在参数辨识、分岔控制等方面取得显著进展[44] [45]。

3.1. 线性刚度梳齿驱动模型研究现状

线性刚度模型适用于小范围运动、高精度控制和稳定性要求高的场景, 其主要优势在于结构简单且

可控性强。该模型采用简洁的数学表达形式，既便于理论层面的分析推导，也利于工程实践中的数值计算。在设计层面，线性系统具有输入-输出的比例响应特性，这使得通过调节刚度系数即可实现精准的位移控制，显著提升了系统的可预测性与参数调控效率。

2017 年，Núñez 与 Rivera 等学者针对带线性刚度项的梳齿驱动 MEMS 模型展开系统性研究，证明了对于任意整数 $n \geq n^*$ ，系统(3)存在一族偶对称的 nT -周期解，其数量由初始条件在区间 $[0, nT/2]$ 内的零点数量决定[46]。这篇文章主要研究了可移动电极在 DC-AC 电压作用下的动力学行为，重点分析了电压变化对周期性运动的影响及避免电极碰撞(“pull-in”不稳定性)的条件。以下是主要内容和结论：首先，通过哈密顿系统分析平衡点，确定临界电压阈值 V^* 。证明了当 $V_0 < V^*$ 时，系统存在中心点和鞍点，周期解围绕中心点存在，且周期函数 $T(\xi)$ 随振幅 ξ 单调递增。接着，利用 Leray-Schauder 全局延拓定理和 Brouwer 度理论，将周期解问题转化为隐函数零点问题，通过构造函数 $F_n(\xi, \delta)$ 并分析其解集再结合偶函数解的对称性和能量估计，证明在参数 $\delta \in [0, \Delta_{**}]$ 范围内，存在从自主系统 $\delta = 0$ 延拓而来的对称周期解族，且解在有限时间内不会触及固定电极，从而避免“pull-in”不稳定现象。最后，通过参数实例(如 $T = 3T_L/2$ 和 $T = 2T_L$)验证理论结果，展示周期解在相空间和时间序列中的行为，确认初始条件与扰动参数 δ 的关系。该研究为静电驱动器设计提供了理论依据，通过严格数学分析量化了电压扰动对动力学行为的影响，为实际应用中避免电极失效(如 MEMS 传感器、执行器)的参数选择提供了指导。

随后，文献[47]证明了系统(3)存在奇周期解。作者使用了打靶法(Shooting Method)和 Sturm 比较定理，并结合了 Ortega 原理，得到了关于奇周期解的存在性和振荡性质的理论结果。以下是论文的主要内容和结果的总结：首先，作者通过打靶法研究了非线性微分方程的 Dirichlet 问题，结合 Sturm 比较定理，分析了方程解的振荡性质。通过比较非线性方程与其变分方程的解，得出了奇周期解的存在条件。接着，作者扩展了 Ortega 在非线性和对称振荡器中的结果，提出了一个更一般的原理，用于研究有限域上的 Dirichlet 问题。但由于该线性刚度梳齿驱动模型中的奇异性，作者使用了截断技术来处理方程，以确保解的存在性和有界性。最后，作者应用了 Ortega 原理，证明了该模型存在奇周期解，且这些解在半个周期内的零点数量可以通过变分方程的零点数量来控制。

总的来说，拓扑理论与打靶法在处理该线性刚度模型周期解问题时形成互补：前者通过拓扑度理论和能量约束在抽象空间中建立解的全局存在性，适用于对称系统的参数安全包络设计，但缺乏解的具体构造；后者基于 Sturm 定理和变分原理通过调整参数解析解的振荡特性，擅长刻画奇对称解的动力学细节却受限于局部计算。工程中常将二者结合，先用拓扑理论保证解族在电压阈值内的整体存在性，再通过打靶法分析奇周期解的零点分布与稳定性，兼顾理论严谨性与实际控制器设计的精细化需求。

3.2. 立方刚度梳齿驱动模型研究现状

梳齿驱动 MEMS 模型中的立方刚度更贴近实际物理系统，能够描述复杂的动力学行为并扩展系统性能，适用于多功能性和高性能需求下的场景。

2019 年，Núñez 和 Perdomo 团队针对含立方刚度项的梳齿驱动 MEMS 系统开展了动力学研究，重点探讨了周期解在交直流复合电压作用下的存在性及稳定性问题[25]。理论分析表明，立方非线性项 α 的引入将显著影响系统的多稳态现象和谐振特性。为确定周期解的存在条件，研究者采用上下解方法，在特定电压阈值范围内证明了系统(4)周期解的存在性。进一步通过稳定性判据分析发现：当参数 $\alpha \in (0, 2]$ 时，系统(4)存在一个不稳定的周期解；而当 $\alpha > 2$ 时，将出现两个正周期解，其中一个解满足线性稳定性条件。该文章首次通过解析方法揭示了立方非线性强度参数 α 对 MEMS 系统稳定性的分岔控制机制，为抑制“pull-in”不稳定现象和控制非线性动力学行为提供了严格的理论框架。

之后，Larreal, Murcia 等在文献[48]中结合数学理论与数值方法对系统(4)的奇周期解的存在性进行

了研究。首先,作者针对该方程奇异性与非线性带来的分析困难,作者引入截断技术,构造了一个修正方程,并利用先验估计证明了修正方程与原方程具有相同的周期解,从而规避了原模型的奇异性问题。随后,基于 Ortega 的变分原理,作者将奇周期解的求解问题转化为 Dirichlet 边值问题,结合 Sturm 比较理论分析了变分方程的零点分布,最终给出了奇周期解存在的充分条件:当电压幅值满足 $V_M \leq \sqrt{1/4\beta}$ 且刚度系数满足 $\alpha \leq 8\beta V_M^2$ 时,系统(4)存在具有指定零点数量的奇周期解。进一步地,作者通过参数区间划分,将周期解的零点数量与电压频率和幅值直接关联,揭示了参数调节对振动模式的定量影响。最后,在数值验证部分,作者通过泰勒方法和高精度计算,模拟了不同参数下的周期解及其稳定性。结果显示,部分奇周期解对应的 Stroboscopic 映射呈现闭合不变曲线,且 Floquet 乘子分析表明这些解具有线性稳定性,为实际 MEMS 设计中振动控制提供了理论依据。文章首次系统证明了梳状驱动装置中奇周期解的存在性及参数依赖规律,突破了传统方法仅关注恒定符号周期解的局限。此外,通过数值模拟揭示了部分解的稳定性特征,为非线性 MEMS 器件的设计与优化提供了新的分析工具和理论支撑。未来工作可进一步从解析角度研究周期解的稳定性,拓展该方法在其他非线性微机电系统中的应用。

最近, Núñez 等在文献[49]中通过对文献[48]的拓展,进一步研究了系统(4)的奇周期解存在性,并证明了奇周期解的存在性与截断函数的选取无关。此外,作者采用扰动方法分析了这些周期解的线性稳定性,证明了当输入电压的交流负载足够小时,二阶奇周期解是线性稳定的,零解 $x=0$ 也是线性稳定的,从而揭示了该模型的双稳态机制,即系统可以同时稳定在零解和某个非零周期解上。这一双稳态机制的发现表明系统在特定参数条件下可以存在两种不同的稳定状态,会导致系统在不同初始条件下表现出截然不同的动态行为。此外,双稳态机制对系统的设计和控制产生重要影响。例如,在电力系统中,双稳态可能导致系统在低负载和高负载条件下表现出不同的稳定运行模式,这对系统的可靠性和稳定性分析具有重要意义。

上述研究不仅具有理论意义,还对 MEMS 设备的设计与应用提供了指导,特别在提高系统稳定性和优化振荡频率方面具有重要价值。

4. 总结

一方面,针对带有线性刚度项的梳齿驱动模型已有学者从数值模拟和解析分析两个方面讨论了其奇偶周期解的存在性,对其对称周期解的稳定性分析有待解决。

另一方面,针对带有立方刚度项的梳齿驱动模型,已有学者研究了其奇周期解的存在性,并对其出现稳定的周期解的情况进行了分析,对其偶周期解的存在性以及对称周期解的稳定性有待研究。

参考文献

- [1] Zhang, W., Yan, H., Peng, Z. and Meng, G. (2014) Electrostatic Pull-In Instability in MEMS/NEMS: A Review. *Sensors and Actuators A: Physical*, **214**, 187-218. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2014.04.025>
- [2] 秦立君, 罗军, 马喜宏, 等. 一种微机电系统面内加速度传感器的设计与仿真[J]. 电子产品可靠性与环境试验, 2024, 42(6): 27-33.
- [3] Wang, J., Zhang, M., Wang, Z., Sun, S., Ning, Y., Yang, X., et al. (2022) An Ultra-Low Power, Small Size and High Precision Indoor Localization System Based on MEMS Ultrasonic Transducer Chips. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **69**, 1469-1477. <https://doi.org/10.1109/tuffc.2022.3148314>
- [4] He, J., He, C., Qian, M. and Alsolami, A.A. (2024) Piezoelectric Biosensor Based on Ultrasensitive MEMS System. *Sensors and Actuators A: Physical*, **376**, Article 115664. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2024.115664>
- [5] 林万波, 陆宇平. 基于 MEMS 技术的三角翼飞行器涡流控制系统研究[J]. 计算机测量与控制, 2008, 16(7): 962-963.
- [6] Son, J., Ahn, B., Ha, J. and Choi, B. (2016) An Availability of MEMS-Based Accelerometers and Current Sensors in Machinery Fault Diagnosis. *Measurement*, **94**, 680-691. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.08.035>

-
- [7] 赵晨茜, 张大伟, 王远瑞, 等. 基于微机电系统的智能传感器在全膝关节置换术中的应用及现状[J]. 骨科, 2024, 15(6): 563-567.
 - [8] Judy, J.W. (2001) Microelectromechanical Systems (MEMS): Fabrication, Design and Applications. *Smart Materials and Structures*, **10**, 1115-1134. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/6/301>
 - [9] Chircov, C. and Grumezescu, A.M. (2022) Microelectromechanical Systems (MEMS) for Biomedical Applications. *Micromachines*, **13**, Article 164. <https://doi.org/10.3390/mi13020164>
 - [10] Schopp, J. and McNamara, S. (2024) Passive Communication for Low Power Distributed Sensors Using MEMS Optical Cavities. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **34**, Article 035011. <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ad2910>
 - [11] Hou, Y., Jiao, R. and Yu, H. (2021) MEMS Based Geophones and Seismometers. *Sensors and Actuators A: Physical*, **318**, Article 112498. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112498>
 - [12] Kciuk, S., Krzystała, E., Mężyk, A. and Szmidt, P. (2022) The Application of Microelectromechanical Systems (MEMS) Accelerometers to the Assessment of Blast Threat to Armored Vehicle Crew. *Sensors*, **22**, Article 316. <https://doi.org/10.3390/s22010316>
 - [13] 裴嘉裕, 张国军, 荆博原, 等. 基于 MEMS 水听器的水下探测系统设计与实现[J]. 微纳电子技术, 2024, 61(3): 101-111.
 - [14] 王军波, 龚黎明, 陈德勇, 等. 平面电极型 MEMS 电化学地震传感器[J]. 光学精密工程, 2015, 23(3): 769-775.
 - [15] Liao, M. (2021) Progress in Semiconductor Diamond Photodetectors and MEMS Sensors. *Functional Diamond*, **1**, 29-46. <https://doi.org/10.1080/26941112.2021.1877019>
 - [16] Liu, H., Luo, Z., Hu, Z., Yang, S., Tu, L., Zhou, Z., et al. (2022) A Review of High-Performance MEMS Sensors for Resource Exploration and Geophysical Applications. *Petroleum Science*, **19**, 2631-2648. <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2022.06.005>
 - [17] Younis, M. (2011) MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6020-7>
 - [18] Adrega, T., Chu, V. and Conde, J.P. (2006) Electrostatically Actuated Resonance of Amorphous Silicon Microresonators in Water. *Applied Physics Letters*, **89**, Article 143109. <https://doi.org/10.1063/1.2358215>
 - [19] Huang, J. (2008) In-Plane Rotary Comb-Drive Actuator for a Variable Optical Attenuator. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, **7**, Article 043015. <https://doi.org/10.1117/1.3013547>
 - [20] Li, R., Mohammed, Z., Rasras, M., Elfadel, I.M. and Choi, D. (2021) Design, Modelling and Characterization of Comb Drive MEMS Gap-Changeable Differential Capacitive Accelerometer. *Measurement*, **169**, Article 108377. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.108377>
 - [21] Anderson, M.J., Hill, J.A., Fortunko, C.M., Dogan, N.S. and Moore, R.D. (1995) Broadband Electrostatic Transducers: Modeling and Experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **97**, 262-272. <https://doi.org/10.1121/1.412310>
 - [22] Camon, H., Larnaudie, F. and Rivoirard, F. (1999) Analytical simulation of a 1D Single Crystal Electrostatic Micromirror. *International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, San Juan, April 1999, 628-631.
 - [23] Kim, P. and Lieber, C.M. (1999) Nanotube Nanotweezers. *Science*, **286**, 2148-2150. <https://doi.org/10.1126/science.286.5447.2148>
 - [24] Tilmans, H.A.C., Elwenspoek, M. and Fluitman, J.H.J. (1992) Micro Resonant Force Gauges. *Sensors and Actuators A: Physical*, **30**, 35-53. [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(92\)80194-8](https://doi.org/10.1016/0924-4247(92)80194-8)
 - [25] Nuñez, D., Perdomo, O. and Rivera, A. (2019) On the Stability of Periodic Solutions with Defined Sign in MEMS via Lower and Upper Solutions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **46**, 195-218. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.010>
 - [26] Adams, S.G., Bertsch, F.M., Shaw, K.A. and MacDonald, N.C. (1998) Independent Tuning of Linear and Nonlinear Stiffness Coefficients [Actuators]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **7**, 172-180. <https://doi.org/10.1109/84.679344>
 - [27] DeMartini, B.E., Butterfield, H.E., Moehlis, J. and Turner, K.L. (2007) Chaos for a Microelectromechanical Oscillator Governed by the Nonlinear Mathieu Equation. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **16**, 1314-1323. <https://doi.org/10.1109/jmems.2007.906757>
 - [28] Wang, Y.C., Adams, S.G., Thorp, J.S., MacDonald, N.C., Hartwell, P. and Bertsch, F. (1998) Chaos in MEMS, Parameter Estimation and Its Potential Application. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **45**, 1013-1020. <https://doi.org/10.1109/81.728856>
 - [29] Shaw, S.W., Turner, K.L., Rhoads, J.F. and Baskaran, R. (2005) Parametrically Excited MEMS-Based Filters. In: Rega,
-

- G. and Vestroni, F., Eds., *Solid Mechanics and Its Applications*, Springer, 137-146.
https://doi.org/10.1007/1-4020-3268-4_13
- [30] 张峰, 苑伟政, 常洪龙, 等. 静电梳齿驱动结构的稳定性分析[J]. 传感技术学报, 2011, 24(8): 1122-1125.
 - [31] 周春燕, 胡博. 梳齿结构与振动梁复合的硅微谐振器的非线性分析[J]. 北京理工大学学报, 2022, 42(4): 390-397.
 - [32] 吴天准, 董景新, 赵长德, 等. 梳齿式微机械加速度计闭环系统的线性度[J]. 机械工程学报, 2006, 1(12): 128-131.
 - [33] Mahmud, M.A.P., Bazaz, S.R., Dabiri, S., Mehrizi, A.A., Asadnia, M., Warkiani, M.E., et al. (2022) Advances in MEMS and Microfluidics-Based Energy Harvesting Technologies. *Advanced Materials Technologies*, 7, Article 2101347.
<https://doi.org/10.1002/admt.202101347>
 - [34] Braghin, F., Resta, F., Leo, E. and Spinola, G. (2007) Nonlinear Dynamics of Vibrating MEMS. *Sensors and Actuators A: Physical*, **134**, 98-108. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2006.10.041>
 - [35] Elshurafa, A.M., Khirallah, K., Tawfik, H.H., Emira, A., Abdel Aziz, A.K.S. and Sedky, S.M. (2011) Nonlinear Dynamics of Spring Softening and Hardening in Folded-MEMS Comb Drive Resonators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **20**, 943-958. <https://doi.org/10.1109/jmems.2011.2148162>
 - [36] Han, J., Li, L., Jin, G., Feng, J., Li, B., Jia, H., et al. (2018) Vibration Identification of Folded-MEMS Comb Drive Resonators. *Micromachines*, **9**, Article 381. <https://doi.org/10.3390/mi9080381>
 - [37] Senturia, S. (2001) *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/b117574>
 - [38] Nathanson, H.C., Newell, W.E., Wickstrom, R.A. and Davis, J.R. (1967) The Resonant Gate Transistor. *IEEE Transactions on Electron Devices*, **14**, 117-133. <https://doi.org/10.1109/t-ed.1967.15912>
 - [39] Ai, S. and Pelesko, J.A. (2008) Dynamics of a Canonical Electrostatic MEMS/NEMS System. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 609-641. <https://doi.org/10.1007/s10884-007-9094-x>
 - [40] Alsaleem, F.M., Younis, M.I. and Ouakad, H.M. (2009) On the Nonlinear Resonances and Dynamic Pull-In of Electrostatically Actuated Resonators. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **19**, Article 045013.
<https://doi.org/10.1088/0960-1317/19/4/045013>
 - [41] Lakrad, F. and Belhaq, M. (2011) Suppression of Pull-In in a Microstructure Actuated by Mechanical Shocks and Electrostatic Forces. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **46**, 407-414.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.10.006>
 - [42] Zhang, W. and Meng, G. (2005) Nonlinear Dynamical System of Micro-Cantilever under Combined Parametric and Forcing Excitations in MEMS. *Sensors and Actuators A: Physical*, **119**, 291-299.
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2004.09.025>
 - [43] Gutiérrez, A. and Torres, P.J. (2013) Nonautonomous Saddle-Node Bifurcation in a Canonical Electrostatic MEMS. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article 1350088.
<https://doi.org/10.1142/s0218127413500880>
 - [44] Lei, J., Li, X., Yan, P. and Zhang, M. (2003) Twist Character of the Least Amplitude Periodic Solution of the Forced Pendulum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **35**, 844-867. <https://doi.org/10.1137/s003614100241037x>
 - [45] Ortega, R. (2016) Symmetric Periodic Solutions in the Sitnikov Problem. *Archiv der Mathematik*, **107**, 405-412.
<https://doi.org/10.1007/s00013-016-0931-1>
 - [46] Gutierrez, A., Núñez, D. and Rivera, A. (2017) Effects of Voltage Change on the Dynamics in a Comb-Drive Finger of an Electrostatic Actuator. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **95**, 224-232.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.008>
 - [47] Núñez, D., Larreal, O. and Murcia, L. (2021) Odd Periodic Oscillations in Comb-Drive Finger Actuators. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **61**, Article 103347. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103347>
 - [48] Lerreal, O., Murcia, L. and Núñez, D. (2022) Odd Periodic Oscillations for COMB-Drive Fingers MEMS with Cubic Stiff-Ness. *Journal of Mathematical Control Science and Applications*, **8**, 185-197.
 - [49] Núñez, D. and Murcia, L. (2023) On a Bi-Stability Regime and the Existence of Odd Subharmonics in a Comb-Drive MEMS Model with Cubic Stiffness. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **74**, Article 103938.
<https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103938>