Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 44-50
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144138

关于von Neumann代数中几类投影运算的研究

龚禹豪

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2025年3月1日；录用日期：2025年3月25日；发布日期：2025年4月2日

摘 要

本文研究了在von Neumann代数框架下，投影运算后等价的保持情形，特别是在不同类型的von Neumann代数中投影等价的刻画及其性质。设 E 、 F 、 N 为von Neumann代数 $\mathcal{M}$ 中的三个有限投影，且 $E \sim F$ 。当 $NE = NF = 0$ 时，那么有 $N+E \sim N+F$ ， $N \wedge E \sim N \wedge F$ ， $N \vee E \sim N \vee F$ 成立。当 $N < E, N < F$ 时，那么有 $N \wedge E \sim N \wedge F$ ， $N \vee E \sim N \vee F$ 成立。当 $E < N, F < N$ 时，那么有 $N-E \sim N-F$ ， $N \wedge E \sim N \wedge F$ ， $N \vee E \sim N \vee F$ 成立。本文进一步推至 N 为von Neumann代数 $\mathcal{M}$ 中的无限投影，并且考虑了von Neumann代数 $\mathcal{M}$ 中四个投影运算的情况。

关键词

部分等距，等价投影，von Neumann代数，比较定理

Studies of Several Projection Operators in von Neumann Algebras

Yuhao Gong

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Mar. 1st, 2025; accepted: Mar. 25th, 2025; published: Apr. 2nd, 2025

Abstract

This paper studies the conditions of equivalents after projection operations under the framework of von Neumann algebra, especially the characterization and properties of projection equivalents in different types of von Neumann algebras. Let E, F, N be three finite projections in von Neumann algebra $\mathcal{M}$, and $E \sim F$. If $NE = NF = 0$, then it follows that $N+E \sim N+F$, $N \wedge E \sim N \wedge F$, $N \vee E \sim N \vee F$ holds. If $N < E$, $N < F$, then it follows that $N \wedge E \sim N \wedge F$, $N \vee E \sim N \vee F$ holds. If $E < N$, $F < N$, then it follows that $N-E \sim N-F$, $N \wedge E \sim N \wedge F$, $N \vee E \sim N \vee F$ holds. This paper further extends these results to infinite projections N in von Neumann algebras $\mathcal{M}$ and

文章引用: 龚禹豪. 关于 von Neumann 代数中几类投影运算的研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 44-50.
DOI: 10.12677/aam.2025.144138

considers the case of four projection operations within von Neumann algebras $\mathcal{M}$.

Keywords

Partial Isometric, Equivalent Projection, von Neumann Algebra, Comparison Theorem

1. 引言及主要结论

在算子代数的研究中，尤其是在 von Neumann 代数的框架下，等价投影理论具有重要地位。2004 年，林丽琼与林鸿钊讨论了投影算子的等价关系[1]；2009 年，邓春源与王顺钦研究了等价空间中的投影算子[2]；2016 年，费秀海与张建华进一步探讨了在 von Neumann 代数框架下，保持投影的映射问题[3]。2022 年，宋显花与加羊杰考虑了斜投影乘积交换性的等价条件[4]。在此基础上，本文主要受 Richard V. Kadison 的文章[5]与[6]的启发，研究了 von Neumann 代数中投影运算后的等价情形。

下面是本文研究得出的主要结论。

引理 1.1 (本文引理 3.1) 若 E、F、N 都是有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影，且 $E\sim F$，$E\le N$，$F\le N$，那么有 $N-E\sim N-F$ 成立。

定理 1.2 (本文定理 3.2) 设 E、F、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的三个有限投影，且 $E\sim F$。当 $NE=NF=0$ 时，那么有 $N\wedge E\sim N\wedge F$，$N+E\sim N+F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

定理 1.3 (本文定理 3.3) 设 E、F、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的三个有限投影，且 $E\sim F$。当 $N<E,N<F$ 时，那么有 $N\wedge E\sim N\wedge F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

定理 1.4 (本文定理 3.4) 设 E、F、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的三个有限投影，且 $E\sim F$。当 $E<N,F<N$ 时，那么有 $N-E\sim N-F$，$N\wedge E\sim N\wedge F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

定理 1.5 (本文定理 3.5) 设 E、F 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的两个有限投影，N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的无限投影，$E\sim F$。当 $NE=NF=0$ 时，那么有 $N\wedge E\sim N\wedge F$，$N+E\sim N+F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

定理 1.6 (本文定理 3.6) 设 E、F 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的两个有限投影，N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的无限投影，$E\sim F$。当 $E<N,F<N$ 时，那么有 $N-E\sim N-F$，$N\wedge E\sim N\wedge F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

定理 1.7 (本文定理 3.7) 设 E、F、G、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影，其中 E、F 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，这里 $G\le E$，$N\le F$，$G\sim N$，且 $E\precsim F$。那么有

i) $E-G\precsim F-N$。

ii) 若 $E\sim F$，有 $E-G\sim F-N$。

2. 预备知识

定义 2.1 [6] von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影 E，当 $E\sim E_0<E$ 时，这里的投影 E_0 在 $\mathcal{M}$ 中，我们称投影 E 相对于 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 是无限的。否则，投影 E 相对于 $\mathcal{M}$ 是有限的。如果 E 是无限的，对每个中心投影 P，我们有 PE 要么是 0 或者真无限，则称 E 是真无限的。当 I 是有限或者真无限的，我们说

相应的 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 分别是有限或者真无限的。

命题 2.2 [6] 如果 $\{E_a\}$ 与 $\{F_a\}$ 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中投影的正交族，且对任意 a，有 $E_a \precsim F_a$，那么 $\sum E_a \precsim \sum F_a$。如果 $E_a \sim F_a$，对任意 a，那么 $\sum E_a \sim \sum F_a$。

命题 2.3 [7] 如果 E、F 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影，且 $E \sim F$，那么对 $\mathcal{M}$ 中的每个中心投影 P，有 $PE \sim PF$。如果 $E \precsim F$，那么有 $PE \precsim PF$。

命题 2.4 [6] 如果 E、F 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影，使得 $E \precsim F$ 且 $F \precsim E$，那么有 $E \sim F$。

命题 2.5 [6] 如果 E 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，那么 E 的每个子投影也是有限投影。在 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的每个极小投影和 0 也是有限的。如果 $E \sim F$ 且投影 E 是有限的，那么投影 F 也是有限的。

定理 2.6 [6] 如果 E、F 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，那么 $E \vee F$ 在 $\mathcal{M}$ 中也是有限投影。

命题 2.7 [5] 如果 E、F 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的交换投影，分别相对于闭子空间 Y 和 Z，则

$$E \vee F = E + F - EF, \quad E \wedge F = EF, \quad Y \vee Z = Y + Z.$$

特别地，H 的线性子空间 $Y + Z$ 是封闭的。

定理 2.8 [6] (comparison)如果 E、F 是 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影，存在唯一的极大正交中心投影 P 和 Q，具有 $QE \sim QF$ 的性质。如果 P_0 是 P 的非零中心子投影，那么 $P_0E \prec P_0F$。如果 R_0 是 $I - P - Q$ 的非零中心子投影，那么 $R_0F \prec R_0E$。

推论 2.9 [5] 假设 E、F 分别是从希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 作用到闭子空间 Y 与 Z 的投影。那么 $EF = 0$ 当且仅当 Y 与 Z 正交，且

$$E \vee F = E + F, \quad Y \vee Z = Y + Z.$$

注：为了更易理解文章内容，这里进行本文中的符号说明。

主要符号表

符号	代表意义
$\mathcal{M}$	von Neumann 代数
$\sim$	等价
$\leq$	小于或等于
$\perp$	正交
$\prec$	弱于
$<$	小于
$\wedge$	交集
$\vee$	并集
$\precsim$	弱于或等价

3. 定理的证明

为了证明下面本章的定理，我们需要证明下面的引理。

引理 3.1 设 E、F、N 都是有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影。如果 $E \sim F$，$E \leq N$，$F \leq N$，那么有 $N - E \sim N - F$ 成立。

证明 用反证法。我们首先证明 $N - E$ 与 $N - F$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影。

$$\left(N-E\right)^{*}=N^{*}-E^{*}=N-E\text{ ,}$$

$$\begin{aligned}\left(N-E\right)^{2}&=\left(N-E\right)\left(N-E\right)=N^{2}-NE-EN+E^{2}\\&=N-E-E+E=N-E.\end{aligned}$$

$N-E=\left(N-E\right)^{*}=\left(N-E\right)^{2}$。故 $N-E$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影。

$$\left(N-F\right)^{*}=N^{*}-F^{*}=N-F\text{ ,}$$

$$\begin{aligned}\left(N-F\right)^{2}&=\left(N-F\right)\left(N-F\right)=N^{2}-NF-FN+F^{2}\\&=N-F-F+F=N-F.\end{aligned}$$

$N-F=\left(N-F\right)^{*}=\left(N-F\right)^{2}$。故 $N-F$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影。

由于，$\mathcal{M}$ 为有限 von Neumann 代数，$N-E$ 与 $N-F$ 都为有限投影。

现假设 $N-E\nsim N-F$，由定理 2.8 可知，存在 $\mathcal{M}$ 的中心投影 P，使得 $P\left(N-E\right)\prec P\left(N-F\right)$ 或 $P\left(N-F\right)\prec P\left(N-E\right)$ 成立。

针对上述两种情况的讨论如下：

(1) 当 $P\left(N-E\right)\prec P\left(N-F\right)$ 时，那么存在 $G\in\mathcal{M}$，使得 $P\left(N-E\right)\sim G<P\left(N-F\right)$ 成立。因为 $E\sim F$，故由命题 2.3 可知，有 $PE\sim PF$。由于 $G<P\left(N-F\right)\leq N-F$ 而 $\left(N-F\right)\perp F$。故 $G\perp F$，此外 $\left(N-E\right)\perp E$。

因此，由命题 2.2 可知

$$PN=P\left(N-E\right)+PE\sim G+PF<P\left(N-F\right)+PF=PN\text{ 。}$$

这也就说明 PN 不是有限投影，这与 $\mathcal{M}$ 为有限 von Neumann 代数矛盾。

(2) 当 $P\left(N-F\right)\prec P\left(N-E\right)$ 时，那么存在 $Q\in\mathcal{M}$，使得 $P\left(N-F\right)\sim Q<P\left(N-E\right)$ 成立。因为 $E\sim F$，故由命题 2.3 可知，有 $PE\sim PF$。由于 $Q<P\left(N-E\right)\leq N-E$ 而 $\left(N-E\right)\perp E$。故 $Q\perp E$，此外 $\left(N-F\right)\perp F$。

因此，由命题 2.2 可知

$$PN=P\left(N-F\right)+PF\sim Q+PE<P\left(N-E\right)+PE=PN\text{ 。}$$

这也就说明 PN 不是有限投影，这与 $\mathcal{M}$ 为有限 von Neumann 代数矛盾。

因此有 $N-E\sim N-F$。

证毕。

定理 3.2 设 E、F、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的三个有限投影，且 $E\sim F$。当 $NE=NF=0$ 时，那么有 $N\wedge E\sim N\wedge F$，$N+E\sim N+F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

证明 i) $N\wedge E\sim N\wedge F$。

因为 $NE=NF=0$，由命题 2.7 可知

$$N\wedge E=NE=0\text{，}\quad N\wedge F=NF=0\text{ 。}$$

故 $N\wedge E\sim N\wedge F$。

ii) $N+E\sim N+F$，$N\vee E\sim N\vee F$。

由推论 2.9 可知

$$N\vee E=N+E\text{，}\quad N\vee F=N+F\text{ 。}$$

而再由命题 2.2 可知

$$N\vee E=N+E\sim N+F=N\vee F\text{ 成立。}$$

证毕。

定理 3.3 设E、F、N为 von Neumann 代数$\mathcal{M}$中的三个有限投影，且$E \sim F$。当$N < E, N < F$时，那么有$N \wedge E \sim N \wedge F$，$N \vee E \sim N \vee F$成立。

证明 i) $N \wedge E \sim N \wedge F$。

由于$N < E, N < F$，那么有$N \wedge E = N$，$N \wedge F = N$。即$N \wedge E \sim N \wedge F$显然成立。

ii) $N \vee E \sim N \vee F$。

由命题 2.7 可知

$$N \vee E = N + E - NE,$$

同理，我们有

$$N \vee F = N + F - NF。$$

又因为$NE = NF = N$，故$N \vee E = E$，$N \vee F = F$，$N \vee E = E \sim F = N \vee F$，显然有$N \vee E \sim N \vee F$。

证毕。

定理 3.4 设E、F、N为 von Neumann 代数$\mathcal{M}$中的三个有限投影，且$E \sim F$。当$E < N, F < N$时，那么有$N - E \sim N - F$，$N \wedge E \sim N \wedge F$，$N \vee E \sim N \vee F$成立。

证明 i) $N - E \sim N - F$。

因为E、F、N为 von Neumann 代数$\mathcal{M}$中的有限投影，由定理 2.6 可知，$E \vee F$也为有限投影。由引理 3.1 知，E、F在有限 von Neumann 代数$(E \vee F)\mathcal{M}(E \vee F)$中，那么有$E \vee F - E \sim E \vee F - F$成立。

因为$E < N, F < N$，故$E \vee F \le N$。此外，我们有$N - E \vee F$与$E \vee F$正交，而$E \le E \vee F$，$F \le E \vee F$，故$E \vee F - E \le E \vee F$，$E \vee F - F \le E \vee F$。

从而有$(N - E \vee F) \perp (E \vee F - E)$与$(N - E \vee F) \perp (E \vee F - F)$成立。

因此，由命题 2.2 知

$$N - E = (N - E \vee F) + (E \vee F) - E \sim (N - E \vee F) + (E \vee F) - F = N - F。$$

ii) $N \wedge E \sim N \wedge F$。

因为$N > E, N > F$，由命题 2.7 可知，$N \wedge E = E$，$N \wedge F = F$。由于$E \sim F$，那么有

$$N \wedge E = E \sim F = N \wedge F。$$

iii) $N \vee E \sim N \vee F$。

由命题 2.7 可知

$$N \vee E = N + E - NE,$$

同理，我们有

$$N \vee F = N + F - NF。$$

又因为$N \wedge E = E$，$N \wedge F = F$。故$N \vee E = N$，$N \vee F = N$，显然有$N \vee E \sim N \vee F$。

证毕。

定理 3.5 设E、F为 von Neumann 代数$\mathcal{M}$中的两个有限投影，N为 von Neumann 代数$\mathcal{M}$中的无限投影，$E \sim F$。当$NE = NF = 0$时，那么有$N \wedge E \sim N \wedge F$，$N + E \sim N + F$，$N \vee E \sim N \vee F$成立。

证明 i) $N \wedge E \sim N \wedge F$。

因为$NE = NF = 0$，由命题 2.7 可知

$$N \wedge E = NE = 0，\quad N \wedge F = NF = 0。$$

故$N \wedge E \sim N \wedge F$。

ii) $N+E\sim N+F$，$N\vee E\sim N\vee F$。

由推论 2.9 可知，

$$N\vee E=N+E，\ N\vee F=N+F。$$

而再由命题 2.2 可知，

$$N\vee E=N+E\sim N+F=N\vee F\text{ 成立。}$$

证毕。

定理 3.6 设 E、F 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的两个有限投影，N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的无限投影，$E\sim F$。当 $E<N,F<N$ 时，那么有 $N-E\sim N-F$，$N\wedge E\sim N\wedge F$，$N\vee E\sim N\vee F$ 成立。

证明 i) $N-E\sim N-F$。

因为 E、F、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，由定理 2.6 可知，$E\vee F$ 也为有限投影。由引理 3.1 知，E、F 在有限 von Neumann 代数 $(E\vee F)\mathcal{M}(E\vee F)$ 中，那么有 $E\vee F-E\sim E\vee F-F$ 成立。

因为 $E<N,F<N$，故 $E\vee F\le N$。此外，我们有 $N-E\vee F$ 与 $E\vee F$ 正交，而 $E\le E\vee F$，$F\le E\vee F$，故 $E\vee F-E\le E\vee F$，$E\vee F-F\le E\vee F$。

从而有 $(N-E\vee F)\perp(E\vee F-E)$ 与 $(N-E\vee F)\perp(E\vee F-F)$ 成立。

因此，由命题 2.2 知

$$N-E=(N-E\vee F)+(E\vee F)-E\sim(N-E\vee F)+(E\vee F)-F=N-F。$$

ii) $N\wedge E\sim N\wedge F$。

因为 $N>E,N>F$，由命题 2.7 可知，$N\wedge E=E$，$N\wedge F=F$。由于 $E\sim F$，那么有

$$N\wedge E=E\sim F=N\wedge F。$$

iii) $N\vee E\sim N\vee F$。

由命题 2.7 可知

$$N\vee E=N+E-NE，$$

同理，我们有

$$N\vee F=N+F-NF。$$

又因为 $N\wedge E=E$，$N\wedge F=F$。故 $N\vee E=N$，$N\vee F=N$，显然有 $N\vee E\sim N\vee F$。

证毕。

定理 3.7 设 E、F、G、N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的投影，其中 E、F 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，这里 $G\le E$，$N\le F$，$G\sim N$，且 $E\precsim F$。那么有

i) $E-G\precsim F-N$。

ii) 若 $E\sim F$，有 $E-G\sim F-N$。

证明 i) 用反证法。我们首先证明 $E-G$ 与 $F-N$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影。

$$(E-G)^*=E^*-G^*=E-G，$$

$$\begin{aligned}(E-G)^2&=(E-G)(E-G)=E^2-EG-GE+G^2\\&=E-G-G+G=E-G.\end{aligned}$$

$E-G=(E-G)^*=(E-G)^2$。故 $E-G$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影。

$$(F-N)^*=F^*-N^*=F-N，$$

$$
\begin{aligned}
(F-N)^2 &= (F-N)(F-N) = F^2 - FN - NF + N^2 \\
&= F - N - N + N = F - N.
\end{aligned}
$$

$F-N=(F-N)^*=(F-N)^2$。故 $F-N$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影。

因为 E、F 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，$E-G\le E$，$F-N\le F$，由命题 2.5 可知 $E-G$ 与 $F-N$ 都为有限投影。由定理 2.6 可知，$E\vee F$ 在 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中也为有限投影。由引理 3.1 可知，$E-G$ 与 $F-N$ 在有限 von Neumann 代数 $(E\vee F)\mathcal{M}(E\vee F)$ 中。

假设 $E-G\precsim F-N$，由定理 2.8 可知，在有限 von Neumann 代数 $(E\vee F)\mathcal{M}(E\vee F)$ 中存在非零中心投影 P，使得 $P(F-N)\prec P(E-G)$ 成立。

当 $P(F-N)\prec P(E-G)$ 时，那么存在 $G_1\in\mathcal{M}$，使得 $P(F-N)\sim G_1<P(E-G)$ 成立，因为 $G\sim N$，且 $E\precsim F$，由命题 2.3 可知 $PG\sim PN$，$PE\precsim PF$。由于 $G_1<P(E-G)\le E-G$，$PG\le G$ 而 $E-G\perp G$，故 $G_1\perp PG$。

因此，根据命题 2.2 可知

$$
PE\precsim PF=P(F-N)+PN\sim G_1+PG<P(E-G)+PG=PE。
$$

这也就说明 PE 不是有限投影，这与 $(E\vee F)\mathcal{M}(E\vee F)$ 为有限 von Neumann 代数矛盾。

因此 $E-G\precsim F-N$。

ii) 如果 $E\sim F$，那么有 $E\precsim F$ 与 $F\precsim E$。由i)中的 $E-G\precsim F-N$ 与 $F-N\precsim E-G$，由命题 2.4 可知 $E-G\sim F-N$。

证毕。

本文首先考虑在有限 von Neumann 代数中投影的运算，通过引理 3.1 的证明，我们将上述的几类投影的运算推广到更一般的 von Neumann 代数中，如上述定理的 3.2~3.4 的情况。其次进一步考虑了 N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的无限投影情形，通过证明发现其结果与上述 N 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中的有限投影一致。最后讨论了一般的 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中四个投影运算的情况。

致　谢

本文章在文仕林老师以及审稿专家的指导与建议下完成，在此表示衷心的感谢。

参考文献

[1] 林丽琼，林鸿钊. 关于投影算子的等价关系[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2004(2): 21-26.

[2] 邓春源，王顺钦. 等价类空间上投影算子的一些性质[J]. 南阳师范学院学报, 2009, 8(3): 1-4.

[3] 费秀海，张建华. von Neumann 代数上保持投影的映射[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2016, 39(4): 5-13.

[4] 宋显花，加羊杰. 斜投影乘积交换性的一些等价刻画[J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(4): 811-816.

[5] Kadison, R.V. and Ringrose, J. (1986) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. I: Elementary Theory. Academic Press, Inc.

[6] Kadison, R.V. and Ringrose, J. (1986) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. II: Advanced Theory. Academic Press, Inc.

[7] 李炳仁. 算子代数[M]. 北京：科学出版社, 2007.