Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 579-583
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144188

完全保混合Lie零积的映射

毛　欢，安润玲*，丁　杰

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2025年3月18日；录用日期：2025年4月11日；发布日期：2025年4月21日

摘　要

本文刻画*代数上完全保混合Lie零积的非线性映射，利用该结论得到不含交换中心投影的von Neumann代数上*-同构的等价刻画。

关键词

von Neumann代数，完全保持映射，Lie积，Skew-Lie积，混合Lie零积

Maps Completely Preserving Mixed Lie Zero Product

Huan Mao, Runling An*, Jie Ding

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Mar. 18th, 2025; accepted: Apr. 11th, 2025; published: Apr. 21st, 2025

Abstract

In this paper, we characterize nonlinear maps on *-algebras completely preserving mixed Lie zero products. As its application, equivalent characterization of *-isomorphism on von Neumann algebra with no abelian center projections is obtained.

Keywords

von Neumann Algebras, Completely Preserving Maps, Lie Product, Skew-Lie Product, Mixed Lie Zero Product

*通讯作者。

文章引用: 毛欢, 安润玲, 丁杰. 完全保混合 Lie 零积的映射[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 579-583.
DOI: 10.12677/aam.2025.144188

1. 引言

设 $\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$ 是两个 $*$-代数， $A,B\in\mathcal{A}$，记 $A\circ B=AB+BA$ 为 A，B 的 Jordan 乘积，$[A,B]=AB-BA$ 为 A，B 的 Lie 乘积，$[A,B]_*=AB-BA^*$ 为 A，B 的 skew-Lie 乘积。Lie 乘积、Jordan 乘积和 skew-Lie 乘积在算子代数的同构、导子、交换映射和代数理想等研究领域有着重要作用，受到许多学者的广泛关注，其中(完全)保零积、Jordan 零积、Lie 零积、skew-Lie 零积的映射是热门研究领域之一(见文献[1]-[7])。设映射 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$。称 Φ 保零积，若 $\Phi(A)\Phi(B)=0$， $\forall A,B\in\mathcal{A}$， $AB=0$。称 Φ 保 Jordan 零积，若 $\Phi(A)\circ\Phi(B)=0$，$\forall A,B\in\mathcal{A}$，$A\circ B=0$。称 Φ 保 Lie 零积，若 $[\Phi(A),\Phi(B)]=0$，$\forall A,B\in\mathcal{A}$，$[A,B]=0$。称 Φ 保 skew-Lie 零积，若 $[\Phi(A),\Phi(B)]_*=0$， $\forall A,B\in\mathcal{A}$， $[A,B]_*=0$。称 Φ 保混合 Lie 零积，若 $\left[[\Phi(A),\Phi(B)]_*,\Phi(C)\right]=0$， $\forall A,B,C\in\mathcal{A}$， $\left[[A,B]_*,C\right]=0$。对正整数 n，定义映射 $\Phi_n:\mathcal{A}\otimes M_n(F)\to\mathcal{B}\otimes M_n(F)$，$\Phi_n\left(\left(S_{ij}\right)_{n\times n}\right)=\left(\Phi\left(S_{ij}\right)\right)_{n\times n}$。若 Φ_n 保零积(Jordan 零积、Lie 零积、skew-Lie 零积、混合 Lie 零积)，则称 Φ 是 n-保零积(Jordan 零积、Lie 零积、skew-Lie 零积、混合 Lie 零积)的。若对每个正整数 n， Φ_n 保零积(Jordan 零积、Lie 零积、skew-Lie 零积、混合 Lie 零积)，则称 Φ 完全保零积(Jordan 零积、Lie 零积、skew-Lie 零积、混合 Lie 零积)。在文献[1]中 Bai 和 Hou 刻画了 $\mathcal{B}(X)$ 上双边保零积、Jordan 零积的可加映射。文献[2]中 Qi 和 Hou 刻画 $\mathcal{B}(H)$ 上保 skew-Lie 零积的可加满射。文献[3]-[5]中作者研究半单代数、上三角矩阵代数上保零积的线性映射，以及严格上三角矩阵上保零积的非线性映射。Huang 在文献[6]刻画标准算子代数上完全保 Jordan 零积和 Lie 零积的非线性满射。Fu 在文献中[7]刻画了 von Neumann 代数上完全保持 skew-Lie 零积非线性满射。受文献[1]-[7]的研讨启发，本文研究 $*$-代数上完全保混合 Lie 零积的非线性映射。并利用该结论得到不含交换中心投影的 von Neumann 代数上 $*$-同构的等价刻画。注意到尽管混合 Lie 零积与 skew-Lie 零积和 Lie 零积相关，但本文的结果不能由文献[6] [7]的结论得到。事实上，刻画完全保持混合了 Lie 零积的关键是找到足够多的 $A,B,C\in\mathcal{A}$ 使得 $[A,B]_*\neq 0$，但 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$，这是本文的难点和创新点。

本文 H 表示复 Hilbert 空间， $\mathcal{B}(H)$ 是 H 到 H 的全体有界线性算子。von Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 满足 $\mathcal{A}''=\mathcal{A}$ 的自伴子代数，其中 $\mathcal{A}'=\{T\in\mathcal{B}(H),TA=AT,\forall A\in\mathcal{A}\}$， $\mathcal{A}''=\{\mathcal{A}'\}'$。 $\mathcal{A}$ 的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})=\mathcal{A}'\cap\mathcal{A}$。投影 $P\in\mathcal{A}$ 称为交换投影，若代数 $P\mathcal{A}P$ 是交换的。

2. 完全保混合 Lie 零积的映射

本节主要刻画含单位元 I 的 $*$-代数上完全保混合 Lie 零积的映射。

定理 2.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个包含单位元 I 的 $*$-代数。若 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个满射，则下列叙述等价：

(1) Φ 双边 2-保混合 Lie 零积。

(2) Φ 完全保混合 Lie 零积。

(3) 存在 $*$-同构 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 及中心元 $Z\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得对 $\Phi(A)=Z\Psi(A)$， $\forall A\in\mathcal{A}$。

证明. (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)是显然的，下证(1) $\Rightarrow$ (3)。

假设 Φ 双边 2-保混合 Lie 零积。

断言 1. $\Phi(0)=0$。

对任意的 $T\in\mathcal{A}$， 令

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\T&0\end{bmatrix},B=C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

则 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$，由 Φ 双边 2-保混合 Lie 零积得 $\left[[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*,\Phi_2(C)\right]=0$，即

$$\begin{aligned}&[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*\\&=\begin{bmatrix}2\Phi(0)\Phi(0)-2\Phi(0)\Phi(0)^* & 2\Phi(0)\Phi(0)-\Phi(0)\Phi(T)^*-\Phi(0)\Phi(0)^*\\ \Phi(T)\Phi(0)+\Phi(0)\Phi(0)-2\Phi(0)\Phi(0)^* & \Phi(T)\Phi(0)+\Phi(0)\Phi(0)-\Phi(0)\Phi(T)^*-\Phi(0)\Phi(0)^*\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*\Phi_2(C)=\begin{bmatrix}4\Phi(0)^3-3\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)-\Phi(0)\Phi(T)^*\Phi(0) & (1.2)\\ 2\Phi(T)\Phi(0)^2+2\Phi(0)^3-3\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)-\Phi(0)\Phi(T)^*\Phi(0) & (2.2)\end{bmatrix},$$

其中 $(1.2)=4\Phi(0)^3-3\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)-\Phi(0)\Phi(T)^*\Phi(0)$，

$(2.2)=2\Phi(T)\Phi(0)^2+2\Phi(0)^3-3\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)-\Phi(0)\Phi(T)^*\Phi(0)$，

$$\begin{aligned}&\Phi_2(C)[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*\\&=\begin{bmatrix}3\Phi(0)^3-4\Phi(0)^2\Phi(0)^*+\Phi(0)\Phi(T)\Phi(0) & 3\Phi(0)^3-2\Phi(0)^2\Phi(T)^*-2\Phi(0)^2\Phi(0)^*+\Phi(0)\Phi(T)\Phi(0)\\ 3\Phi(0)^3-4\Phi(0)^2\Phi(0)^*+\Phi(0)\Phi(T)\Phi(0) & 3\Phi(0)^3-2\Phi(0)^2\Phi(T)^*-2\Phi(0)^2\Phi(0)^*+\Phi(0)\Phi(T)\Phi(0)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由 Φ 的满射性知存在某个 $T_0\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(T_0)=0$。令 $T=T_0$ 得

$$\begin{aligned}&4\Phi(0)^3-3\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)=2\Phi(0)^3-3\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)\\&=3\Phi(0)^3-4\Phi(0)^2\Phi(0)^*=3\Phi(0)^3-2\Phi(0)^2\Phi(0)^*\end{aligned},$$

则有 $\Phi(0)^3=0$，$\Phi(0)^2\Phi(0)^*=0$，$\Phi(0)\Phi(0)^*\Phi(0)=0$。由 Φ 的满射性，存在某个 $T_1\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(T_1)=I$，令 $T=T_1$，可得 $\Phi(0)^2=0$。

对任意的 $T\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\T&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}T&0\\0&0\end{bmatrix}$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\left[[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*,\Phi_2(C)\right]=0$。由 Φ 的满射性可知，存在某个 $T_2\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(T_2)=I$，令 $T=T_2$ 可得 $\Phi(0)\Phi(0)^*=\Phi(0)=0$。

断言 2. $\Phi(I)^*=\Phi(I)\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$。

对任意的 $S,T\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}S&0\\0&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&T\\0&0\end{bmatrix},$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\left[[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*,\Phi_2(C)\right]=0$。由 Φ 的满射性，存在某个 $T\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(T)=I$；存在某个 $S\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(S)=I$。则 $\Phi(I)^*=\Phi(I)$ 且 $\Phi(I)\Phi(S)=\Phi(S)\Phi(I)$。因此 $\Phi(I)^*=\Phi(I)\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$。

断言 3. $\Phi(I)$ 可逆，$\Phi(-T)=-\Phi(T)$，$\forall T\in\mathcal{A}$ 且 Φ 为单射。

步骤 1. $\Phi(I)\Phi(-T)+\Phi(T)\Phi(I)=0$，$\forall T\in\mathcal{A}$。

对任意的 $S,T\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\S&I\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}I&-S^*\\-S&S\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&T\\0&0\end{bmatrix},$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\Phi(S)\Phi(I)\Phi(T)+\Phi(I)\Phi(-S)\Phi(T)=0$。由 Φ 的满射性，存在某个 $T\in\mathcal{A}$，使得

$\Phi(T)=I$，则 $\Phi(S)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(-S)=0$，$\forall S\in\mathcal{A}$。

步骤 **2.** $\Phi(I)$是可逆的。

对任意的 $S,T,R\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix} I & -S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} STS^* & ST \\ TS^* & T \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix},$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\Phi(I)\Phi(ST)\Phi(R)+\Phi(-S)\Phi(T)\Phi(R)=0$。由 Φ 的满射性，存在某个 $R\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(R)=I$，则 $\Phi(I)\Phi(ST)+\Phi(-S)\Phi(T)=0$。由步骤 1 可知 $\Phi(-S)\Phi(T)=-\Phi(I)\Phi(ST)=\Phi(-ST)\Phi(I)$，$\forall S,T\in\mathcal{A}$。由于 Φ 是满射和 S,T 的任意性，则存在 S,T 使得 $\Phi(-S)\Phi(T)$ 可逆。因此 $\Phi(I)\Phi(ST)$ 可逆，即 $\Phi(I)$ 可逆。

步骤 **3.** Φ 是单射且 $\Phi(-T)=-\Phi(T)$，$\forall T\in\mathcal{A}$。

结合步骤 1 中所取 A,B,C 可得 $\left[[\Phi_2(A),\Phi_2(B)]_*,\Phi_2(C)\right]=0$，由 S,T,R 的任意性，设 $\Phi(S)=\Phi(R)$ 则

$$\left[\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Phi(R) & \Phi(I) \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \Phi(I) & \Phi(-S^*) \\ \Phi(-S) & \Phi(R) \end{bmatrix}\right]_*,\begin{bmatrix} 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]=0。$$

由 Φ 双边 2-保混合 Lie 零积有

$$\begin{bmatrix} -T(R-S) & -T(-RS^*+SR^*) \\ 0 & (R-S)T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由 T 的任意性知 $R=S$，因此 Φ 是单射。由断言 2 可知 $\Phi(-T)=-\Phi(T)$，$\forall T\in\mathcal{A}$。

断言 4. $\Phi(T^*)=\Phi(T)^*$，$\forall T\in\mathcal{A}$。

对任意的 $S,T\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S^* \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\Phi(T)\Phi(S^*)\Phi(I)-\Phi(T)\Phi(I)\Phi(S)^*=0$。由 Φ 的满射性，存在某个 $T\in\mathcal{A}$，使得 $\Phi(T)=I$，则 $\Phi(S^*)\Phi(I)-\Phi(I)\Phi(S)^*=0$，由断言 3 知 $\Phi(T^*)=\Phi(T)^*$，$\forall T\in\mathcal{A}$。

断言 5. $\Phi(T+S)=\Phi(T)+\Phi(S)$，$\forall S,T\in\mathcal{A}$。

对任意的 $S,T,R\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix} I & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} S+T & T \\ T & S \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\Phi(R)\Phi(I)\Phi(S+T)-\Phi(R)\Phi(T)\Phi(I)-\Phi(R)\Phi(S)\Phi(I)=0$。由 Φ 的满射性，存在某个 $R\in\mathcal{A}$ 使得 $\Phi(R)=I$，则 $\Phi(I)\Phi(S+T)-\Phi(T)\Phi(I)-\Phi(S)\Phi(I)=0$，由断言 3 知 $\Phi(T+S)=\Phi(T)+\Phi(S)$，$\forall S,T\in\mathcal{A}$。

断言 6. 令映射 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，$\Psi(A)=\Phi(I)^{-1}\Phi(A)$，$\forall A\in\mathcal{A}$，则 $\Psi(I)=I$，Ψ 双边 2-保混合 Lie 零积且 Ψ 具有与 Φ 相同的性质。

由 $\Psi=\Phi(I)^{-1}\Phi$，知 $\Psi(I)=\Phi(I)^{-1}\Phi(I)=I$。对任意的 $A,B,C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{M}_n(F)$，令

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

则有 $\left[\left[\Psi_2(A),\Psi_2(B)\right]_*,\Psi_2(C)\right]=\begin{bmatrix}\Phi(I)^{-1} & 0\\ 0 & \Phi(I)^{-1}\end{bmatrix}^3\left[\left[\Phi_2(A),\Phi_2(B)\right]_*,\Phi_2(C)\right]$。因此 Ψ 是双边 2-保混合 Lie 零积的映射，具有和 Φ 相同的性质。

断言 7. $\Psi(ST)=\Psi(S)\Psi(T)$，$\forall S,T\in\mathcal{A}$。

对任意的 $S,T,R\in\mathcal{A}$，令

$$A=\begin{bmatrix}I & -S\\ 0 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}STS^* & ST\\ TS^* & T\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ R & 0\end{bmatrix},$$

由 $\left[[A,B]_*,C\right]=0$ 得 $\Psi(ST)\Psi(R)+\Psi(-S)\Psi(T)\Psi(R)=0$。由 Ψ 的满射性，存在某个 $R\in\mathcal{A}$ 使得 $\Psi(R)=I$，则 $\Psi(ST)+\Psi(-S)\Psi(T)=0$，由断言 3 可知 $\Psi(ST)=\Psi(S)\Psi(T)$，$\forall S,T\in\mathcal{A}$。

断言 8. 存在可加 $*$-同构 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 及中心元 $Z\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得 $\Phi(A)=Z\Psi(A)$，$\forall A\in\mathcal{A}$，$\Psi(I)=I$。

通过断言 1~7 的讨论，令 $Z=\Phi(I)$ 即可得证。

由定理 2.1 知：

推论 2.2. 设 $\mathcal{A}$ 是没有交换中心投影的 von Neumann 代数，若 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个满射，则下列叙述等价：

(1) Φ 双边 2-保混合 Lie 零积。

(2) Φ 完全保混合 Lie 零积。

(3) 存在中心元 $Z\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得 $\Psi=Z\Phi=\Psi_1+\Psi_2$，其中 $\Psi_1|_{P\mathcal{A}P}$ 是线性 $*$-同构，$\Psi_2|_{(I-P)\mathcal{A}(I-P)}$ 是共轭线性 $*$-同构。

若 $\mathcal{A}$ 是因子 von Neumann 代数，则 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})=\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'=\mathbb{C}I$，$\mathbb{C}$ 为实数。由推论 2.2 有

推论 2.3. 设 $\mathcal{A}$ 是因子 von Neumann 代数，若 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个满射，则下列叙述等价：

(1) Φ 双边 2-保混合 Lie 零积；

(2) Φ 完全保混合 Lie 零积；

(3) $\Phi=\mathbb{C}\Psi$，Ψ 为线性 $*$-同构或共轭线性 $*$-同构。

致　谢

本文作者衷心感谢诸位专家和同行的指导与帮助以及允许我们转载和引用其文献资料的作者和相关出版机构。最后，感谢审稿人和读者的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] 白朝芳, 侯晋川. 保零积或约当零积的映射[J]. 数学年刊 A 辑, 2008, 29(5): 663-670.

[2] 齐霄霏, 侯晋川, 崔建莲. 保持斜 ξ-Lie 零积的可加映射[J]. 中国科学(数学), 2015, 45(2): 151-166.

[3] Wong, W. (1981) Maps on Simple Algebras Preserving Zero Products. II. Lie Algebras of Linear Type. *Pacific Journal of Mathematics*, **92**, 469-488. https://doi.org/10.2140/pjm.1981.92.469

[4] Słowik, R. (2017) Maps on Upper Triangular Matrices Preserving Zero Products. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **67**, 1095-1103. https://doi.org/10.21136/cmj.2017.0416-16

[5] Chen, L. and Wang, D. (2015) Nonlinear Bijective Maps on Strictly Upper Triangular Matrices Preserving Zero Product. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 412-425. https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1043719

[6] Huang, L. and Liu, Y. (2014) Maps Completely Preserving Commutativity and Maps Completely Preserving Jordan Zero-Product. *Linear Algebra and Its Applications*, **462**, 233-249. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.08.016

[7] 付飞艳. von Neumann 代数上导子与同构的等价刻画[D]: [硕士学位论文]. 太原: 太原理工大学, 2018.