

Chebyshev谱法求解电报方程

罗 妍, 宋灵宇*

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2025年3月18日; 录用日期: 2025年4月11日; 发布日期: 2025年4月22日

摘 要

双曲偏微分方程是重要的偏微分方程之一。提出求解电报方程的Chebyshev谱法, 采用Chebyshev-Gauss-Lobatto配点, 利用Chebyshev多项式构造导数矩阵, 将电报方程近似为常微分方程, 证明了电报方程的离散Chebyshev谱法的误差估计, 采用Runge-Kutta进行求解。将该法得到的数值结果与精确解进行比较, 验证了方法的有效性, 数据结果的误差与其他方法相比有较高的精确度。

关键词

电报方程, Chebyshev谱法, Chebyshev-Gauss-Lobatto点, Chebyshev多项式

Chebyshev Spectral Method for Solving Telegraph Equation

Yan Luo, Lingyu Song*

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Mar. 18th, 2025; accepted: Apr. 11th, 2025; published: Apr. 22nd, 2025

Abstract

Hyperbolic partial differential equation is one of the important partial differential equations. The Chebyshev spectral method is proposed to solve the telegraph equation. Chebyshev-gauss-lobatto is used to assign points, the derivative matrix is constructed by Chebyshev polynomial, and the telegraph equation is approximated as an ordinary differential equation. The error estimation of the discrete Chebyshev spectral method for the telegraph equation was proved. Runge-Kutta was used to solve the problem. The numerical results obtained by the method are compared with the exact solution, and the effectiveness of the method is verified. The error of the data results is more accurate than that of other methods.

*通讯作者。

文章引用: 罗妍, 宋灵宇. Chebyshev 谱法求解电报方程[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 614-624.
DOI: 10.12677/aam.2025.144191

Keywords

Telegraph Equation, Chebyshev Spectral Method, Chebyshev-Gauss-Lobatto Point, Chebyshev Polynomials

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

谱方法[1] [2]是一种既古老又新兴的求解偏微分方程的数值方法。早在 1820 年, Navier 就运用双重三角级数求解弹性薄板问题。谱方法有很多优点, 最重要的是他的“无穷阶”收敛速度。Chebyshev 谱法主要用于求解非周期性问题 and 具有光滑系数和简单域的数值微分方程[3]-[5]。迄今为止, 该方法已经成功应用于流体力学[6] [7], 量子力学[8] [9]等领域的微分方程求解。

双曲偏微分方程已被用于描述原子物理不同领域的现象, 与普通扩散方程相比, 电报方程在模拟反应扩散方程方面更具优势[10]。电报方程又名传输线方程, 是描述传输线上任意点电压、电流与传输线一次参数之间关系的微分方程组, 用于描述电信号在传输线电缆中的传播和波现象。特别是, 它们可以适用于模拟物理学和生物学中反应扩散之间的相互作用。

线性电报方程的标准形式是

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega \\ u(x, t) = g(x, t), (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

其中 u 是未知函数, T 是最终时间。

目前已有许多方法被用来求解电报方程。Zhou 和 Luo [11]基于 Chebyshev 多项式建立二维电报方程的 Crank-Nicolson 配点模型, 并讨论了其数值解的存在性、唯一性、稳定性和收敛性。Dehghan 和 Shokri [12]使用配点法求解二阶双曲电报方程, 并使用薄板样条径向基函数直接近似数值解。Wang 和 Ahmad 等[13]是通过将时间变量视为正常空间变量, 给出了径向基函数求解二阶一维双曲电报方程的直接无网格法。Ahmad 和 Seadawy 等[14]利用径向基函数的局部无网格法研究三维二阶双曲电报方程, 利用显式时间积分技术在时间方向上对模型进行半离散化。Mardani 和 Hooshmandasl 等[15]研究了一类变系数非线性双曲电报方程, 在空间域和时域中分别采用移动最小二乘法(MLS)近似和有限差分法(FDM), 给出了该问题的半离散解。Reutskiy 和 Zhang [16]等将三层的 Crank-Nicolson 格式应用于时间方向的导数, 将电报方程转化为具有混合导数和变系数的二阶椭圆型偏微分方程。朱妍红和宋灵宇等[17]分别使用时空 MQ 径向基无网格法和时空 MQ 径向基耦合时空多项式基的无网格法求解电报方程。

本文在此基础上, 推导出一维电报方程的 Chebyshev 谱格式, 并对其进行收敛性和稳定性证明。之后再采用 Chebyshev-Gauss-Lobatto 节点及 Chebyshev 导数矩阵将电报方程转化为常微分方程, 使用 Runge-Kutta 法对其进行求解, 结果表明 Chebyshev 谱法更有效。

2. 基础知识

设 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是一个有界开域, 其边界为 $\partial\Omega$, L^2 表示在其上定义的所有平方可积函数的集合, 其上的内积和范数定义为

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx dy, \|u\|_0 = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx dy \right)^{1/2}, \forall u, v \in L^2(\Omega) \quad (2)$$

定义

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\} \quad (3)$$

其中 m 是非负整数, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, 并且 $\alpha_i \geq 0$ 是整数 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ 。

$H^m(\Omega)$ 上的范数和半范数分别定义为

$$\|u\|_m = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2}, |u|_m = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

其中 $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$ 。

设 $H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) : D^\alpha u(x)|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq m\}$, H^{-m} 是 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间。

此外, 令 $\omega = \omega(x, y) = \omega(x)\omega(y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $\Omega = (-1, 1)^2$, 设 $L_\omega^2(\Omega)$ 表示其上定义的所有平方可积函数的集合, 其上的范数为

$$\|u\|_{0,\omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \omega dx dy \right)^{1/2} \quad (5)$$

并且设 $H_\omega^m(\Omega) := \{u \in L_\omega^2(\Omega) : D^\alpha u \in L_\omega^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ 是带有 Chebyshev-Gauss-Lobatto 正交加权函数的加权 Sobolev 空间, 其上的范数为

$$\|u\|_{m,\omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

令 $H_{0,\omega}^m(\Omega) = \{u \in H_\omega^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $(\cdot, \cdot)_\omega$ 表示 $L_\omega^2(\Omega) = H_\omega^0(\Omega)$ 的加权互积, 设 $\|\cdot\|_{H^l(H_\omega^m)}$ 是以下空间中的范数

$$H^l(0, T; H_\omega^m(\Omega)) = \left\{ v(t) \in H_\omega^m(\Omega) : \|v\|_{H^l(H_\omega^m)}^2 = \int_0^T \sum_{i=0}^l \left\| \frac{d^i}{dt^i} v(t) \right\|_{m,\omega}^2 dt < \infty \right\} \quad (7)$$

引理 2.1 [1] 设 S_N 为一维或二维空间中的插值子空间。引入正交映射 $P_N : L_\omega^2(I) \rightarrow S_N$, 则对任意的 $u \in H_{0,\omega}^1(\Omega)$, 都有

$$(\nabla(P_N u - u), \nabla v) = 0, \forall v \in S_N \quad (8)$$

引理 2.2 [1] 假设 $u \in H^m(\Omega)$, 对任意的 $0 \leq \mu \leq m$, 存在一个与 u 和 N 无关的常数 C , 使得

$$\|u - P_N u\|_\mu \leq C N^{\mu-m} \|u\|_m, \|P_N u\|_\mu \leq C \|u\|_\mu \quad (9)$$

引理 2.3 [1] 假设 X 为 Hilbert 空间, $B(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个双线性泛函, 且存在常数 $\alpha > 0, \beta \geq 0$, 使得

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \forall u, v \in X \quad (10)$$

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u), \forall u \in X \quad (11)$$

那么对于 X 上的任意连续线性泛函 F , 存在一个唯一的 $v \in X$, 使得

$$B(u, v) = F(v), \forall v \in X \quad (12)$$

引理 2.4 [2] 令 $\eta_N(t) = P_N u - u$, 且 $u, u_t, u_{tt} \in L^\infty(J, H_\omega^m(\Omega) \cap H_\omega^m(\Omega))$, 对于 $t \in \bar{J}$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\eta_N, v) &= 0 \\ N \|\eta_N(t)\| + |\eta_N(t)| &\leq CN^{1-m} \|u(t)\|_{L^\infty(J; H_\omega^m(\Omega))} \\ N \|\eta_{Nt}(t)\| + |\eta_{Nt}(t)| &\leq CN^{1-m} \|u_t(t)\|_{L^\infty(J; H_\omega^m(\Omega))} \\ N \|\eta_{Ntt}(t)\| + |\eta_{Ntt}(t)| &\leq CN^{1-m} \|u_{tt}(t)\|_{L^\infty(J; H_\omega^m(\Omega))} \end{aligned} \quad (13)$$

3. 电报方程的 Chebyshev 谱法

Chebyshev 多项式是在区间 $[-1, 1]$ 上关于切比雪夫权函数 $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的正交多项式系。设 $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ 为 k 次的第一类切比雪夫多项式, 选取 $N+1$ 个 Chebyshev-Gauss-Lobatto 节点

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), j = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

如果 $u(x)$ 是一个连续可微函数, 那么它可以在 Chebyshev-Gauss-Lobatto 插值点处近似为:

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k L_k(x) \quad (15)$$

$$L_k(x) = \frac{2}{N\mu_k} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\mu_j} T_k(x_j) T_k(x), k = 0, 1, \dots, N, a_k = u(x_k) \quad (16)$$

其中

$$\mu_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N \\ 1, & 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}$$

值得注意的是, 对于 $k, j = 0, 1, \dots, N$ Lagrange 插值具有 Kronecker 内积

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \quad (17)$$

为了近似 $u(x)$ 的一阶导数, 通过微分插值函数得到

$$u_{Nx}(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k) \frac{dL_k(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^N D_{kj} u(x_k) \quad (18)$$

得到 $(N+1) \times (N+1)$ 维的导数矩阵 D_N

$$D_N = \begin{cases} \frac{2N^2+1}{6} & k = j = 0, \\ \frac{\mu_k (-1)^{i+j}}{\mu_j t_k - t_j} & k \neq j, \\ -x_j & 1 \leq k = j \leq N-1, \\ \frac{2(1-t_j^2)}{2} & \\ -\frac{2N^2+1}{6} & k = j = N, \end{cases} \quad (19)$$

3.1. 电报方程的谱格式及收敛性分析

在这里, 通过使用变换 $x' = -1 + 2(x-a)/(x-b)$ 确保区间 $[a, b] \leftrightarrow [-1, 1]$, 电报方程的 Chebyshev 谱法的半离散格式为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_N, v \right) + a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_N, v \right) + b(u_N, v) = (\Delta u_N, v) + (f(x, t_n), v), v \in V_N \quad (20)$$

即

$$A(u_N, v_N) = F(v_N) \quad (21)$$

其中 $u_N \in H_{0,\omega}^1(\Omega) \cap S_N$, 使得对任何 $v \in S_N$ 成立。 $A(\cdot, \cdot)$ 是上的有界正定双线性泛函, 对于给定的 $f(t_n)$, $F(\cdot)$ 是 $H_{0,\omega}^1(\Omega) \cap S_N$ 上的有边界线性泛函。因此, 根据 Lax-Milgram 定理, 上式有一个唯一解 $u_N \in H_{0,\omega}^1(\Omega) \cap S_N$ 。

定理 1: 设 $u_N \in H_{0,\omega}^1(\Omega) \cap S_N$, 存在一个常数 c , 使得方程(20)有唯一的解 $u_N(t)$ 满足下列不等式:

$$\|u_{Nt}(t)\|^2 + \|u_N(t)\|^2 + \|\nabla u_N(t)\|^2 \leq e^t \left[\|u_{Nt}(0)\|^2 + \|u_N(0)\|^2 + \|\nabla u_N(0)\|^2 + \int_0^t \|f(x, s_n)\|^2 ds \right] \quad (22)$$

证明: 令(20)式中 $v = u_{Nt}$, 得

$$(u_{Ntt}, u_{Nt}) + a(u_{Nt}, u_{Nt}) + b(u_N, u_{Nt}) + (\nabla u_N, \nabla u_{Nt}) = (f(x, t_n), u_{Nt}) \quad (23)$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{Nt}\|^2 + a \|u_{Nt}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_N\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_N\|^2 = (f(x, t_n), u_{Nt}) \quad (24)$$

使用 Cauchy-Schwarz 不等式并对其进行 $(0, t)$ 上进行积分

$$\begin{aligned} & \left(\|u_{Nt}(t)\|^2 + \|u_N(t)\|^2 + \|\nabla u_N(t)\|^2 \right) - \left(\|u_{Nt}(0)\|^2 + \|u_N(0)\|^2 + \|\nabla u_N(0)\|^2 \right) \\ & \leq \int_0^t \|f(x, s_n)\|^2 + (1-2a) \|u_{Ns}\|^2 ds \end{aligned} \quad (25)$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u_{Nt}(t)\|^2 + \|u_N(t)\|^2 + \|\nabla u_N(t)\|^2 \leq e^t \left[\|u_{Nt}(0)\|^2 + \|u_N(0)\|^2 + \|\nabla u_N(0)\|^2 + \int_0^t \|f(x, s_n)\|^2 ds \right] \quad (26)$$

定理 2: 假设 $u(x, t)$ 是问题(1)的解, $u_N(x, t)$ 是近似方程(20)的解, 那么存在一个常数 C , 使得

$$\|u_N(t) - u(t)\| \leq CN^{-m} \|u\| + CN^{1-m} \|u_t\| \quad (27)$$

证明: 用(20)式减去(1)式, 令 $\eta_N(t) = u(t) - P_N u(t)$, $e_N(t) = P_N u(t) - u_N(t)$, 得

$$(e_{Ntt} + \eta_{Ntt}, v_N) + a(e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_N) + b(e_N + \eta_N, v_N) + \nabla(e_N + \eta_N, v_N) = 0 \quad (28)$$

则

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_N) - (e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_{Nt}) + a \frac{d}{dt} (e_N + \eta_N, v_N) \\ & - a(e_N + \eta_N, v_{Nt}) + b(e_N + \eta_N, v_N) + \nabla(e_N + \eta_N, v_N) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

即

$$\begin{aligned} & -(e_{Nt}, v_{Nt}) - a(e_N, v_{Nt}) + b(e_N + \eta_N, v_N) + \nabla(e_N + \eta_N, v_N) \\ & = (\eta_{Nt}, v_{Nt}) - \frac{d}{dt} (e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_N) - a \frac{d}{dt} (e_N + \eta_N, v_N) + a(\eta_N, v_{Nt}) \end{aligned} \quad (30)$$

令上式中 $v_{Nt} = e_N$, 有

$$\begin{aligned} & (e_{Nt}, e_N) + a(e_N, e_N) - b(e_N + \eta_N, v_N) - \nabla(e_N + \eta_N, v_N) \\ &= -(\eta_{Nt}, e_N) + \frac{d}{dt}(e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_N) + a \frac{d}{dt}(e_N + \eta_N, v_N) - a(\eta_N, e_N) \end{aligned} \quad (31)$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_N\|^2 + a \|e_N\|^2 - b(e_N + \eta_N, v_N) - \nabla(e_N + \eta_N, v_N) \\ &= -(\eta_{Nt}, e_N) + \frac{d}{dt}(e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_N) + a \frac{d}{dt}(e_N + \eta_N, v_N) - a(\eta_N, e_N) \end{aligned} \quad (32)$$

对(32)式使用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_N\|^2 + a \|e_N\|^2 - b(e_N + \eta_N, v_N) - \nabla(e_N + \eta_N, v_N) \\ & \leq \frac{1}{2} \|\eta_{Nt}\|^2 + \frac{1}{2} \|e_N\|^2 + \frac{d}{dt}(e_{Nt} + \eta_{Nt}, v_N) + a \frac{d}{dt}(e_N + \eta_N, v_N) + \frac{a}{2} \|\eta_N\|^2 + \frac{a}{2} \|e_N\|^2 \end{aligned} \quad (33)$$

对(33)式在 $(0, t)$ 上进行积分

$$\begin{aligned} \|e_N(t)\|^2 - \|e_N(0)\|^2 & \leq \int_0^t \|\eta_{Ns}\|^2 + (a+b) \|\eta_N\|^2 + (1-a+b) \|e_N\|^2 + b \|v_N\|^2 + |e_N|^2 + |\eta_N|^2 + |v_N|^2 \, ds \\ & \quad + (e_{Nt}(t) + \eta_{Nt}(t), v_N(t)) - (e_{Nt}(0) + \eta_{Nt}(0), v_N(0)) \\ & \quad + (e_N(t) + \eta_N(t), v_N(t)) - (e_N(0) + \eta_N(0), v_N(0)) \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e_N\|^2 \, ds &= \int_0^t \|P_N u(t) - u_N(t)\|^2 \, ds \\ &= \int_0^t \|P_N u(t) - u(t) + u(t) - u_N(t)\|^2 \, ds \\ &\leq \int_0^t \|P_N u(t) - u(t)\|^2 \, ds + \int_0^t \|u(t) - u_N(t)\|^2 \, ds \\ &\leq CtN^{-2m} \|u\|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{因为 } \|v_N\|^2 = \left(\int_0^\tau e_N(s) \, ds, \int_0^\tau e_N(s) \, ds \right) = \int_\Omega \left(\int_0^\tau e_N(s) \, ds \right)^2 \, dx$$

由 $\int_0^t \|e_N\|^2 \, ds$ 的估计可以得到

$$\int_0^t \|v_N\|^2 \, ds \leq CN^{-2m} \|u\|^2 \quad (36)$$

由定义 $(u - P_N u, \phi)_\omega = 0, \forall \phi \in P_N$, 且 $e_N + \eta_N = u_N - u$ 知

$$(e_{Nt}(t) + \eta_{Nt}(t), v_N(t)) = 0, (e_N(t) + \eta_N(t), v_N(t)) = 0 \quad (37)$$

所以(34)式变为

$$\|e_N(t)\|^2 - \|e_N(0)\|^2 \leq CN^{-2m} \|u\|^2 + \int_0^t \|\eta_{Ns}\|^2 + (a+b) \|\eta_N\|^2 + (1-a+b) \|e_N\|^2 + |e_N|^2 + |\eta_N|^2 \, ds \quad (38)$$

由引理 2.4 得

$$\|e_N(0)\|^2 = \|P_N u(0) - u_N(0)\|^2 \leq \|P_N u(0) - u(0)\|^2 + \|u(0) - u_N(0)\|^2 \leq CN^{-2m} \|u\|^2 \quad (39)$$

综合上式, 我们得到

$$\|e_N\|^2 \leq CN^{-2m} \|u\|^2 + CN^{2-2m} \|u_t\|^2 \quad (40)$$

因此

$$\|u_N(t) - u(t)\| \leq \|e_N(t)\| + \|\eta_N(t)\| \leq CN^{-m} \|u\| + CN^{1-m} \|u_t\| \quad (41)$$

3.2. 电报方程时间方向上的离散

此时, 为了保证方程在要求的区域中求解, 令 $x' = (a+b)/2 + x((b-a)/2)$, $D' = D/((b-a)/2)$ 。对于线性电报方程, 通过 Chebyshev 导数矩阵可以将方程写成矩阵的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{a}\mathbf{v} + \mathbf{b}\mathbf{u} = D^2 \mathbf{u} + f(x, t) \end{cases} \quad (42)$$

其中 $\mathbf{u} = (u(x_0), u(x_0), \dots, u(x_0))^T$, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N)^T$, 使用四阶 Runge-Kutta 法对其进行求解。

4. 数值结果

在这里, 通过以下三种误差来衡量计算结果的准确性,

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^N |u_i - \tilde{u}_i|^2}, \quad L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \tilde{u}_i|, \quad RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N |u_i - \tilde{u}_i| \right)}$$

其中 u_i 和 $\tilde{u}_i$ 分别表示为精确解和近似解。

例 1 考虑具有初始条件的双曲电报方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 20 \frac{\partial u}{\partial t} + 25u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ u(x, t) &= e^{2t} \sin(\pi x) \end{aligned}$$

我们取 $\Omega = [0, 1]$, $T = 1$, $a = 20$, $b = 25$, 边界条件为 $u(x, t) = g(x, t)$, $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, 由精确解可得

$$f(x, t) = (69 + \pi^2) e^{2t} \sin(\pi x)。$$

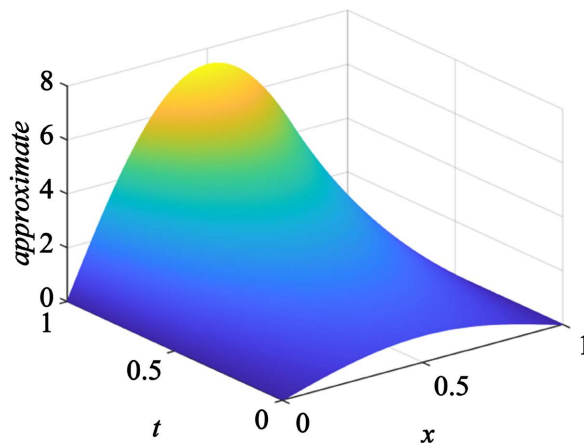


Figure 1. Numerical solution
图 1. 数值解

图 1, 图 2 是 $N = 400$, $dt = 0.001$, $T = 1$ 时的数值解和精确解, 表 1 是在 $dt = 0.001$ 时, 不同时间的三种误差, 可以发现比文献[15]、[17]中的误差小, 表 2 是误差随 Chebyshev 节点数量的变化情况, 可以发现随着 Chebyshev 节点的增大, 误差在减小。

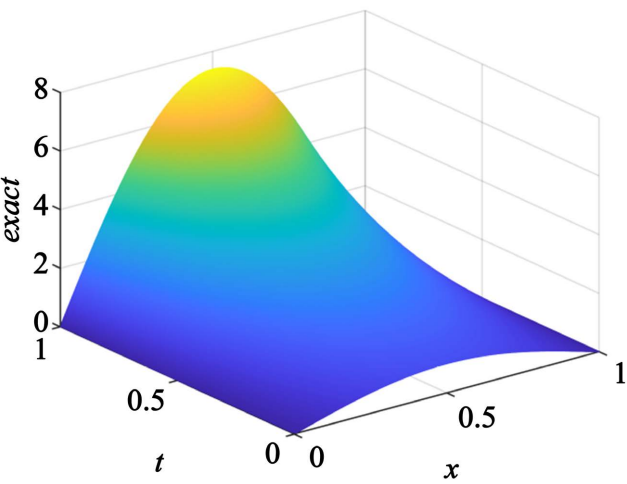


Figure 2. Exact solution
图 2. 精确解

Table 1. $dt = 0.001$, error of t taking different values
表 1. $dt = 0.001$, t 取不同值的误差

t	L_2	L_∞	RMS
0.5	8.8521e-10	6.1579e-10	4.4316e-11
1	1.8671e-09	1.6175e-09	9.3472e-11
1.5	5.6464e-09	4.3637e-09	2.8268e-10
2	2.0547e-08	1.9698e-08	1.0286e-09
3	1.4408e-07	1.4118e-07	7.2128e-09

Table 2. The error of $t = 1$ for different values of N
表 2. N 取不同值时 $t = 1$ 的误差

N	L_2	L_∞	RMS
50	8.4442e-07	8.2159e-07	1.2063e-07
100	7.7198e-08	7.0772e-08	7.7587e-09
200	1.1377e-08	8.3661e-09	8.0652e-10
400	1.8671e-09	1.6175e-09	9.3472e-11

例 2 考虑非线性电报方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

初始值为

$$u(x, 0) = \cosh x, x \in \Omega$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -\cosh x, x \in \Omega$$

边界条件为

$$u(-4,t) = e^{-t} \cosh(-4), \quad u(4,t) = e^{-t} \cosh 4$$

精确解为

$$u = e^{-t} \cosh x$$

由精确解可得

$$f(x,t) = e^{-2t} \cosh^2 x - 2e^{-t} \cosh x$$

这里 $\Omega \in [0,1]$ 。

图 3 和图 4 是 $N = 300$, $dt = 0.001$, $T = 3$ 时的数值解和精确解, 表 3 是在 $dt = 0.001$ 时, 不同时间的三种误差, 可以发现比文献[15]中的误差小, 表 4 是误差随着 Chebyshev 节点数量的变化情况, 可以发现随着 Chebyshev 节点的增大, 误差在减小。

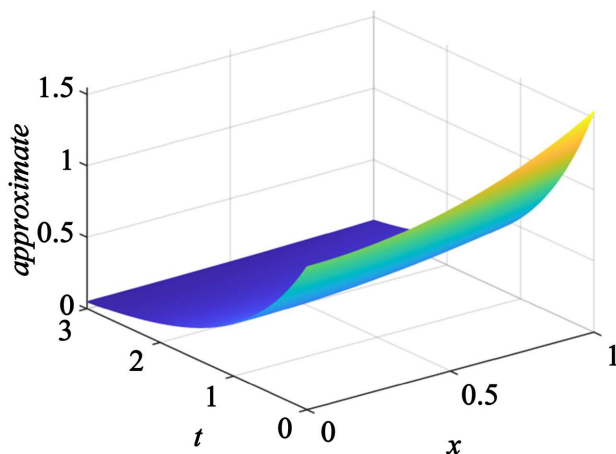


Figure 3. Numerical solution

图 3. 数值解

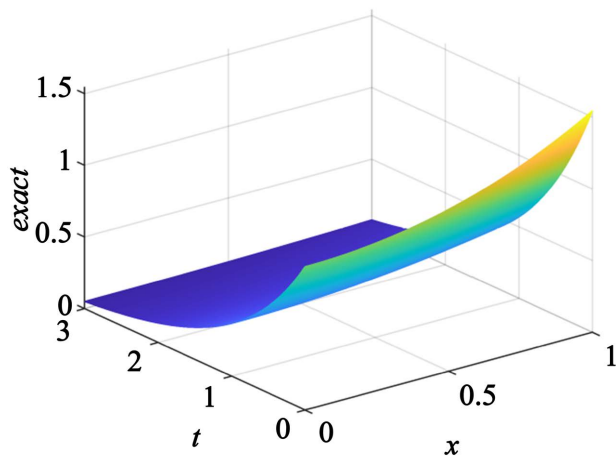


Figure 4. Exact solution

图 4. 精确解

Table 3. $dt = 0.001$, error of t taking different values
表 3. $dt = 0.001$, t 取不同值的误差

t	L_2	L_∞	RMS
0.5	3.6898e-05	3.0630e-05	5.1668e-06
1	3.0670e-05	2.2985e-05	4.2947e-06
1.5	1.1252e-05	1.0758e-05	1.5756e-06
3	9.7158e-06	7.2337e-06	1.3605e-06
5	1.2927e-06	1.0662e-06	1.8102e-07

Table 4. The error of $t = 1$ for different values of N
表 4. N 取不同值时 $t = 1$ 的误差

N	L_2	L_∞	RMS
50	3.0670e-05	2.2985e-05	4.2947e-06
100	6.3692e-06	5.3988e-06	6.3378e-07
200	2.6677e-06	1.8957e-06	1.5376e-07

5. 本章小结

本章提出了一种基于 Chebyshev-Gauss-Lobatto 伪谱格式的求解非线性电报方程的有效数值解, 并分析了 Chebyshev 谱法的收敛性和稳定性, 将 Chebyshev 谱法得到的误差与其他方法进行比较, 发现该方法误差更小, 相较于其他的方法具有的精度更高。

基金项目

国家自然科学基金青年项目(编号: 12101482), 中国博士后科学基金面上项目(2022M722604), 陕西数理基础科学研究项目(23JSQ042), 甘肃省科技计划项目(23CXGL0018), 西安市科技局高校院所科技人员服务企业项目(24GXFW0038)。

参考文献

- [1] Canuto, C., Hussaini, M.Y. and Quarteroni, A. (2006) Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains. Springer.
- [2] Jie, S., Tao, T. and Wang, L.L. (2011) Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Springer, 103-111.
- [3] Elbarbary, E.M.E. and El-Kady, M. (2003) Chebyshev Finite Difference Approximation for the Boundary Value Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **139**, 513-523. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(02\)00214-x](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(02)00214-x)
- [4] Ibrahim, M.A.K. and Temsah, R.S. (1988) Spectral Methods for Some Singularly Perturbed Problems with Initial and Boundary Layers. *International Journal of Computer Mathematics*, **25**, 33-48. <https://doi.org/10.1080/00207168808803658>
- [5] Ali, I., Brunner, H. and Tao, T. (2009) A Spectral Method for Pantograph-Type Delay Differential Equations and Its Convergence Analysis. *Applied Mathematics and Computation*, **27**, 254-265.
- [6] Tian, X., Li, B., Wu, Y. and Zhang, J. (2015) Chebyshev Collocation Spectral Method Simulation for the 2D Boundary Layer Flow and Heat Transfer in Variable Viscosity MHD Fluid over a Stretching Plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **89**, 829-837. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.102>
- [7] Chen, Y., Li, B. and Zhang, J. (2016) Spectral Collocation Method for Natural Convection in a Square Porous Cavity with Local Thermal Equilibrium and Non-Equilibrium Models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **96**, 84-96. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.01.007>
- [8] Fang, J., Wu, B. and Liu, W. (2018) An Explicit Spectral Collocation Method Using Nonpolynomial Basis Functions for the Time-Dependent Schrödinger Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 186-203.

- <https://doi.org/10.1002/mma.5332>
- [9] Zhang, H., Jiang, X., Wang, C. and Chen, S. (2018) Crank-Nicolson Fourier Spectral Methods for the Space Fractional Nonlinear Schrödinger Equation and Its Parameter Estimation. *International Journal of Computer Mathematics*, **96**, 238-263. <https://doi.org/10.1080/00207160.2018.1434515>
 - [10] Dehghan, M. and Ghesmati, A. (2010) Solution of the Second-Order One-Dimensional Hyperbolic Telegraph Equation by Using the Dual Reciprocity Boundary Integral Equation (DRBIE) Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **34**, 51-59. <https://doi.org/10.1016/jenganabound.2009.07.002>
 - [11] Zhou, Y. and Luo, Z. (2018) A Crank-Nicolson Collocation Spectral Method for the Two-Dimensional Telegraph Equations. *Journal of Inequalities and Applications*, **2018**, Article No. 137. <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1728-5>
 - [12] Dehghan, M. and Shokri, A. (2007) A Numerical Method for Solving the Hyperbolic Telegraph Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **24**, 1080-1093. <https://doi.org/10.1002/num.20306>
 - [13] Wang, F., Hou, E., Ahmad, I., Ahmad, H. and Gu, Y. (2021) An Efficient Meshless Method for Hyperbolic Telegraph Equations in $(1 + 1)$ Dimensions. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **128**, 687-698. <https://doi.org/10.32604/cmescs.2021.014739>
 - [14] Ahmad, I., Seadawy, A.R., Ahmad, H., Thounthong, P. and Wang, F. (2021) Numerical Study of Multi-Dimensional Hyperbolic Telegraph Equations Arising in Nuclear Material Science via an Efficient Local Meshless Method. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **23**, 115-122. <https://doi.org/10.1515/ijnsns-2020-0166>
 - [15] Mardani, A., Hooshmandasl, M.R., Hosseini, M.M. and Heydari, M.H. (2017) Moving Least Squares (MLS) Method for the Nonlinear Hyperbolic Telegraph Equation with Variable Coefficients. *International Journal of Computational Methods*, **14**, Article ID: 1750026. <https://doi.org/10.1142/s0219876217500268>
 - [16] Reutskiy, S., Zhang, Y., Lin, J. and Sun, H. (2020) Novel Numerical Method Based on Cubic B-Splines for a Class of Nonlinear Generalized Telegraph Equations in Irregular Domains. *Alexandria Engineering Journal*, **59**, 77-90. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2019.12.009>
 - [17] 朱妍红, 宋灵宇, 盖梦琳. 基于时空无网格法的两种算法求解电报方程[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2023, 52(5): 512-520.