

Nekrasov型矩阵与严格对角占优矩阵的子直和

李天元¹, 党建超², 高磊²

¹宝鸡文理学院数学与信息科学学院, 陕西 宝鸡

²延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安

收稿日期: 2025年3月22日; 录用日期: 2025年4月15日; 发布日期: 2025年4月23日

摘 要

矩阵的子直和作为矩阵加法运算的推广形式, 在区域分解法、复杂网络分析及图论等领域具有重要的理论价值和实际应用。本文基于Nekrasov型矩阵和严格对角占优矩阵的特性, 结合不等式放缩技术, 探讨了Nekrasov型矩阵与严格对角占优矩阵、以及严格对角占优矩阵与Nekrasov型矩阵的子直和问题。研究获得了子直和矩阵保持Nekrasov型矩阵结构特性的若干简易充分条件, 并通过数值实验验证了所得理论结果的有效性和实用性。

关键词

Nekrasov型矩阵, 严格对角占优矩阵, 子直和

Subdirect Sums of Nekrasov Type Matrices and Strictly Diagonally Dominant Matrices

Tianyuan Li¹, Jianchao Dang², Lei Gao²

¹School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji Shaanxi

²College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Mar. 22nd, 2025; accepted: Apr. 15th, 2025; published: Apr. 23rd, 2025

Abstract

The subdirect sum of matrices, as a generalization of the sum of matrices, holds significant theoretical value and practical applications in fields such as domain decomposition methods, complex network analysis, and graph theory. Based on the properties of Nekrasov-type matrices and strictly diagonally dominant matrices, combined with inequality scaling techniques, this paper explores the subdirect sum problems between Nekrasov-type matrices and strictly diagonally dominant matrices. The study obtains several simple sufficient conditions for the subdirect sum matrices to

preserve the structural properties of Nekrasov-type matrices, and the effectiveness and practicality of the theoretical results are verified through numerical experiments.

Keywords

Nekrasov Type Matrices, Strictly Diagonally Dominant Matrices, Subdirect Sums

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $C^{n \times n}$ 为所有 n 阶复矩阵的集合。1999 年, Fallat 和 Johnson [1] 在研究正定矩阵性质时, 基于矩阵加法运算, 首次提出了矩阵的 k -子直和概念。

定义 1 [1] 设 $A \in C^{n_1 \times n_1}, B \in C^{n_2 \times n_2}$, 且有如下分块形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $A_{22}, B_{11} \in C^{k \times k} (1 \leq k \leq \min(n_1, n_2))$, 称

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

为 A 和 B 的 k -子直和, 记作 $C = A \oplus_k B$ 。

矩阵子直和(subdirect sum)作为一种重要的矩阵运算, 在数值计算与优化领域中具有广泛的应用背景。这一概念在矩阵补全问题、区域分解方法中的重叠子域处理以及有限元分析中的整体刚度矩阵构建等关键问题中发挥着重要作用[1]-[4]。在结构矩阵的研究中, 一个核心问题是探讨同类矩阵经过子直和运算后是否仍然保持原有的矩阵结构特性, 即所谓的保结构问题。这一问题的答案因矩阵结构的不同而有所差异, 国内外学者对此展开了深入研究, 并取得了丰硕的成果[2] [5]-[10]。

在子直和问题的研究历程中, 2005 年文献[2]首次给出了两个非奇异 M -矩阵的子直和仍为非奇异 M -矩阵的若干充分条件, 为这一领域的研究奠定了基础。随后, 2006 年文献[5]证明了 S -严格对角占优矩阵的 k -子直和保持 S -严格对角占优性质的结论。在此基础上, 文献[6]-[10]相继对 Σ -严格对角占优矩阵、双严格对角占优矩阵、 α_1 -矩阵、 α_2 -矩阵、 H -矩阵、 B -矩阵和双 B -矩阵等特殊矩阵的子直和问题进行了系统研究, 分别给出了相应的保结构充分条件。

近年来, 子直和问题的研究持续深入。2016 年, Li 等人先后对 Nekrasov 矩阵[11]和弱链对角占优矩阵[12]的子直和问题进行了深入探讨; 2020 年, Gao 等人将研究视角扩展到 QN -矩阵的子直和问题[13]; 2022 年, 戴平凡和潘攀[14]针对 DZ 型矩阵的子直和问题进行了研究: 他们首先说明了两个 DZ 型矩阵的 1-子直和并不一定是 DZ 型矩阵, 随后给出了保证两个 DZ 型矩阵的 1-子直和仍为 DZ 型矩阵的一些充分条件, 并进一步推广到 k -子直和情形, 建立了相应的理论结果。这些研究成果不仅丰富了矩阵子直和理论, 也为相关领域的实际应用提供了重要的理论支撑。

本文继续研究结构矩阵的子直和问题, 重点探讨 Nekrasov 型矩阵和严格对角占优矩阵的子直和问题, 通过理论分析和推导, 给出了保证 Nekrasov 型矩阵和严格对角占优矩阵的 1-子直和、 k -子直和仍为

Nekrasov 型矩阵的一些简易充分条件。这一研究不仅深化了对结构矩阵子直和性质的理解, 也为相关矩阵理论在数值计算和优化领域的应用提供了新的理论支撑。

本文其余部分的结构安排: 第二部分为预备知识, 给出本文用到的符号、定义和引理; 第三部分为主要结果, 研究 Nekrasov 型矩阵和严格对角占优矩阵的子直和问题, 并给出一些数值算例进行说明; 第四部分, 对本文的工作进行总结。

2. 预备知识

本文中, C 表示复数域, $C^{n \times n}$ 表示 n 阶复矩阵集合, $|a|$ 指复数 a 的模。设 $A \in C^{n_1 \times n_1}$, $B \in C^{n_2 \times n_2}$
 $C = A \oplus_k B = (c_{ij}) \in C^{(n_1+n_2-k) \times (n_1+n_2-k)}$, 按照定义 1, C 的元素满足:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \in S_1, \quad j \in S_1 \cup S_2, \\ 0, & i \in S_1, \quad j \in S_3, \\ a_{ij}, & i \in S_2, \quad j \in S_1, \\ a_{ij} + b_{i-t, j-t}, & i \in S_2, \quad j \in S_2, \\ b_{i-t, j-t}, & i \in S_2, \quad j \in S_3, \\ 0, & i \in S_3, \quad j \in S_1, \\ b_{i-t, j-t}, & i \in S_3, \quad j \in S_2 \cup S_3, \end{cases}$$

其中 $t = n_1 - k$, $S_1 = \{1, \dots, n_1 - k\}$, $S_2 = \{n_1 - k + 1, \dots, n_1\}$, $S_3 = \{n_1 + 1, \dots, n\}$ 。

定义 2 [15] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若对于 $i \in N := \{1, \dots, n\}$, $|a_{ii}| > r_i(A)$, 则称 A 是严格对角(SDD)矩阵, 其中 $r_i(A) = \sum_{j \in N, j \neq i} |a_{ij}|$ 。

设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 其中对于每一个 $i \in N$ 有 $a_{ii} \neq 0$, 令

$$g_n(A) = \sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}|, \quad g_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} g_j(A), \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

3. 主要结果

首先, 回顾 S-Nekrasov 型矩阵的定义, 并给出 Nekrasov 型矩阵的定义。

定义 3 [16] 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, 若矩阵 A 满足下述条件之一:

- (1) 对于 $i \in N$, $|a_{ii}| > g_i(A)$;
- (2) 对每个 $N^-(A) = \{i \in N \mid |a_{ii}| \leq g_i(A)\}$, 存在一个包含 i 的非空真子集 $S \subset N$ 满足

$$|a_{ii}| > g_i^S(A), \quad (|a_{ii}| - g_i^S(A))(|a_{jj}| - g_j^S(A)) > g_i^S(A)g_j^S(A), \quad j \in \bar{S},$$

则称 A 是 S-Nekrasov 型矩阵, 其中

$$g_n^S(A) = \sum_{j \neq n, j \in S} |a_{nj}|, \quad g_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1, j \in S}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} g_j^S(A), \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

注 1: 若 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, 满足对于 $i \in N$, $|a_{ii}| > g_i(A)$, 则称 A 为 Nekrasov 型矩阵。显然 SDD 矩阵和 Nekrasov 型矩阵均为是 S-Nekrasov 型矩阵。

3.1. Nekrasov 型矩阵和 SDD 矩阵的 1-子直和

定理 1 假定 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 分别形如(1)中的 n_1 和 n_2 阶的分块矩阵。设 $S_1 = \{1, \dots, n_1 - 1\}$, $S_2 = \{n_1\}$,

$S_3 = \{n_1+1, \dots, n\}$, 其中 $n = n_1 + n_2 - 1$. 设 A 是 SDD 矩阵, B 是 Nekrasov 型矩阵, 如果 A_{22} 和 B_{11} 的对角元素均为正或均为负, 那么 A 和 B 的 1-子直和 $C = A \oplus_1 B$ 是 Nekrasov 型矩阵.

证明: 令 $t = n_1 - 1$, 下面分三种情形进行证明:

情形一: 当 $i \in S_3$ 时,

$$g_i(C) = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{i-t, j-t}| + \sum_{j=i+1}^n |b_{i-t, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} = g_{i-t}(B) < |b_{i-t, i-t}| = |c_{ii}|.$$

情形二: 当 $i \in S_2 = \{n_1\}$ 时,

$$\begin{aligned} g_{n_1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-1} |c_{n_1, j}| + \sum_{j=n_1+1}^n |c_{n_1, j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{n_1-1} |a_{n_1, j}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{1, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} \\ &< r_{n_1}(A) + g_1(B) < |a_{n_1, n_1}| + |b_{11}| = |c_{n_1 n_1}|. \end{aligned}$$

情形三: 当 $i \in S_1$ 时,

$$\begin{aligned} g_{n_1-1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-2} |c_{n_1-1, j}| + \sum_{j=n_1}^n |c_{n_1-1, j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1, j}| + |a_{n_1-1, n_1}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} \\ &< \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1, j}| + |a_{n_1-1, n_1}| < r_{n_1-1}(A) < |a_{n_1-1, n_1-1}| = |c_{n_1-1, n_1-1}|, \\ g_{n_1-2}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-3} |c_{n_1-2, j}| + \sum_{j=n_1-1}^n |c_{n_1-2, j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{n_1-3} |a_{n_1-2, j}| + \sum_{j=n_1-1}^{n_1} |a_{n_1-2, j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &< \sum_{j=1}^{n_1-3} |a_{n_1-2, j}| + \sum_{j=n_1-1}^{n_1} |a_{n_1-2, j}| = r_{n_1-2}(A) < |a_{n_1-2, n_1-2}| = |c_{n_1-2, n_1-2}|. \end{aligned}$$

类似地, 利用递推方式, 对于 $i = n_1 - 3, \dots, 1$, 有

$$g_i(C) = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} < r_i(A) < |a_{ii}| = |c_{ii}|$$

综上, A 和 B 的 1-子直和是 Nekrasov 型矩阵.

例 1 考虑下列矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

容易验证, 矩阵 A 是 SDD 矩阵, 矩阵 B 是 Nekrasov 型矩阵. 由定理 1 可知, $C = A \oplus_1 B$ 是 Nekrasov 型矩阵. 实际上, 1-子直和 $C = A \oplus_1 B$ 是

$$C = A \oplus_1 B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$g_5(C) = 3, \quad g_4(C) = 2.5, \quad g_3(C) = 9, \quad g_2(C) = 6.75, \quad g_1(C) = 4.875.$$

由 Nekrasov 型矩阵定义可知, 矩阵 C 是 Nekrasov 型矩阵。

定理 2 假定 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 分别形如(1)中的 n_1 和 n_2 阶的分块矩阵。设 $S_1=\{1,\cdots,n_1-1\}$, $S_2=\{n_1\}$, $S_3=\{n_1+1,\cdots,n\}$, 其中 $n=n_1+n_2-1$ 。设 A 是 Nekrasov 型矩阵, B 是 SDD 矩阵, 如果 A_{22} 和 B_{11} 的对角元素均为正或均为负, 且

$$r_1(B)|a_{n_1,n_1}|<g_{n_1}(A)|b_{11}|,$$

那么 A 和 B 的 1-子直和 $C=A\oplus_1 B$ 是 Nekrasov 型矩阵。

证明: 下面分两种情形完成证明:

情形一: 当 $i\in S_3\cup S_2$ 时, 类似于定理 1 中情形一和情形二的证明, 有

$$g_i(C)<|c_{ii}|.$$

情形二: 当 $i\in S_1$ 时, 对于 $i=n_1-1$ 有

$$\begin{aligned} g_{n_1-1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-2} |c_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1}^n |c_{n_1-1,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1,n_1}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(A)+r_1(B)}{|a_{n_1,n_1}|+|b_{11}|} \\ &< \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(A)+g_{n_1}(A) \frac{|b_{11}|}{|a_{n_1,n_1}|}}{|a_{n_1,n_1}|+|b_{11}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|} \\ &= g_{n_1-1}(A) < |a_{n_1-1,n_1-1}| = |c_{n_1-1,n_1-1}|. \end{aligned}$$

对于 $i=n_1-2$ 有

$$\begin{aligned} g_{n_1-2}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-3} |c_{n_1-2,j}| + \sum_{j=n_1-1}^n |c_{n_1-2,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{n_1-3} |a_{n_1-2,j}| + \sum_{j=n_1-1}^{n_1} |a_{n_1-2,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-3} |a_{n_1-2,j}| + |a_{n_1-2,n_1-1}| \frac{g_{n_1-1}(C)}{|c_{n_1-1,n_1-1}|} + |a_{n_1-2,n_1}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1,n_1}|} \\ &< \sum_{j=1}^{n_1-3} |a_{n_1-2,j}| + |a_{n_1-2,n_1-1}| \frac{g_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1,n_1-1}|} + |a_{n_1-2,n_1}| \frac{g_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|} \\ &= g_{n_1-2}(A) < |a_{n_1-2,n_1-2}| = |c_{n_1-2,n_1-2}|. \end{aligned}$$

类似地, 对于 $i\in\{n_1-3,\cdots,1\}$ 有

$$\begin{aligned} g_i(C) &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &< \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(A)}{|a_{jj}|} = g_i(A) < |a_{ii}| = |c_{ii}|. \end{aligned}$$

综上, A 和 B 的 1-子直和是 Nekrasov 型矩阵。

例 2 考虑下列矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

容易验证, A 是 Nekrasov 型矩阵, B 是 SDD 矩阵, 且满足定理 2 的条件。根据定理 2 知, $C = A \oplus_1 B$ 是 Nekrasov 型矩阵。实际上, A 和 B 的 1-子直和为

$$C = A \oplus_1 B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

计算得 $g_5(C)=3$, $g_4(C)=3.75$, $g_3(C)=7.75$, $g_2(C)=3.9375$, $g_1(C)=3.6542$ 。由 Nekrasov 型矩阵定义可知, 矩阵 A 和矩阵 B 的 1-子直和 C 是 Nekrasov 型矩阵。

3.2. Nekrasov 型矩阵和 SDD 矩阵的 k -子直和

定理 3 假设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 分别是形如(1)中的 n_1 和 n_2 阶的分块矩阵。设 $S_1=\{1, \dots, n_1-k\}$, $S_2=\{n_1-k+1, \dots, n_1\}$, $S_3=\{n_1+1, \dots, n\}$, 其中 $n=n_1+n_2-k$ 。 A 是 SDD 矩阵, B 是 Nekrasov 型矩阵, 如果 A_{22} 和 B_{11} 的对角元素均为正或均为负, 且

$$r_j(A)|b_{j-t, j-t}| < g_{j-t}(B)|a_{jj}|, j \in \{n_1-k+2, \dots, n_1\}$$

那么 A 和 B 的 k -子直和 $C = A \oplus_k B$ 是 Nekrasov 型矩阵。

证明: 下面分三种情形完成证明:

情形一: 当 $i \in S_3$ 时,

$$\begin{aligned} g_i(C) &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=n_1+1}^{i-1} |b_{i-t, j-t}| + \sum_{j=i+1}^n |b_{i-t, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} \\ &= g_{i-t}(B) < |b_{i-t, i-t}| = |c_{ii}|. \end{aligned}$$

情形二: 当 $i \in S_2$ 时

对于 $i = n_1$ 有

$$\begin{aligned} g_{n_1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-1} |c_{n_1j}| + \sum_{j=n_1+1}^n |c_{n_1j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |c_{n_1j}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-t, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |a_{n_1j} + b_{k, j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-t, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |a_{n_1j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |b_{k, j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-t, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} \\ &= r_{n_1}(A) + g_k(B) < |a_{n_1n_1}| + |b_{kk}| = |c_{n_1n_1}|. \end{aligned}$$

对于 $i = n_1 - 1$ 有

$$\begin{aligned}
g_{n_1-1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-2} |c_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1}^n |c_{n_1-1,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |c_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |c_{n_1-1,j}| + |c_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |c_{n_1-1,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j} + b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1} + b_{k-1,k}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + |b_{k-1,k}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| + |b_{k-1,k}| \frac{g_k(B) + r_{n_1}(A)}{|a_{n_1 n_1}| + |b_{kk}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| \\
&\quad + |b_{k-1,k}| \frac{g_k(B) + g_k(B) \frac{|a_{n_1 n_1}|}{|b_{kk}|}}{|a_{n_1 n_1}| + |b_{kk}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| + |b_{k-1,k}| \frac{g_k(B)}{|b_{kk}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&= r_{n_1-1}(A) + g_{k-1}(B) < |a_{n_1-1,n_1-1}| + |b_{k-1,k-1}| = |c_{n_1-1,n_1-1}|.
\end{aligned}$$

类似地, 对于 $i \in \{n_1-2, n_1-3, \dots, n_1-k+1\}$ 有

$$\begin{aligned}
g_i(C) &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |c_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij} + b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij} + b_{i-t,j-t}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B) + r_j(A)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B) + g_{j-t}(B) \frac{|a_{jj}|}{|b_{j-t,j-t}|}}{|a_{jj}| + |b_{j-t,j-t}|} \\
&\quad + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|}
\end{aligned}$$

$$= r_i(A) + g_{i-t}(B) < |a_{ii}| + |b_{i-t, i-t}| = |c_{ii}|.$$

情形三：当 $i \in S_1$ 时，对于 $i = n_1 - k$ 有

$$\begin{aligned} g_{n_1-k}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |c_{n_1-k, j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^n |c_{n_1-k, j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |a_{n_1-k, j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{n_1-k, j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |a_{n_1-k, j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{n_1-k, j}| \\ &= r_{n_1-k}(A) < |a_{n_1-k, n_1-k}| = |c_{n_1-k, n_1-k}|. \end{aligned}$$

类似地，对于 $i \in \{n_1 - k - 1, \dots, 1\}$ 有

$$g_i(C) = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} < r_i(A) < |a_{ii}| = |c_{ii}|.$$

综上，矩阵 A 和矩阵 B 的 k -子直和是 Nekrasov 型矩阵。

例 3 考虑下列矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

容易验证 A 是 SDD 矩阵， B 是 Nekrasov 型矩阵，且满足定理 3 的条件。由定理 3 可知， $C = A \oplus_3 B$ 是 Nekrasov 型矩阵。实际上， $C = A \oplus_3 B$ 是

$$C = A \oplus_3 B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 14 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

计算得 $g_5(C) = 5$, $g_4(C) = 9.6667$, $g_3(C) = 11.8889$, $g_2(C) = 11.5397$, $g_1(C) = 4.1276$ 。根据 Nekrasov 型矩阵的定义可知，矩阵 C 是 Nekrasov 型矩阵。

定理 4 假设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 分别是形如(1)中的 n_1 和 n_2 阶的分块矩阵。设 $S_1 = \{1, \dots, n_1 - k\}$, $S_2 = \{n_1 - k + 1, \dots, n_1\}$, $S_3 = \{n_1 + 1, \dots, n\}$, 其中 $n = n_1 + n_2 - k$ 。设 A 是 Nekrasov 型矩阵， B 是 SDD 矩阵，如果 A_{22} 和 B_{11} 的对角元素均为正或均为负，且下列条件成立：

$$r_{j-t}(B) |a_{jj}| < g_j(A) |b_{j-t, j-t}|, \quad j \in S_2,$$

那么 A 和 B 的 k -子直和 $C = A \oplus_k B$ 是 Nekrasov 型矩阵。

证明：下面分三种情形完成证明：

情形一：当 $i \in S_3$ 时，

$$\begin{aligned} g_i(C) &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} = \sum_{j=n_1+1}^{i-1} |b_{i-t, j-t}| + \sum_{j=i+1}^n |b_{i-t, j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t, j-t}|} \\ &\leq r_{i-t}(B) < |b_{i-t, i-t}| = |c_{ii}|. \end{aligned}$$

情形二：当 $i \in S_2$ 时，

对于 $i = n_1$ 有

$$\begin{aligned} g_{n_1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-1} |c_{n_1,j}| + \sum_{j=n_1+1}^n |c_{n_1,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |a_{n_1,j} + b_{k,j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-1} |b_{k,j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\ &\leq g_{n_1}(A) + r_k(B) < |a_{n_1 n_1}| + |b_{kk}| = |c_{n_1 n_1}|. \end{aligned}$$

对于 $i = n_1 - 1$ ，由已知条件得

$$\begin{aligned} g_{n_1-1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-2} |c_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1}^n |c_{n_1-1,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j} + b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1} + b_{k-1,k}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + |b_{k-1,k}| \frac{g_{n_1}(C)}{|c_{n_1 n_1}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(A) + r_k(B)}{|a_{n_1 n_1}| + |b_{kk}|} + |b_{k-1,k}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(A) + g_{n_1}(A) \frac{|b_{kk}|}{|a_{n_1 n_1}|}}{|a_{n_1 n_1}| + |b_{kk}|} + |b_{k-1,k}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-2} |b_{k-1,j-t}| + |a_{n_1-1,n_1}| \frac{g_{n_1}(A)}{|a_{n_1 n_1}|} + |b_{k-1,k}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{n_1-1-t,j-t}| \\ &= g_{n_1-1}(A) + r_{k-1}(B) < |a_{n_1-1,n_1-1}| + |b_{k-1,k-1}| = |c_{n_1-1,n_1-1}|. \end{aligned}$$

对于 $i \in \{n_1 - k + 1, \dots, n_1 - 2\}$ ，由已知条件得

$$\begin{aligned} g_i(C) &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij} + b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij} + b_{i-t,j-t}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \frac{g_{j-t}(B)}{|b_{j-t,j-t}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(A) + r_{j-t}(B)}{|a_{jj}| + |b_{j-t,j-t}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(A) + g_j(A) \frac{|b_{j-t,j-t}|}{|a_{jj}|}}{|a_{jj}| + |b_{j-t,j-t}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{i-1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |b_{i-t,j-t}| + \sum_{j=n_1+1}^n |b_{i-t,j-t}| \\
&= g_i(A) + r_{i-t}(B) < |a_{ii}| + |b_{i-t,i-t}| = |c_{ii}|.
\end{aligned}$$

情形三：当 $i \in S_1$ 时，对于 $i = n_1 - k$ 有

$$\begin{aligned}
g_{n_1-k}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |c_{n_1-k,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^n |c_{n_1-k,j}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |a_{n_1-k,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{n_1-k,j}| \frac{g_j(C)}{|a_{jj}| + |b_{j-t,j-t}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |a_{n_1-k,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{n_1-k,j}| \frac{g_j(A) + r_{j-t}(B)}{|a_{jj}| + |b_{j-t,j-t}|} \\
&< \sum_{j=1}^{n_1-k-1} |a_{n_1-k,j}| + \sum_{j=n_1-k+1}^n |a_{n_1-k,j}| \frac{g_j(A)}{|a_{jj}|} \\
&= g_{n_1-k}(A) < |a_{n_1-k,n_1-k}| = |c_{n_1-k,n_1-k}|.
\end{aligned}$$

对于 $i \in \{n_1 - k - 1, \dots, 1\}$ 有

$$\begin{aligned}
g_i(C) &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1-k} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1-k} |a_{ij}| \frac{g_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(A) + r_{j-t}(B)}{|a_{jj}| + |b_{j-t,j-t}|} \\
&< \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n_1-k} |a_{ij}| \frac{g_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1} |a_{ij}| \frac{g_j(A)}{|a_{jj}|} \\
&= g_i(A) < |a_{ii}| = |c_{ii}|.
\end{aligned}$$

综上，矩阵 A 和矩阵 B 的 k -子直和是 Nekrasov 型矩阵。

例 4 考虑下列矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

容易验证 A 是 Nekrasov 型矩阵， B 是 SDD 矩阵，且满足定理 4 的条件。由定理 4 可知， $C = A \oplus_3 B$ 是 Nekrasov 型矩阵。实际上，3-子直和 $C = A \oplus_3 B$ 是

$$C = A \oplus_3 B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 16 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

计算得 $g_5(C)=5$, $g_4(C)=9.8333$, $g_3(C)=12.7778$, $g_2(C)=7.6667$, $g_1(C)=2.3150$ 。根据 Nekrasov 型矩阵的定义可知矩阵 C 是 Nekrasov 型矩阵。

4. 结论

本文给出了一些充分条件使得当 A 为 Nekrasov 型矩阵, B 为 SDD 矩阵时, 它们的 1-子直和为 Nekrasov 型矩阵; 当 A 为 SDD 矩阵, B 为 Nekrasov 型矩阵时, 它们的 1-子直和为 Nekrasov 型矩阵; 当 A 为 Nekrasov 型矩阵, B 为 SDD 型矩阵时, 它们的 k -子直和为 Nekrasov 型矩阵; 当 A 为 SDD 矩阵, B 为 Nekrasov 型矩阵时, 它们的 k -子直和为 Nekrasov 型矩阵。本文仅研究了 SDD 矩阵和 Nekrasov 型矩阵以及 Nekrasov 型矩阵和 SDD 矩阵的子直和问题, 未来可以研究 Nekrasov 型矩阵和 Nekrasov 型矩阵的子直和。此外, 还可研究一般的 S-Nekrasov 型矩阵的子直和问题。

参考文献

- [1] Fallat, S.M. and Johnson, C.R. (1999) Sub-Direct Sums and Positivity Classes of Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **288**, 149-173. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(98\)10194-5](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(98)10194-5)
- [2] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D. (2005) Subdirect Sums of Nonsingular M-Matrices and of Their Inverses. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **13**, 162-174. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1159>
- [3] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2005) Additive Schwarz Iterations for Markov Chains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**, 445-458. <https://doi.org/10.1137/040616541>
- [4] Frommer, A. and Szyld, D.B. (1999) Weighted Max Norms, Splittings, and Overlapping Additive Schwarz Iterations. *Numerische Mathematik*, **83**, 259-278. <https://doi.org/10.1007/s002110050449>
- [5] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D. (2006) Subdirect Sums of S-Strictly Diagonally Dominant Matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **15**, 201-209. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1230>
- [6] Bru, R., Cvetković, L., Kostić, V. and Pedroche, F. (2010) Sums of Σ -Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **58**, 75-78. <https://doi.org/10.1080/03081080802379725>
- [7] Zhu, Y. and Huang, T. (2007) Subdirect Sums of Doubly Diagonally Dominant Matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **16**, 171-182. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1192>
- [8] Bru, R., Cvetković, L., Kostić, V. and Pedroche, F. (2010) Characterization of α_1 and α_2 -Matrices. *Open Mathematics*, **8**, 32-40. <https://doi.org/10.2478/s11533-009-0068-6>
- [9] Zhu, Y., Huang, T.Z. and Liu, J. (2009) Subdirect Sums of H-Matrices. *International Journal of Nonlinear Science*, **8**, 50-58.
- [10] Mendes Araújo, C. and Torregrosa, J.R. (2014) Some Results on B-Matrices and Doubly B-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **459**, 101-120. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.048>
- [11] Li, C., Liu, Q., Gao, L. and Li, Y. (2015) Subdirect Sums of Nekrasov Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 208-218. <https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1032198>
- [12] Li, C., Ma, R., Liu, Q. and Li, Y. (2016) Subdirect Sums of Weakly Chained Diagonally Dominant Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **65**, 1220-1231. <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1233933>
- [13] Gao, L., Huang, H. and Li, C. (2018) Subdirect Sums of QN-Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **68**, 1605-1623. <https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1551323>
- [14] 戴平凡, 潘攀. Dashnic-Zusmanovich 型矩阵的子直和[J]. 工程数学学报, 2022, 39(6): 979-996.
- [15] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971262>
- [16] Gao, L., Li, T.Y. and Ma, Q.Y. (2025) Infinity Norm Bounds for the Inverse of S-Nekrasov Type Matrices and Their Applications. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Submitted.