Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(4), 278-285**
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144161

Hans汉斯

(2 + 1)维Gardner方程孤立波解的存在性

张浩杰

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2025年3月10日；录用日期：2025年4月3日；发布日期：2025年4月14日

摘 要

在本文中，我们研究了扰动的(2 + 1)维Gardner方程孤立波解的存在性。首先，我们利用平面动力系统的相关知识对未扰系统的平衡点进行研究，得到了孤立波解存在的参数条件并画出了相图。然后，利用几何奇异摄动理论、不变流形理论和弗雷德霍姆理论，通过构造相应微分方程的不变流形，我们得到了相应的同宿轨道。进一步，根据同宿轨道和孤立波之间的对应关系，我们得到了扰动系统孤立波解的存在性。

关键词

(2 + 1)维Gardner方程，几何奇异摄动理论，弗雷德霍姆理论，孤立波解

Existence of Solitary Wave Solutions for the (2 + 1) Dimensional Gardner Equation

Haojie Zhang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Apr. 3rd, 2025; published: Apr. 14th, 2025

Abstract

In this paper, we investigate the existence of solitary wave solutions for perturbed (2 + 1) dimensional Gardner equation. Firstly, we utilize the relevant knowledge of planar dynamical systems to study the equilibrium points of undisturbed system, obtain the parameter conditions for the existence of solitary wave solutions, and drew a phase diagram. Then, using geometric singular perturbation theory, invariant manifold theory, and Fredholm theory, we obtain a homoclinic orbit by constructing the invariant manifold of the corresponding differential equation. Further, through the correspondence between homoclinic orbits and solitary waves, we prove the existence of solitary wave solutions for the perturbed system.

文章引用: 张浩杰. (2 + 1)维 Gardner 方程孤立波解的存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 278-285.
DOI: 10.12677/aam.2025.144161

Keywords

(2 + 1) Dimensional Gardner Equation, Geometric Singular Perturbation Theory, Fredholm Theory, Solitary Wave Solutions

1. 引言

非线性偏微分方程是描述物理现象的一类重要数学模型，而求这些非线性偏微分方程的解一直是学者研究的重点，特别是行波解这类可以很好描述各类物理现象的解。水波方程作为一类重要的非线性偏微分方程，吸引了许多学者的关注。1985 年，Korteweg 和 de Vries [1]提出了著名的 KdV 方程如下所示：

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

其中 uu_x 称为非线性项，它可使波形变陡；u_{xxx} 称为色散效应项，它可使波形扩展。它们之间的相互作用导致孤子的产生，并且色散效应影响很小，在最低阶近似下可以忽略不计。随后在 KdV 方程的基础上，衍化而来如下的另外一个重要的水波方程：(2 + 1)维 Gardner 方程[2]。

$$\left(u_t + 6uu_x - 6u^2 u_x + u_{xxx}\right)_x + u_{yy} = 0. \tag{1.2}$$

对于上述等非线性偏微分方程的求解，目前没有系统有效的解决方法，在各个科学领域，都有相应的独特求解方法。而随着研究的深入，许多非线性偏微分方程行波解研究被研究透彻。然而，在现实的情况下，其他因素的干扰是不可避免的。因此，在建立模型的时候，我们应该考虑扰动项的存在。例如，在水波方程中，向后扩散项 u_{xx} 和耗散项 u_{xxxx} 是其中两个重要因素。它们的组合称为 Kuramoto-Sivashinsky (KS)扰动。1978 年，Topper 和 Kawahara [3]研究了下面的偏微分方程来解释倾斜表面上液体层的波动。

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \tag{1.3}$$

其中 α 、β 和 γ 是正参数。如果斜率和表面张力相对较长且较弱，则 u_{xx} 和 u_{xxxx} 被视为小参数。自然的方程就演变为扰动的 KdV 方程，如下所示：

$$u_t + uu_x + u_{xxxx} + \tau\left(u_{xx} + u_{xxxx}\right) = 0 \tag{1.4}$$

其中 $0 < \tau \ll 1$。此外，我们还应当考虑时间和空间的变化所带来的影响。1989 年，Britton [4]研究了下面的生物种群模型

$$u_t = u\left(1 + \alpha u - (1+\alpha) f * u\right) + \Delta u, \tag{1.5}$$

其中 $f * u = \int_{-\infty}^{t} f(t-s)u(x,s)\mathrm{d}s$ 称为具有分布延迟的时空卷积。并且这里的 f 表示核函数满足 $f(t) \ge 0$ 和 $\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$。此后，许多研究开始集中在研究具有时滞以及小扰动方程行波解的存在性上。例如，赵志红[5]教授研究了下面扰动的广义 KdV 方程

$$u_t + (f * u)u^n u_x + u_{xxx} + \tau u_{xx} = 0. \tag{1.6}$$

其中 $0 < \tau \ll 1$ 并且这里的 τu_{xx} 表示向后扩散扰动或粘性项的扰动。2018 年，杜增吉教授[6]等人研究了以下延迟的 Camassa-Holm (CH)方程

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3(f*u)u_x + \tau u_{xx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{1.7}$$

他们通过同宿轨道和孤立波之间的关系，证明了上述方程具有局部延迟卷积和非局部延迟卷积的孤立波解的存在性。2024 年，韦敏志副教授[7]等人研究了下面 4 参数的扰动 KP-MEW 方程

$$\left(u_t + a\left((f*u)u^2\right)_x + bu_{xxt} + \tau qu_{xx} + k(1-q)u_x\right)_x + d\left(qu + (1-q)(f*u)^2\right)_{yy} = 0, \tag{1.8}$$

其中$\left((f*u)^2\right)_{yy}$为延迟非线性横向效应。他们利用阿贝尔积分单调准则证明了周期波解的存在性和唯一性。

上述所有文章都涉及到一个重要的用来解决小参数扰动问题的工具：几何奇异摄动理论[8] [9]。它开端与普朗特的边界层理论，它在非线性偏微分方程中有着重要的应用，特别是在证明行波解的存在性问题上。除了上面提到的工作，还有许多几何奇异摄动理论应用在行波解存在性的文章[10]-[14]。

基于上述分析，在本文中我们考虑下面的扰动的(2 + 1)维 Gardner 方程

$$\left(u_t + \left(3(f*u)u\right)_x - 6u^2u_x + u_{xxx} + \tau u_{xx}\right)_x + u_{yy} = 0, \tag{1.9}$$

其中$0<\tau \ll 1$，τu_{xx}表示向后扩散扰动或粘性项的扰动，$f*u$由下式给出代表分布式时滞的时空卷积

$$(f*u)(x,y,t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-s)u(x,y,s)\mathrm{d}s. \tag{1.10}$$

本文中，我们取核函数为在微分延迟方程中经常出现的一般强核形式

$$f(t) = \frac{t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{1.11}$$

2. 未扰系统分析

通过行波变换$\phi(\xi) = u(x,y,t) = u(x+y-ct)$，方程(1.2)变为

$$\left(-c\phi' + 6\phi\phi' - 6\phi^2\phi' + \phi'''\right)' + \phi'', \tag{2.1}$$

其中$\phi' = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}$并且$c>0$代表波速。对上述方程两端同时积分两次，并不失一般性地取积分常数为 0，我们得到

$$-c\phi + 3\phi^2 - 2\phi^3 + \phi'' + \phi = 0, \tag{2.2}$$

它等价于

$$\begin{cases} \phi' = y \\ y' = 2\phi^3 - 3\phi^2 - (1-c)\phi. \end{cases} \tag{2.3}$$

此时方程化为二维的常微分系统，同时很容易验证它是一个哈密顿系统并且它的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\phi^4 + \phi^3 + \frac{1-c}{2}\phi^2. \tag{2.4}$$

根据平面动力系统的相关知识，我们得到下面的结果：

定理 1： 当$\frac{3}{4}<c<1$时，系统(2.3)有一条过鞍点$E_2\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right)$且包围中心$E_1(0,0)$的同宿轨道$\Gamma$（见图 1）。

证明： 当$\frac{3}{4}<c<1$时，此时系统(2.3)有三个平衡点分别是$E_1(0,0)$，$E_2\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right)$和$E_2\left(\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4},0\right)$，

其中 $\Delta = 9 + 8(1-c)$。然后通过计算，我们得到系统(2.3)的线性化矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6\phi^2 - 6\phi - (1-c) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

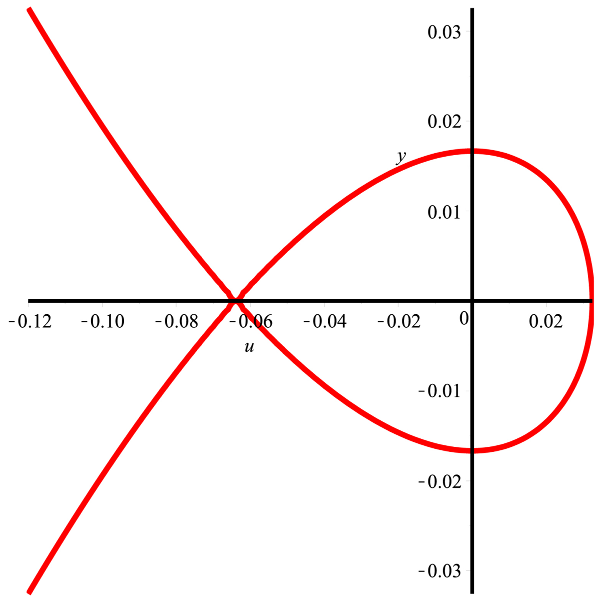

Figure 1. Homoclinic orbit of unperturbed system
图 1. 未扰系统的同宿轨道

因此，我们可以计算出三个平衡点的雅可比矩阵和迹分别

$$J(0,0) = \det A(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -(1-c) & 0 \end{vmatrix} = 1-c, \ \mathrm{Trace}\, A(0,0) = 0 \tag{2.6}$$

$$J\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right) = \det A\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0,0\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2\Delta - 6\sqrt{\Delta}}{8} & 0 \end{vmatrix} = \frac{6\sqrt{\Delta} - 2\Delta}{8}, \ \mathrm{Trace}\, A\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right) = 0 \tag{2.7}$$

$$J\left(\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4},0\right) = \det A\left(\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4},0,0\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2\Delta + 6\sqrt{\Delta}}{8} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-6\sqrt{\Delta} - 2\Delta}{8}, \ \mathrm{Trace}\, A\left(\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4},0\right) = 0 \tag{2.8}$$

因此，当 $\frac{3}{4} < c < 1$ 时，$J(0,0) > 0$，$J\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right) < 0$ 以及 $J\left(\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4},0\right) < 0$。我们可以判断出 $E_2\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right)$ 和 $E_3\left(\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4},0\right)$ 是鞍点，而 $E_1(0,0)$ 是中心。此时系统(2.3)有一条由能量函数 H_{E_2} 定义的过鞍点 $E_2\left(\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4},0\right)$ 且包围中心 $E_1(0,0)$ 的同宿轨道 Γ （见图 1)。

3. 扰动系统孤立波解的存在性

类似地，通过行波变换 $\phi(\xi) = u(x,y,t) = u(x+y-ct)$，我们得到

$$\left(-c\phi'+\left(3\left(f*u\right)\phi\right)'-6\phi^2\phi'+\phi'''+\tau\phi''\right)'+\phi''=0, \tag{3.1}$$

其中 $\phi'=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}$，$0<\tau\ll1$ 并且 $c>0$ 代表波速。对上述方程两端同时积分两次，并不失一般性地取积分常数为 0，我们得到

$$-c\phi+3\varpi\phi-2\phi^3+\phi''+\tau\phi'+\phi=0, \tag{3.2}$$

其中 $\varpi=f*u=\varpi\left(\xi\right)=\int_0^\infty\frac{t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\phi\left(\xi+ct\right)\mathrm{d}t$ 代表分布式时滞的时空卷积。我们对 ϖ 关于 ξ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{c\tau}\left(\varpi-\sigma\right), \tag{3.3}$$

其中 $\sigma=\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\phi\left(\xi+ct\right)\mathrm{d}t$。同理我们可得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{c\tau}\left(\sigma-\phi\right). \tag{3.4}$$

因此我们可以得到系统(3.2)等价于下面的四维动力系统

$$\begin{cases}\phi'=y\\ y'=2\phi^3-3\varpi\phi-\left(1-c\right)\phi-\tau y\\ c\tau\varpi'=\varpi-\sigma\\ c\tau\sigma'=\sigma-\phi.\end{cases} \tag{3.5}$$

当 $\tau=0$ 时，我们得到 $\varpi=\phi$，此时扰动系统(3.2)可化为已经考虑过的未扰系统(2.2)。当 $0<\tau\ll1$ 时，上述系统(2.6)可视为一个标准的奇异摄动问题，通过时间尺度变换 $\xi=\tau z$，我们可以得到相对应的快系统为

$$\begin{cases}\dot{\phi}=\tau y\\ \dot{y}=\tau\left[2\phi^3-3\varpi\phi-\left(1-c\right)\phi-\tau y\right]\\ \dot{\varpi}=\dfrac{1}{c}\left(\varpi-\sigma\right)\\ \dot{\sigma}=\dfrac{1}{c}\left(\sigma-\phi\right).\end{cases} \tag{3.6}$$

在这里 $\dot{}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$。然后令(3.5)和(3.6)中的 $\tau=0$，可得

$$\begin{cases}\phi'=y\\ y'=2\phi^3-3\varpi\phi-\left(1-c\right)\phi-\tau y\\ 0=\varpi-\sigma\\ 0=\sigma-\phi.\end{cases} \tag{3.7}$$

和

$$\begin{cases}\dot{\phi}=0\\ \dot{y}=0\\ \dot{\varpi}=\dfrac{1}{c}\left(\varpi-\sigma\right)\\ \dot{\sigma}=\dfrac{1}{c}\left(\sigma-\phi\right)\end{cases} \tag{3.8}$$

它们分别称为简化系统和层系统。因此，根据几何奇异摄动理论[7] [8]，我们可以得到以下的临界流形

$$M_0=\left\{(\phi,y,\varpi,\sigma)\in\mathbb{R}^4:\varpi=\sigma=\phi\right\}. \tag{3.9}$$

此外，当 $\tau=0$ 时，系统(3.6)的线性化矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

通过计算，我们发现它有四个特征值：$0,0,\frac{1}{c},\frac{1}{c}$。此时零特征值的重数与临界流形的维数是相等的。因此，M_0 是法向双曲的。根据 Fenichel 不变流形定理[7] [8]，当 $0<\tau\ll1$ 时，存在如下一个与 M_0 微分同胚的不变流形 M_τ

$$M_\tau=\left\{(\phi,y,\varpi,\sigma)\in\mathbb{R}^4:\varpi=\phi+l(\phi,y,\tau),\sigma=\phi+k(\phi,y,\tau)\right\}. \tag{3.11}$$

其中 l 和 k 是定义在紧区域上且分别满足 $l(\phi,y,0)=0$ 和 $k(\phi,y,0)=0$ 的光滑函数。因此，我们可以将 l 和 k 关于 τ 进行泰勒展开

$$\begin{cases} l(\phi,y,\tau)=\tau l_1(\phi,y)+\tau^2 l_2(\phi,y)+\cdots \\ k(\phi,y,\tau)=\tau k_1(\phi,y)+\tau^2 k_2(\phi,y)+\cdots \end{cases} \tag{3.12}$$

此外，根据 ϖ ，σ 和 M_τ 的定义可得

$$\begin{cases} \dot{\varpi}=\dot{\phi}+\frac{\partial l}{\partial\phi}\dot{\phi}+\frac{\partial l}{\partial y}\dot{y} \\ \dot{\sigma}=\dot{\phi}+\frac{\partial k}{\partial\phi}\dot{\phi}+\frac{\partial k}{\partial y}\dot{y} \end{cases} \tag{3.13}$$

和

$$\begin{cases} \dot{\varpi}=\frac{1}{c}(\varpi-\sigma) \\ \dot{\sigma}=\frac{1}{c}(\sigma-\phi) \end{cases} \tag{3.14}$$

将上述两个式子分别带入到式子(3.12)中，然后比较 τ 前面的系数，我们可得

$$l=2c\tau y+o(\tau),k=c\tau y+o(\tau). \tag{3.15}$$

最后将它限制在 M_τ 上，得到

$$\begin{cases} \phi'=y \\ y'=2\phi^3-3\phi^2-(1-c)\phi-\tau(6c\phi-1)y+o(\tau). \end{cases} \tag{3.16}$$

很明显，当 $\tau=0$ 时，扰动系统(3.16)就可以化简为未扰系统(2.3)。

定理 2 当 $\frac{3}{4}<c<1$，并且 $0<\tau\ll1$ 时，带有时滞卷积扰动的方程(1.7)存在孤立波解。即扰动系统(3.16)有一条同宿轨道 Γ_τ，它位于原同宿轨道 Γ 的附近。

证明： 令 (ϕ_0, y_0) 是系统(3,16)当 $\tau = 0$ 时的解，因此我们可设当 $0 < \tau \ll 1$ 时，系统(3.16)的解为 $\phi = \phi_0 + \tau\phi_{01} + \cdots$， $y = y_0 + \tau y_{01} + \cdots$。将它带回到系统(3.16)，比较 τ 的系数我们可以得到关于 ϕ_{01} 和 y_{01} 的微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\begin{pmatrix}\phi_{01}\\ y_{01}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -6\phi_0^2+6\phi_0+(1-c) & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{01}\\ y_{01}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -6c\phi_0\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

我们的目标是找到满足方程(3.17)， $\phi_0(\pm\infty) = 0$ 以及 $y_0(\pm\infty) = 0$ 的行波解。定义 L^2 为二次可积函数空间，并且它的内积为

$$\langle \phi_{01}(\xi), y_{01}(\xi)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_{01}(\xi), y_{01}(\xi))\mathrm{d}\xi \tag{3.18}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示二维空间上的欧氏内积。由弗雷德霍姆理论，我们知道方程(3.17)有解当且仅当对于所有的 $\phi_{01}(\xi)$ 有下面的式子成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\phi_{01}(\xi),\begin{pmatrix}0\\ -6c\phi_0\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}\xi = 0. \tag{3.19}$$

并且 $\phi_{01}(\xi)$ 是方程(3.17)等号左边定义的算子 L 的核。定义算子 L^* 是算子 L 的伴随算子，我们可得

$$L^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+\begin{pmatrix}0 & -6\phi_0^2+6\phi_0+(1-c)\\ -1 & -1\end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

因此，为了计算 L^* 的核，我们必须找到所有的 $\phi_{01}(\xi)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\phi_{01}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\begin{pmatrix}0 & -6\phi_0^2+6\phi_0+(1-c)\\ -1 & -1\end{pmatrix}\phi_{01}(\xi). \tag{3.21}$$

由于上述矩阵是变系数矩阵，我们很难求出它的通解。但是，我们只需要找到满足 $\phi_{01}(\pm\infty) = 0$ 的解，而这样的解只能是零解。而目前我们已知的是 (ϕ_0, y_0) 是未扰系统的解，我们虽然不知道它的具体表达式，但是我们知道它满足边界条件 $\phi_{01}(\pm\infty) = 0$。因此令 $\xi \to \pm\infty$，变系数矩阵就变为下面的常数矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 1-c\\ -1 & -1\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

很明显，此时它的特征根是由特征方程 $\lambda^2 + \lambda + (1-c) = 0$ 决定的。容易验证当 $\frac{3}{4} < c < 1$ 时，它的两个实特征根都是负的。因此我们可以得到满足 $\phi_{01}(\pm\infty) = 0$ 的解只有零解，满足弗雷德霍姆理论的条件。从而，方程(3.17)有唯一的解满足 $\phi_0(\pm\infty) = 0$ 和 $y_0(\pm\infty) = 0$。即当 $0 < \tau \ll 1$时，扰动系统(3.16)存在一条同宿轨道 Γ_τ。

4. 总结

在本文中，我们研究了扰动的(2 + 1)维 Gardner 方程孤立波解的存在性。首先我们利用平面动力系统和哈密顿系统的相关知识，对未扰系统的平衡点进行分析并画出了相应的同宿轨道。然后，我们利用几何奇异摄动理论、不变流形理论和弗雷德霍姆理论证明了系统在时滞卷积项以及弱向后扩散项的联合扰动下，孤立波依然存在。

参考文献

[1] Korteweg, D.J. and de Vries, G. (1895) XLI. on the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal,

and on a New Type of Long Stationary Waves. *The London*, *Edinburgh*, *and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **39**, 422-443. https://doi.org/10.1080/14786449508620739

[2] Konopelchenko, B.G. (1991) Inverse Spectral Transform for the (2 + 1)-Dimensional Gardner Equation. *Inverse Problems*, **7**, 739-753. https://doi.org/10.1088/0266-5611/7/5/007

[3] Topper, J. and Kawahara, T. (1978) Approximate Equations for Long Nonlinear Waves on a Viscous Fluid. *Journal of the Physical Society of Japan*, **44**, 663-666. https://doi.org/10.1143/jpsj.44.663

[4] Britton, N.F. (1990) Spatial Structures and Periodic Travelling Waves in an Integro-Differential Reaction-Diffusion Population Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **50**, 1663-1688. https://doi.org/10.1137/0150099

[5] Zhao, Z. (2008) Solitary Waves of the Generalized KDV Equation with Distributed Delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **344**, 32-41. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.02.036

[6] Du, Z., Li, J. and Li, X. (2018) The Existence of Solitary Wave Solutions of Delayed Camassa-Holm Equation via a Geometric Approach. *Journal of Functional Analysis*, **275**, 988-1007. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.05.005

[7] Wei, M., Fan, F. and Chen, X. (2024) Periodic Wave Solutions for a KP-MEW Equation under Delay Perturbation. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **462**, Article 134143. https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134143

[8] Fenichel, N. (1979) Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **31**, 53-98. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9

[9] Jones, C.K.R.T. (1995) Geometric Singular Perturbation Theory. In: Johnson, R., Ed., *Dynamical Systems*, Springer, 44-118. https://doi.org/10.1007/bfb0095239

[10] Zheng, H. and Xia, Y. (2024) Persistence of Solitary Wave Solutions for the Delayed Regularized Long Wave Equation under Kuramoto-Sivashinsky Perturbation and Marangoni Effect. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **184**, Article ID: 115049. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115049

[11] Shen, J. and Zhang, X. (2021) Traveling Pulses in a Coupled Fitzhugh-Nagumo Equation. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **418**, Article ID: 132848. https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132848

[12] Du, Z. and Qiao, Q. (2020) The Dynamics of Traveling Waves for a Nonlinear Belousov-Zhabotinskii System. *Journal of Differential Equations*, **269**, 7214-7230. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.05.033

[13] Li, X., Du, Z. and Ji, S. (2019) Existence Results of Solitary Wave Solutions for a Delayed Camassa-Holm-KP Equation. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **18**, 3367-3387. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019152

[14] Sun, X. and Yu, P. (2019) Periodic Traveling Waves in a Generalized BBM Equation with Weak Backward Diffusion and Dissipation Terms. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **24**, 965-987. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018341