Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 323-330
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144165

有限von Neumann代数上一类迹函数的若干性质

马　宁

太原理工大学数学学院，山西　晋中

收稿日期：2025年3月14日；录用日期：2025年4月7日；发布日期：2025年4月15日

摘　要

本文在有限von Neumann代数的情形下应用广义奇异值的方法证明了一类迹函数的若干性质。特别地，我们将Hansen的主要结果推广至有限von Neumann代数的情形。

关键词

次优化不等式，迹不等式，广义奇异值，von Neumann代数

Some Properties of a Class of Trace Functions on Finite von Neumann Algebras

Ning Ma

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Mar. 14th, 2025; accepted: Apr. 7th, 2025; published: Apr. 15th, 2025

Abstract

In this paper, via the method of generalized singular values, we prove some properties of a class of trace functions defined over finite von Neumann algebras. In particular, we extend the main results of Hansen to the context of finite von Neumann algebras.

Keywords

Submajorization Inequalities, Trace Inequalities, Generalized Singular Values,

文章引用: 马宁. 有限 von Neumann 代数上一类迹函数的若干性质[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 323-330.
DOI: 10.12677/aam.2025.144165

von Neumann Algebras

1. 引言

矩阵的迹是矩阵的重要特征，与之相关的不等式在量子信息和随机控制等领域有着广泛的应用。我们注意到，2024 年，Hansen 在[1]中研究了下述迹函数在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})^+$ 上的凹(凸)性

$$\phi_{p,q}^{A}(X)=\tau\left[\exp_p\left(A+B\log_p(x)B\right)^q\right]. \tag{1.1}$$

其中 $M_n(\mathbb{C})^+$ 表示所有半正定复矩阵构成的集合。迹函数(1.1)可以看成下述迹函数的推广形式

$$X\to\tau\left(\exp\left(A+\log X\right)\right). \tag{1.2}$$

该映射在量子力学熵不等式中有着广泛的应用，具体细节见文献[1] [2]及其参考文献。在有关上述迹函数的凹凸性的研究中，Lieb [3]给出了一个著名的结论：对于固定的自伴矩阵 A，映射(1.2)在正定矩阵中是凹的。此后，有关此类迹函数凹凸性的研究便得到了广泛关注。最近，Hansen-Liang-Shi [4]和 Shi-Hansen [1]基于所谓的变形指数函数和对数函数，对 Peierls-Bogolyubov 和 Golden-Thompson 迹不等式进行了一些推广。特别地，他们利用这些结果改进了 Tsallis 相对熵的下界。关于变形指数函数和对数函数的迹函数的更多知识，可参见[1] [4]。

在本文中，我们将在有限 von Neumann 的情形下考虑映射(1.1)的凹凸性，进而将 Hansen [1]的主要结论推广至有限 von Neumann 代数的情形。矩阵代数和定义在有限测度空间上的 L^∞ 空间是两个有限 von Neumann 代数的例子。因此，这些结论可以看成 Hansen 结论的推广。由于这类迹函数在统计力学理论和量子信息理论等方面都有着重要作用，所以这类推广是有一定的理论和实际意义的。

2. 预备知识

在本节中，我们将介绍非交换积分理论中的一些概念。设 H 是定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的可分希尔伯特空间，$\mathrm{B}(H)$ 是 H 上所有有界线性算子构成的 $*$-代数且用 I 表示 H 上的恒等算子。设 M 是 $\mathrm{B}(H)$ 的一个包含恒等算子的 $*$-子代数。如果 M 在弱 $*$ 算子拓扑下是闭的，则称 M 为 von Neumann 代数。我们用 M^{++} 表示 M 中所有正且可逆的算子集合。设 τ 是 M 上的迹，若 $\tau(x^*x)=0$ 有 $x=0$，则称 τ 是忠实的；若 $x_i\uparrow_i x$ 有 $0\le\tau(x_i)\uparrow_i\tau(x)$，则称 τ 为正规的；若 $\tau(I)<\infty$，则称 τ 是有限的。由于 H 是可分的希尔伯特空间，M 是有限的当且仅当它有一个忠实的、正规的有限迹。关于 von Neumann 代数理论的更多知识，见文献[5]。

2.1. 可测算子

设 M 为具有有限迹 τ 的有限 von Neumann 代数。记 M 中所有自伴算子构成的集合为 M^{sa}。M^{sa} 是一个在偏序向量空间，此集合中的序 $x\ge0$ (相应地，$x>0$)的定义为对所有 $\xi\in H$，有 $\langle x\xi,\xi\rangle\ge0$ (相应地，$\langle x\xi,\xi\rangle>0$)。我们用 $U(M)$ 表示 M 中所有酉元的集合，M^+ 代表 M 的正部分，M^{++} 则代表 M 中正且可逆的部分。设 e 和 f 为 M 中的两个投影。若存在部分等距元 $u\in M$，使得 $e=u^*u$ 且 $f=uu^*$，则称 e 和 f 是等价的，记为 $e\sim f$。设 x 为一个闭稠定算子，若对于 M 的交换子中的任何酉算子 u 都有 $xu=ux$，

称 x 是附属于 M 的。设 x 是附属于 M 的闭稠定算子，若对任意 $\varepsilon>0$，都存在投影算子 $e\in M$，使得 $e(H)\subseteq D(x)$ 且 $\tau(e^{\perp})<\varepsilon$，则称 x 为 τ-可测算子，其中 $e^{\perp}=1-e$。记所有附属于 M 的可测算子构成的集合为 $L_0(M)$。$L_0(M)$ 对于强和与强积构成一个单位 $*$-代数，在本文中算子的和与积，均指强和与强积。由于 M 是有限 von Neumann 代数，所以附属于 M 的算子构成的集合等同于 $L_0(M)$。关于可测函数的更多信息见文献[5] [6]及其参考文献。

2.2. 广义奇异值函数

设 $x\in L_0(M)$，$t>0$，定义 x 的广义奇异值函数 $\mu_{\cdot}(x)$ 为

$$\mu_t(x)=\inf\left\{\|xe\|: e \text{ 是 } M \text{ 中的一个投影, 且 } \tau(e^{\perp})\le t\right\}.$$

为了书写方便，我们把函数 $t\to\mu_t(x)$ 简记为 $\mu_{\cdot}(x)$，广义奇异值函数 $t\to\mu_t(x)$ 是右连续的递减函数。设 $x,y\in M$，$0<p<\infty$。若对于所有的 $t>0$，有

$$\int_0^t \mu_s(x)^p\,\mathrm{d}s\le\int_0^t\mu_s(y)^p\,\mathrm{d}s,$$

我们则称 y p-次优化于 x，记作 $x\prec\prec_p y$。特别地，当 $p=1$ 时，记为 $x\prec\prec y$。对于 $0\le x,y\in M$，如果 $x\prec\prec y$ 且 $y\prec\prec x$，我们则称 $x\approx y$。更多关于 $\mu_t(x)$ 的基本性质，请参考文献[5] [6]。

为了方便读者，我们列出了 $\mu_t(x)$ 的下列性质，这些性质都可以在文献[5] [6]中找到。

性质 1. (见[6])设 $x,y\in L_0(M)$。

(i) $\mu_{\cdot}(|x|)=\mu_{\cdot}(x)=\mu_{\cdot}(x^*)$ 且对于 $\alpha\in\mathbb{C}$ 有 $\mu_{\cdot}(\alpha x)=|\alpha|\mu_{\cdot}(x)$。

(ii) 设 f 是 $[0,\infty)$ 上的有界连续增函数，且 $f(0)=0$，则有 $\mu_{\cdot}(f(x))=f(\mu_{\cdot}(x))$ 和 $\tau(f(x))=\int_0^{\tau(I)}f(\mu_t(x))\mathrm{d}t$ 成立。

(iii) 如果 $0\le x\le y$，那么 $\mu_{\cdot}(x)\le\mu_{\cdot}(y)$。

在下文中，我们将在整篇论文中保持所有先前的符号。除非另有说明，M 始终表示作用于可分希尔伯特空间 H 上的有限 von Neumann 代数，且具有一个正规的、忠实的有限迹 τ。

3. 主要结果

在这部分我们将给出本文的主要结论。为了证明第一个主要结果，我们需要下述引理，此引理可以在文献(命题 4.12，[7])中找到，因此我们省去了证明步骤。

引理 1. 设 h 为收缩算子，则有下列结论成立：

(i) 如果 $1<q\le 2$，则对于 $a\in M^{++}$ 和一个自伴算子 l，满足

$$l+h^*\log_q(a)h>-\frac{1}{q-1},$$

我们有等式

$$\begin{aligned}&\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)\\&=\max_{x>0}\left\{\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right)\right\}.\end{aligned}$$

(ii) 如果 $q>2$，则对于 $a\in M^{++}$ 和一个自伴算子 l，满足

$$l+h^*\log_q(a)h>-\frac{1}{q-1},$$

我们有等式

$$\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)$$
$$=\min_{x>0}\left\{\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right)\right\}.$$

(iii) 如果 $q<1$，则对于 $a\in M^{++}$ 和一个自伴算子 l，满足

$$l+h^*\log_q(a)h<-\frac{1}{q-1},$$

我们有等式

$$\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)$$
$$=\max_{x>0}\left\{\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right)\right\}.$$

定理 1. 设 h 为收缩算子，l 为自伴算子，对于 $x,a\in M^{++}$，则有下列结论成立：

(i) 对于 $1<q\le 2$，有

$$\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right)$$
$$=\max_{l>-h^*\log_q(a)h-(q-1)^{-1}}\left\{\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)\right\}.$$

(ii) 对于 $q>2$，有

$$\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right)$$
$$=\min_{l>-h^*\log_q(a)h-(q-1)^{-1}}\left\{\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)\right\}.$$

(iii) 对于 $q<1$，有

$$\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right)$$
$$=\max_{l<-h^*\log_q(a)h-(q-1)^{-1}}\left\{\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)\right\}.$$

证明：此定理的证明与(定理 3.1，[1])的证明相似。为了方便阅读，我们给出具体的证明。由(i)的假设和条件

$$l+h^*\log_q(a)h>-\frac{1}{q-1},$$

可以知道 $\exp_q\left(l+h^*\log_q(a)h\right)$ 是有意义的。记

$$G(l)=\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(\exp\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)$$

显然，$G(l)$ 是凹的。应用引理 1 中的(i)可知

$$G(l)\le\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right).$$

将 $l_0=\log_q x-h^*\log_q(a)h$ 代入上式可得

$$G(l_0)=\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right).$$

因此，$G(l)$ 在 l_0 处取得最大值。由此

$$\max_{l>-h^*\log_q(a)h-(q-1)^{-1}} G(l)=\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right),$$

这就证明了(i)，(ii)的情形可以用相似的方法证明。在(iii)的假设和以下条件

$$l+h^*\log_q(a)h<-\frac{1}{q-1},$$

下，我们记

$$G(l)=\tau(x)+\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(\exp\left(l+h^*\log_q(a)h\right)\right)$$

显然，$G(l)$ 是凹的。由引理 1 中的(iii)可知

$$G(l)\le\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right).$$

将 $l_0=\log_q x-h^*\log_q(a)h$ 代入到上式可得

$$G(l_0)=\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right).$$

因此，$G(l)$ 在 l_0 处取得最大值。故

$$\max_{l<-h^*\log_q(a)h-(q-1)^{-1}} G(l)=\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q(a)h\right)\right),$$

这就证明了(iii)。

引理 2. 设 $x\in M^{++}$，令 $g(x)=\left(\tau\left(x^p\right)\right)^{1/r}$，则有下列结论成立：

(i) 若 $r\le p<0$，则 g 为凹函数；

(ii) 若 $p<0$ 且 $r>0$，则 g 为凸函数；

(iii) 若 $0<p\le1$ 且 $r\ge p$，则 g 为凹函数；

(iv) 若 $p\ge1$ 且 $0<r\le p$，则 g 为凸函数；

(v) 若 $0<p\le1$ 且 $r<0$，则 g 为凸函数。

证明：应用文献[8]中的定理 2 和定理 4 可知当 p 满足 $p\le0$ 或 $p\ge1$ 时，$x\to\tau\left(x^p\right)$ 是凸函数；而当 p 满足 $0\le p\le1$ 时，$x\to\tau\left(x^p\right)$ 是凹函数。同时，我们注意到(命题 1，[4])在引理的条件下仍然成立。因此，应用(命题 2，[4])的证明方法可知此引理成立。

命题 1. 对自伴算子 $x\in M$，考虑函数

$$g(x)=\log_r\tau\left(\exp_q(x)\right)$$

当 $q>1$ 时定义在自伴算子 $x>-(q-1)^{-1}$ 上；当 $q<1$ 时定义在自伴算子 $x<-(q-1)^{-1}$ 上，则有下列结论成立：

(i) 若 $-\infty<q<1$ 且 $r\ge q$，则 g 为凸函数；

(ii) 若 $1<q\le2$ 且 $r\ge q$，则 g 为凸函数；

(iii) 若 $q\ge2$ 且 $r\le q$，则 g 为凹函数。

证明：应用上述引理 2 的结论，结合(定理 4，[4])的证明过程可知本命题成立。

我们注意到文献(定理 2.2，[9])在 von Neumann 代数的情形下依然成立。于是，仿照(定理 7，[4])的证明过程能够得到如下引理。

引理 3. 设 a 和 b 是自伴算子，下面结论成立：

(i) 如果 $q<1$，且 a 和 $a+b$ 都有上界 $-(q-1)^{-1}$，那么：

$$\log_q \tau\left(\exp_q(a+b)\right)-\log_q \tau\left(\exp_q a\right)\geq\left(\tau\left(\exp_q a\right)\right)^{q-2}\tau\left(\left(\exp_q a\right)^{2-q}b\right).$$

(ii) 如果$1<q\leq 2$，且a和$a+b$都有下界$-(q-1)^{-1}$，那么：

$$\log_q \tau\left(\exp_q(a+b)\right)-\log_q \tau\left(\exp_q a\right)\geq\left(\tau\left(\exp_q a\right)\right)^{q-2}\tau\left(\left(\exp_q a\right)^{2-q}b\right).$$

(iii) 如果$q\geq 2$，且a和$a+b$都有下界$-(q-1)^{-1}$，那么：

$$\log_q \tau\left(\exp_q(a+b)\right)-\log_q \tau\left(\exp_q a\right)\leq\left(\tau\left(\exp_q a\right)\right)^{q-2}\tau\left(\left(\exp_q a\right)^{2-q}b\right).$$

基于上述引理，我们即可对本文的第二个主要结论展开证明。

定理 2. 广义对数和指数形式的迹函数有如下刻画成立。

(i) 如果$q<1$，那么对于$l<-(q-1)^{-1}$，

$$\log_q \tau\left(\exp_q l\right)=\max_{x>0,\tau(x)=1}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)\right\},$$

且对于$x>0$，$\tau(x)=1$，

$$\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)=\max_{l<-(q-1)^{-1}}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\log_q \tau\left(\exp_q l\right)\right\}.$$

(ii) 如果$1<q\leq 2$，那么对于$l>-(q-1)^{-1}$，

$$\log_q \tau\left(\exp_q l\right)=\max_{x>0,\tau(x)=1}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)\right\},$$

且对于$x>0$，$\tau(x)=1$，

$$\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)=\max_{l>-(q-1)^{-1}}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\log_q \tau\left(\exp_q l\right)\right\}.$$

(iii) 如果$q>2$，那么对于$l>-(q-1)^{-1}$，

$$\log_q \tau\left(\exp_q l\right)=\min_{x>0,\tau(x)=1}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)\right\},$$

且对于$x>0$，$\tau(x)=1$，

$$\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)=\min_{l>-(q-1)^{-1}}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\log_q \tau\left(\exp_q l\right)\right\}.$$

证明：只需证明$1<q\leq 2$的情形即可，对于$q<1$和$q>2$的情形则可以用相似的方法得到。令$x>0$且$\tau(x)=1$，记$a=\log_q x$，则$\tau\left(\exp_q a\right)=1$。应用引理 3 中的(ii)可知

$$\tau\left(x^{2-q}b\right)\leq\log_q \tau\left(\exp_q\left(\log_q x+b\right)\right)$$

其中b满足不等式$\log_q x+b>-(q-1)^{-1}$。进而，用$l-\log_q x$代替b可得

$$\tau\left(x^{2-q}l\right)\leq\log_q \tau\left(\exp_q l\right)+\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)\tag{3.1}$$

即，上述不等式对$x>0$，$\tau(x)=1$且$l>-(q-1)^{-1}$成立。简单的计算可知，对暂时固定的x，若取$l=\log_q x$，则不等式(3.1)中的等号成立。因此，

$$\tau\left(x^{2-q}\log_q x\right)=\max_{l>-(q-1)^{-1}}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\log_q \tau\left(\exp_q l\right)\right\}.$$

接下来，我来证明(i)中的另一个不等式。通过基本运算，对于$q\in\mathbb{R}$我们可以得到等式

$$\log_q \frac{y}{x} = \log_q y + y^{q-1} \log_q \frac{1}{x}$$

和

$$\log_q \frac{1}{x} = -x^{1-q} \log_q x.$$

因此，

$$\begin{aligned}\log_q \frac{\exp_q l}{\tau(\exp_q l)} &= \log_q \exp_q l + (\exp_q l)^{q-1} \log_q \frac{1}{\tau(\exp_q l)} \\ &= l - (\exp_q l)^{q-1} (\tau(\exp_q l))^{1-q} \log_q \tau(\exp_q l).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\log_q \tau(\exp_q l) + \tau\left[\left(\frac{\exp_q l}{\tau(\exp_q l)}\right)^{2-q} \log_q \left(\frac{\exp_q l}{\tau(\exp_q l)}\right)\right] \\ &= \log_q \tau(\exp_q l) + \frac{\tau\left((\exp_q l)^{2-q} l\right)}{(\tau(\exp_q l))^{2-q}} - \frac{\tau(\exp_q l)(\tau(\exp_q l))^{1-q} \log_q \tau(\exp_q l)}{(\tau(\exp_q l))^{2-q}} \\ &= \tau\left(\left(\frac{\exp_q l}{\tau(\exp_q l)}\right)^{2-q} l\right).\end{aligned}$$

因此，若暂时固定 l，取 $x = (\tau(\exp_q l))^{-1} \exp_q l$，则不等式(3.1)中的等式成立。故对 $l > -(q-1)^{-1}$

$$\log_q \tau(\exp_q l) = \max_{x>0,\tau(x)=1} \left\{\tau(x^{2-q} l) - \tau(x^{2-q} \log_q x)\right\}$$

因此，(i)中的两个结论都成立。

在定理 2 中我们用 $l + h^* \log_q(y) h$ 代替 l，可以得到下面的推论：

推论 3. 设 $h^* h \le \mathrm{I}$，对于任意的 $y \in M^{++}$，下面结论成立：

(i) 如果 $q < 1$，那么对于 $l \le 0$，我们有等式：

$$\begin{aligned}&\log_q \tau\left(\exp_q\left(l + h^* \log_q(y) h\right)\right) \\ &= \max_{x>0,\tau(x)=1} \left\{\tau(x^{2-q} l) - \tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x - h^* \log_q(y) h\right)\right)\right\},\end{aligned}$$

并且对于 $x > 0$，$\tau(x) = 1$，

$$\begin{aligned}&\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x - h^* \log_q(y) h\right)\right) \\ &= \max_{l \le 0} \left\{\tau(x^{2-q} l) - \log_q \tau\left(\exp_q\left(l + h^* \log_q(y) h\right)\right)\right\}.\end{aligned}$$

(ii) 如果 $1 < q \le 2$，那么对于 $l \ge 0$，我们有等式：

$$\begin{aligned}&\log_q \tau\left(\exp_q\left(l + h^* \log_q(y) h\right)\right) \\ &= \max_{x>0,\tau(x)=1} \left\{\tau(x^{2-q} l) - \tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x - h^* \log_q(y) h\right)\right)\right\},\end{aligned}$$

并且对于 $x > 0$，$\tau(x) = 1$，

$$\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q\left(y\right)h\right)\right)$$
$$=\max_{l\geq 0}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\log_q\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q\left(y\right)h\right)\right)\right\}.$$

(iii) 如果 $q>2$，那么对于 $l\geq 0$，我们有等式：

$$\log_q\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q\left(y\right)h\right)\right)$$
$$=\min_{x>0,\tau(x)=1}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q\left(y\right)h\right)\right)\right\},$$

并且对于 $x>0$，$\tau\left(x\right)=1$，

$$\tau\left(x^{2-q}\left(\log_q x-h^*\log_q\left(y\right)h\right)\right)$$
$$=\min_{l\geq 0}\left\{\tau\left(x^{2-q}l\right)-\log_q\tau\left(\exp_q\left(l+h^*\log_q\left(y\right)h\right)\right)\right\}.$$

参考文献

[1] Shi, G. and Hansen, F. (2020) Variational Representations Related to Tsallis Relative Entropy. *Letters in Mathematical Physics*, **110**, 2203-2220. https://doi.org/10.1007/s11005-020-01289-7

[2] Lieb, E.H. and Ruskai, M.B. (1973) Proof of the Strong Subadditivity of Quantum-Mechanical Entropy. *Journal of Mathematical Physics*, **14**, 1938-1941. https://doi.org/10.1063/1.1666274

[3] Lieb, E.H. (1973) Convex Trace Functions and the Wigner-Yanase-Dyson Conjecture. *Advances in Mathematics*, **11**, 267-288. https://doi.org/10.1016/0001-8708(73)90011-x

[4] Hansen, F., Liang, J. and Shi, G. (2017) Peierls-Bogolyubov's Inequality for Deformed Exponentials. *Entropy*, **19**, Article 271. https://doi.org/10.3390/e19060271

[5] Pisier, G. and Xu, Q. (2003) Noncommutative L^p-Spaces. In: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, North-Holland, 1459-1517.

[6] Fack, T. and Kosaki, H. (1986) Generalized S-Numbers of τ-Measure Operators. *Pacific Journal of Mathematics*, **123**, 269-300.

[7] Ma, N., Zhao X. and Zhang, Y. (2024) On Some Properties for a Class of Deformed Trace Functions on Finite Von Neumann Algebras, Manuscript.

[8] Petz, D. (1985) Spectral Scale of Self-Adjoint Operators and Trace Inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **109**, 74-82. https://doi.org/10.1016/0022-247x(85)90176-3

[9] Hansen, F. and Pedersen, G.K. (1995) Perturbation Formulas for Traces on C-Algebras. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **31**, 169-178. https://doi.org/10.2977/prims/1195164797