

基于 l_∞ -模的Hankel张量补全的保结构加速邻近梯度算法

高欣¹, 贾宏恩¹, 闫喜红^{2*}, 王泽馨³

¹太原理工大学数学学院, 山西 晋中

²太原师范学院数学与统计学院, 智能优化计算与区块链技术山西省重点实验室, 山西 晋中

³山西大学自动化与软件学院, 山西 太原

收稿日期: 2025年3月22日; 录用日期: 2025年4月15日; 发布日期: 2025年4月24日

摘要

加速邻近梯度算法是求解张量补全问题的经典方法之一, 但将该算法应用到Hankel结构张量补全时, 无法保证补全的张量能够保持Hankel结构。因此, 本文基于加速邻近梯度算法的框架, 提出了一种保Hankel结构的加速邻近梯度算法。该算法在每次迭代中利用 l_∞ -模投影算子生成Hankel结构张量。在理论上, 本文证明了新算法在合理假设条件下的收敛性。最后, 通过随机Hankel张量补全与图像修复实例的数值实验验证了新算法的有效性。

关键词

Hankel张量, 张量补全, 加速邻近梯度算法, 保结构, l_∞ -模

Structure-Preserving Accelerated Proximal Gradient Algorithm Based on l_∞ -Norm for Hankel Tensor Completion

Xin Gao¹, Hongen Jia¹, Xihong Yan^{2*}, Zexin Wang³

¹School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

²Shanxi Key Laboratory for Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

³School of Automation and Software Engineering, Shanxi University, Taiyuan Shanxi

Received: Mar. 22nd, 2025; accepted: Apr. 15th, 2025; published: Apr. 24th, 2025

*通讯作者。

文章引用: 高欣, 贾宏恩, 闫喜红, 王泽馨. 基于 l_∞ -模的Hankel张量补全的保结构加速邻近梯度算法[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 675-687. DOI: 10.12677/aam.2025.144196

Abstract

The accelerated proximal gradient algorithm is one of the classic methods for solving tensor completion problems. However, when applied to Hankel structured tensor completion, it cannot guarantee that the completed tensor can maintain the Hankel structure. Therefore, based on the framework of the accelerated proximal gradient algorithm, this paper proposes a new accelerated proximal gradient algorithm that can preserve the Hankel structure. In each iteration of the algorithm, utilizing the l_∞ -norm projection and the fast singular value thresholding method ensures that the generated tensor preserves the Hankel structure. Moreover, this paper proves the convergence of the new algorithm under reasonable assumptions. Finally, the effectiveness of the new algorithm is verified through numerical experiments of random Hankel tensor completion and image restoration examples.

Keywords

Hankel Tensor, Tensor Completion, Accelerated Proximal Gradient Algorithm, Structure-Preserving, l_∞ -Norm

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

张量补全是指从存在数据缺失的张量中补全出原始张量。目前, 张量补全已经广泛应用于图像恢复[1]、数据挖掘[2]、信号处理[3]及机器学习[4]等领域, 其数学模型为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{A}} \quad & \text{rank}(\mathcal{A}), \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{T}). \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 为待补全张量, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 为采样张量, $\text{rank}(\mathcal{A})$ 是张量 $\mathcal{A}$ 的某种秩, Ω 为基数为 m 的采样元素指标集, $\mathcal{P}$ 是集合 Ω 上的正交投影, 即:

$$\mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \mathcal{T}(i_1 i_2 \cdots i_N), & \text{if } (i_1, i_2, \cdots, i_N) \in \Omega, \\ 0, & \text{if } (i_1, i_2, \cdots, i_N) \notin \Omega. \end{cases}$$

张量补全中, 常用的张量秩有 CP 秩[5]、Tucker 秩[6]、张量火车(TT)秩[7]、张量环(TR)秩[8], 本文仅研究 Tucker 秩张量补全问题。Liu 等人[9]给出了基于 Tucker 秩的核范数最小化凸优化补全模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{A}} \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathcal{A}_{(i)}\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{T}). \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 表示矩阵的核范数, $\mathcal{A}_{(i)}$ 表示张量 $\mathcal{A}$ 的模- i 展开矩阵, $\alpha_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ 。为了求解模型(2), Wang

等人[10]提出了张量补全的加速随机邻近梯度算法; Liu [9]等人提出了三种有效算法: 简单低秩张量补全算法(SiLRTC)、快速低秩张量补全算法(FaLRTC)以及高精度低秩张量补全算法(HaLRTC); Gandy 等人[11]

提出了张量补全的 Douglas-Rachford 分离算法以及交替方向乘子法。

在实际应用中, Hankel 张量因其特殊的结构常应用于数字信号处理[12]、医学成像[13]等领域。由于其广泛的应用背景,一些学者开始对 Hankel 张量的补全问题进行研究。Hankel 张量补全问题在模型(2)的基础上增加了结构的约束,即如下的模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{A}} \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathcal{A}_{(i)}\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{T}), \\ & \mathcal{A} \in \mathcal{H} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mathcal{H}$ 为 Hankel 张量的集合。

目前, Adamo 和 Mazzucchelli [14]针对 Hankel 张量补全提出秩 1 正交追踪法; Trickett 等人[15]针对 Hankel 张量补全提出了交替方向法。但需指出的是,上述所提及的算法在求解模型(3)时,虽然能够对 Hankel 张量进行补全,但是不能保证生成的张量始终保持 Hankel 结构,无法利用 Hankel 快速奇异值分解,同时上述算法的精度较差,运行算法所耗费的时间较长。为此,王川龙等人提出了 Hankel 张量补全的快速算法[16]与均值加速邻近梯度算法[17]。本文受王川龙等人工作的启发,提出了一种保 Hankel 结构的加速邻近梯度算法。该算法基于 l_{∞} -范数投影,从而能够保证迭代过程中生成的张量始终保持 Hankel 结构。相较于 F-模, l_{∞} -模能够在凸优化问题中更高效求解。同时由于张量的 Hankel 结构,在算法中采用了 Hankel 张量的模-s 展开快速奇异值阈值算子,提高了算法效率,减少了奇异值分解所用的时间,并能提高算法的精度。

本文结构安排如下:第 2 节主要总结一些有关张量的预备知识;第 3 节给出一种新的基于 l_{∞} -模的低秩 Hankel 张量补全的保结构加速邻近梯度算法;第 4 节给出了新算法在合理假设条件下的收敛性证明;第 5 节通过随机 Hankel 张量补全以及简单图像修复实例的数值实验验证了算法的有效性;最后,我们给出了本文的总结。

2. 预备知识

本节中,介绍下文所需要的符号说明和基础知识。

为方便起见, $\mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ 表示 $I_1 \times I_2$ 的实矩阵全体。矩阵的核范数和 F 范数分别表示为 $\|\mathbf{A}\|_*$ 和 $\|\mathbf{A}\|_F$ 。矩阵的内积为 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{Y} \rangle = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{Y}) = \sum_{i,j} a_{ij} y_{ij}$ 。 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 表示 n -阶张量,它的元素表示为 $a_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, 其中

$1 \leq i_k \leq I_k, 1 \leq k \leq n$ 。 $\text{unfold}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_{(k)} \in \mathbb{R}^{I_k \times (I_1 \cdots I_{k-1} I_{k+1} \cdots I_n)}$ 表示张量的模- k 展开,其逆定义为

$\text{fold}_k(\mathcal{A}_{(k)}) = \mathcal{A}$ 。张量 $\text{fold}_k(\mathcal{A}_{(k)}) = \mathcal{A}$ 的 Tucker 秩为 $\text{rank}_T(\mathcal{A}) = (\text{rank}(\mathcal{A}_{(1)}), \dots, \text{rank}(\mathcal{A}_{(n)}))$ 。

$\|\mathcal{A}\|_F = \left(\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} |a_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 表示张量的 F 范数, $\langle \mathcal{A}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} y_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 表示张量的内积,张量 $\mathcal{A}$ 的核范

数定义为 $\|\mathcal{A}\|_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathcal{A}_{(i)}\|_*$ 。张量 $\mathcal{A}$ 的 Hankel 化算子定义为 $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$, 其中 Hankel 张量 $\mathcal{S}$ 的元素 $s_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 值为 $\mathcal{A}$ 中与 $s_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 下角标和相等元素的最大值与最小值的平均值。

定义 2.1 (奇异值分解) [18]对于秩为 r 的矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$, 存在矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times r}$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{I_2 \times r}$, 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma_r \mathbf{V}^T.$$

其中 $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$ 分别是左奇异矩阵,右奇异矩阵。 $\mathbf{A}$ 的奇异值分解记为 $[\mathbf{U}, \Sigma_r, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{A})$ 。

定义 2.2 (奇异值阈值算子) [19] 对于任意参数 $\tau \geq 0$, 秩为 r 的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$, 其奇异值分解为 $A = U \Sigma_r V^T$, 则其奇异值阈值算子 $\mathcal{D}_\tau$ 定义为

$$\mathcal{D}_\tau(A) := U \mathcal{D}_\tau(\Sigma_r) V^T,$$

其中

$$\mathcal{D}_\tau(\Sigma_r) = \text{diag}(\{\sigma_i - \tau\}_+, \{\sigma_i - \tau\}_+) = \begin{cases} \sigma_i - \tau, & \text{若 } \sigma_i > \tau, \\ 0, & \text{若 } \sigma_i \leq \tau. \end{cases}$$

定义 2.3 (Hankel 张量) [20] 给定张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$, 若当和 $i_1 + \cdots + i_n$ 保持不变时, 张量 $\mathcal{A}$ 的元素 $a_{i_1 \cdots i_n}$ 也保持不变, 则称 $\mathcal{A}$ 为 Hankel 张量。换句话说, $\mathcal{A}$ 为 Hankel 张量当且仅当存在一个向量

$$l = \left(l_1, l_2, \dots, l_{\sum_{i=1}^n I_i - n + 1} \right) \text{ 使得}$$

$$h_{i_1 \cdots i_n} = l_{\sum_{i=1}^n I_i - n + 1}.$$

显然, 当 $I_1 = I_2 = \cdots = I_n = I$ 时, Hankel 张量为对称张量。

定义 2.4 (Hankel 张量模-s 展开的快速奇异值阈值算子) [16] Hankel 张量模-s 展开的快速奇异值阈值算子可以表示为如下方式

$$D_\tau(A_{(s)}) = D_\tau(H_s D_s) D_s^{-1} B_s.$$

其中 $\mathcal{A}_{(s)} = \text{unfold}_s(\mathcal{A}) = H_s B_s$, $H_s \in \mathbb{R}^{I_s \times J_s}$ 是 $\mathcal{A}^{(s)}$ 移去重复列所得到的矩阵, $J_s = \sum_{s' \neq s} I_{s'} - 1$; B_s 是由 $d_k^{(s)}$ 个向量所组成的矩阵, 其中 $e_k \in \mathbb{R}^{I_s}$ 是第 k 个单位向量, $d_k^{(s)}$ 表示 H_s 第 k 列的出现次数, 且 $k \in \left\{ 1, 2, \dots, \sum_{s' \neq s} I_{s'} - 1 \right\}$; $D_s = \text{diag}(\sqrt{d_{(s)}^1} \cdots \sqrt{d_{(s)}^{J_s}})$ 。

定理 2.1 (Jensen 不等式) [21] 对于任意点集 $\{x_i\}$, 若 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则对凸函数 $f(x)$ 满足如下不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

该不等式被称为 Jensen 不等式。

引理 2.1 [22] 设任意向量 $\beta = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, 选取向量 $\alpha = (y, y, \dots, y)$, 使得

$$\min_{\alpha} \|\alpha - \beta\|_{\infty} = \min_y \max_{1 \leq i \leq m} |y - x_i|,$$

则

$$y = \frac{1}{2} (\min_{1 \leq i \leq m} x_i + \max_{1 \leq i \leq m} x_i).$$

由以上引理可知, 给定一组向量 $\beta = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, 则

$$\alpha \left(\frac{1}{2} (\min_{1 \leq i \leq m} x_i + \max_{1 \leq i \leq m} x_i), \dots, \frac{1}{2} (\min_{1 \leq i \leq m} x_i + \max_{1 \leq i \leq m} x_i) \right)$$

是所给向量 β 在 l_{∞} 下的投影。

3. 基于 l_∞ -模的 Hankel 张量补全的保结构加速邻近梯度法

本节正式提出一种新的基于 l_∞ -模的低秩 Hankel 张量补全的保结构加速邻近梯度算法。首先, 为了更好地求解模型(3), 用以下无约束优化问题近似原问题:

$$\min_{\mathcal{A} \in \mathcal{H}} F(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(\mathcal{A}, \mu). \quad (4)$$

其中 $f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{T})\|_F^2$, $g_i(\mathcal{A}, \mu) = \mu \|\mathcal{A}_{(i)}\|_*$, μ 为罚函数, $\mathcal{H}$ 表示 Hankel 张量的集合。

对于任意的 $\mathcal{Y} \in \left\{ \mathcal{A} \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(\mathcal{A}, \mu) < \infty \right\}$, 用 $f(\mathcal{Y})$ 在 $\mathcal{Y}$ 处的二阶展开式近似 $f(\mathcal{Y})$, 则 $F(\mathcal{A})$ 的近似函数可表示为

$$\begin{aligned} Q_\tau(\mathcal{A}, \mathcal{Y}) &= f(\mathcal{Y}) + \langle \nabla f(\mathcal{Y}), \mathcal{A} - \mathcal{Y} \rangle + \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A} - \mathcal{Y}\|_F^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(\mathcal{A}, \mu) \\ &= \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A} - \mathcal{G}\|_F^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(\mathcal{A}, \mu) + f(\mathcal{Y}) - \frac{1}{2\tau} \|\nabla f(\mathcal{Y})\|_F^2, \end{aligned}$$

此处 $\mathcal{G} = \mathcal{Y} - \tau^{-1} \nabla f(\mathcal{Y})$, $\nabla f(\mathcal{Y}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{T})$ 。

我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i &= \arg \min_{\mathcal{A}} \alpha_i f(\mathcal{Y}) + \alpha_i \langle \nabla f(\mathcal{Y}), \mathcal{A} - \mathcal{Y} \rangle + \frac{\tau}{2} \alpha_i \|\mathcal{A} - \mathcal{Y}\|_F^2 + \alpha_i \mu \|\mathcal{A}_{(i)}\|_* \\ &= \arg \min_{\mathcal{A}} \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}_{(i)} - \mathcal{G}_{(i)}\|_F^2 + \mu \|\mathcal{A}_{(i)}\|_* \\ &= \text{fold}_i \left(\mathcal{D}_{\frac{\mu}{\tau}}(\mathcal{G}_{(i)}) \right), i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

根据上述讨论, 新算法通过迭代求解 $Q_\tau(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ 的极小值点, 从而逐步逼近 $F(\mathcal{A})$ 的极小值点。在每个迭代步骤中, 对子问题的解进行 Hankel 化处理。具体步骤如下:

算法 1 基于 l_∞ -模的 Hankel 张量补全的保结构加速邻近梯度法(HAPG)

步骤 1 给定 $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^{-1} = 0$, $t_0 = t_1 = 1$, μ_0 , η , ε , $\tau = n$, $k = 0$;

步骤 2 令 $t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2}$, $\mathcal{Y}^{k+1} = \mathcal{A}^k + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} (\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k-1})$;

步骤 3 令 $\mathcal{G}^{k+1} = \mathcal{Y}^{k+1} - \tau^{-1} \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1})$;

步骤 4 计算

for $i = 1: n$

do

$$\begin{aligned} \left[U_i^{k+1}, \sum_i^{k+1} V_i^{k+1} \right] &= \text{svd}(\text{unfold}_i(G^{k+1})), \\ W_i^{k+1} &= \text{fold}_i \left(U_i^{k+1} \mathcal{D}_{\frac{\mu_k}{\tau}} \left(\sum_i^{k+1} (V_i^{k+1})^T \right) \right). \end{aligned}$$

end for

步骤 5 令

$$\bar{\mathcal{A}}^{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1},$$

$$\mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{E}(\bar{\mathcal{A}}^{k+1}).$$

步骤 6 若 $\|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{A}^k\|_F / \|\mathcal{A}^k\|_F < \varepsilon$, 停止迭代; 否则, 转第 7 步;

步骤 7 计算 $\mu_{k+1} = \eta \mu_k$, $k = k+1$, 转第 2 步。

注: 步骤 5 中的 $\mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{E}(\bar{\mathcal{A}}^{k+1})$ 的计算如下:

设 $\bar{\mathcal{A}}^{k+1}$ 的元素表示为 $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$,

$$\mathcal{R}_l = (r_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \begin{cases} 1, & \sum_{m=1}^n i_m - n + 1 = l, \\ 0, & \sum_{m=1}^n i_m - n + 1 \neq l, \end{cases} \quad l \in \left\{1, 2, \dots, \sum_{t=1}^n I_t - n + 1\right\},$$

则

$$\mathcal{E}(\bar{\mathcal{A}}^{k+1}) = \sum_{l \in \left\{1, 2, \dots, \sum_{t=1}^n I_t - n + 1\right\}} a_l \mathcal{R}_l,$$

其中令 $S_l = \left\{a_{i_1 i_2 \dots i_m} \mid \sum_{m=1}^n i_m = l + n - 1\right\}$, $a_l = \frac{1}{2}(\max(S_l) + \min(S_l))$ 。

由此可知, $\mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{E}(\bar{\mathcal{A}}^{k+1})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}^{k+1}$ 在 l_∞ 下的投影。

4. 收敛性分析

在本节中, 我们给出新算法的收敛性分析。

引理 4.1 [23] 根据算法 1 中的步骤 4, 存在 $\gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) \in \partial g_i(\mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k)$, 使得如下最优性条件成立:

$$\nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \tau(\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}) + \mu_k \gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

引理 4.2 对任意的 $\tau \geq 1$, 有如下不等式成立:

$$F(\mathcal{A}) \leq \mathcal{Q}_\tau(\mathcal{A}, \mathcal{Y}).$$

证明 由 $f(\mathcal{A})$ 定义有

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{T})\|_F^2, \\ f(\mathcal{Y}) &= \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{T})\|_F^2. \end{aligned}$$

因此可推得,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A}) &= f(\mathcal{Y} + (\mathcal{A} - \mathcal{Y})) \\ &= \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y} + (\mathcal{A} - \mathcal{Y})) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{T})\|_F^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y} - \mathcal{T}) + \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A} - \mathcal{Y})\|_F^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y} - \mathcal{T})\|_F^2 + 2 \langle \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y} - \mathcal{T}), \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A} - \mathcal{Y}) \rangle + \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A} - \mathcal{Y})\|_F^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(2f(\mathcal{Y}) + 2 \langle \nabla f(\mathcal{Y}), \mathcal{A} - \mathcal{Y} \rangle + \|\mathcal{A} - \mathcal{Y}\|_F^2 \right) \\ &\leq f(\mathcal{Y}) + \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A} - \mathcal{Y}\|_F^2 + \langle \nabla f(\mathcal{Y}), \mathcal{A} - \mathcal{Y} \rangle. \end{aligned}$$

不等式两边同时加 $\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(\mathcal{A}, \mu)$, 则可得

$$F(\mathcal{A}) \leq Q_\tau(\mathcal{A}, \mathcal{Y}).$$

证毕。

假设 4.1 对于算法 1 中生成的张量序列 $\{\mathcal{W}_i^{k+1}, \mathcal{A}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1}\}$, 假设有以下不等式成立:

$$(i) \quad Q_\tau(\mathcal{A}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \langle \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}), \mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \rangle + \frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + g_i(\mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k) \right].$$

$$(ii) \quad \|\bar{\mathcal{A}}^{k+1}\|_F^2 \geq \|\mathcal{A}^{k+1}\|_F^2$$

(iii) 对任意的 Hankel 张量 $\mathcal{Y}$, 有 $\langle \mathcal{A}^{k+1} - \bar{\mathcal{A}}^{k+1}, \mathcal{Y} \rangle \geq 0$ 。

引理 4.3 序列 $\{\mathcal{A}^k, \mathcal{Y}^k\}$ 由算法 1 生成, $\mathcal{A}^*$ 为最优解。若有假设 4.1 成立, 则有

$$F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^{k+1}) \geq \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^k, \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \rangle,$$

$$F(\mathcal{A}^*) - F(\mathcal{A}^{k+1}) \geq \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \rangle.$$

证明 由引理 4.2 可得

$$F(\mathcal{A}^{k+1}) \leq Q_\tau(\mathcal{A}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1}). \quad (5)$$

又由于 $f(\mathcal{A}), g_i(\mathcal{A}, \mu_k)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 的凸函数, 则有

$$f(\mathcal{A}^k) \geq f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}) \rangle; \quad (6)$$

$$g_i(\mathcal{A}^k, \mu_k) \geq g_i(\mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k) + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k \gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) \rangle, \quad (7)$$

$$\gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) \in \partial g_i(\mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

根据(6) (7)式可得

$$\begin{aligned} F(\mathcal{A}^k) &= f(\mathcal{A}^k) + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(\mathcal{A}^k, \mu_k) \\ &\geq f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[g_i(\mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k) + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k \gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

根据(5) (8)式及假设 4.1 中(i)可得

$$\begin{aligned} &F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^{k+1}) \\ &\geq F(\mathcal{A}^k) - Q_\tau(\mathcal{A}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1}) \\ &\geq F(\mathcal{A}^k) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \langle \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}), \mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \rangle + \frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + g_i(\mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k) \right] \\ &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(-\frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{W}_i^{k+1}, \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}) \rangle + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{W}_i^{k+1}, \mu_k \gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(-\frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{W}_i^{k+1}, \nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \mu_k \gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) \rangle \right). \end{aligned}$$

由引理 4.1 整理可得

$$\nabla f(\mathcal{Y}^{k+1}) + \mu_k \gamma_i(\mathcal{W}_i^{k+1}) = \tau(\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1}).$$

从而可知

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(-\frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{W}_i^{k+1}, \tau(\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1}) \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(-\frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1} \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1} \rangle \right). \end{aligned}$$

由凸函数的性质及 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1} \rangle \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\tau}{2} \|\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau \langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1} \rangle \\ & \geq \frac{\tau}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}) \right\|_F^2 + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{W}_i^{k+1}) \right\rangle \\ & = \frac{\tau}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \right\|_F^2 + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle. \end{aligned}$$

又因为 $\mathcal{A}^k$ 与 $\mathcal{Y}^{k+1}$ 均为 Hankel 张量, 由假设 4.1 中的(ii)式与(iii)式即得

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\|_F^2 \geq \|\mathcal{A}^{k+1}\|_F^2, \\ & \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{A}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

结合上述两个不等式, 我们推得

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^{k+1}) \\ & \geq \frac{\tau}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \right\|_F^2 + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle \\ & = \frac{\tau}{2} \left(\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\|_F^2 - 2 \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} \right\rangle + \|\mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 \right) + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle \\ & \geq \frac{\tau}{2} \left(\|\mathcal{A}^{k+1}\|_F^2 - 2 \langle \mathcal{A}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} \rangle + \|\mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 \right) + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle \\ & = \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle \\ & = \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^{k+1} \right\rangle + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{A}^{k+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{W}_i^{k+1} \right\rangle \\ & \geq \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \left\langle \mathcal{A}^k - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^{k+1} \right\rangle. \end{aligned}$$

类似地我们可以证明

$$F(\mathcal{A}^*) - F(\mathcal{A}^{k+1}) \geq \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \rangle.$$

引理 4.4 $\{\mathcal{A}^k, \mathcal{Y}^k\}$ 是由算法 1 生成的序列, 则有:

$$2\tau^{-1}t_k^2 m_k - 2\tau^{-1}t_{k+1}^2 m_{k+1} \geq \|n_{k+1}\|_F^2 - \|n_k\|_F^2.$$

其中 $m_k = F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^*)$, $n_k = t_k \mathcal{A}^k - (t_{k-1} - 1) \mathcal{A}^{k-1} - \mathcal{A}^*$ 。

证明 根据引理 4.3 有

$$2\tau^{-1}(m_k - m_{k+1}) \geq \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + 2\langle \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^{k+1} \rangle, \quad (9)$$

$$-2\tau^{-1}m_{k+1} \geq \|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2 + 2\langle \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{A}^* \rangle. \quad (10)$$

将(9)式两边同乘 $(t_{k+1} - 1)$ 并于(10)式相加即得

$$2\tau^{-1}((t_{k+1} - 1)m_k - t_{k+1}m_{k+1}) \geq 2\langle \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}, t_{k+1}\mathcal{Y}^{k+1} - (t_{k+1} - 1)\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^* \rangle + t_{k+1}\|\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}\|_F^2. \quad (11)$$

由算法 1 中的步骤 2, 计算可得出 t_k 与 t_{k+1} 的关系式为 $t_k^2 = t_{k+1}^2 - t_{k+1}$, 将(11)式两边同乘 t_{k+1} 可得

$$2\tau^{-1}(t_k^2 m_k - t_{k+1}^2 m_{k+1}) \geq 2t_{k+1} \langle \mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1}, t_{k+1}\mathcal{Y}^{k+1} - (t_{k+1} - 1)\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^* \rangle + \|t_{k+1}(\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1})\|_F^2,$$

令 $a = t_{k+1}\mathcal{Y}^{k+1}$, $b = t_{k+1}\mathcal{A}^{k+1}$, $c = (t_{k+1} - 1)\mathcal{A}^k + \mathcal{A}^*$ 。

代入毕达哥拉斯关系式 $\|b - a\|^2 + 2\langle b - a, a - c \rangle = \|b - c\|^2 - \|a - c\|^2$ 可得

$$2\tau^{-1}(t_k^2 m_k - t_{k+1}^2 m_{k+1}) \geq \|t_{k+1}\mathcal{A}^{k+1} - (t_{k+1} - 1)\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^*\|_F^2 - \|t_{k+1}\mathcal{Y}^{k+1} - (t_{k+1} - 1)\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^*\|_F^2,$$

由算法 1 中的步骤 2 整理得

$$t_{k+1}\mathcal{Y}^{k+1} = t_{k+1}\mathcal{A}^k + (t_k - 1)(\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k-1}).$$

再令 $n_k = t_k \mathcal{A}^k - (t_{k-1} - 1)\mathcal{A}^{k-1} - \mathcal{A}^*$ 即可推出

$$2\tau^{-1}t_k^2 m_k - 2\tau^{-1}t_{k+1}^2 m_{k+1} \geq \|n_{k+1}\|_F^2 - \|n_k\|_F^2.$$

证毕。

引理 4.5 [23] 若 $\{a_k, b_k\}$ 为正实数的序列且满足 $a_k - a_{k+1} \geq b_{k+1} - b_k$, $\forall k \geq 1$, $a_1 + b_1 \geq c$, $c > 0$, 则对任意的 $k \geq 1$, 有 $a_k \leq c$ 。

引理 4.6 [23] 对于算法 1 中生成的正序列 $\{t_k\}$, 令 $t_1 = 1$, 则对于任意 $k \geq 1$ 有 $t_k \geq \frac{k+1}{2}$ 。

定理 4.1 设 $\{\mathcal{A}^k, \mathcal{Y}^k\}$ 为算法 1 产生的序列, $\mathcal{A}^*$ 为模型(3)的最优解。对任意的 $k \geq 1$, 有

$$F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^*) \leq \frac{2\tau \|\mathcal{A}^0 - \mathcal{A}^*\|_F^2}{(k+1)^2}.$$

证明 令 $a_k = 2\tau^{-1}t_k^2 m_k$, $b_k = \|n_k\|_F^2$, $c = \|\mathcal{Y}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2 = \|\mathcal{A}^0 - \mathcal{A}^*\|_F^2$ 。

在引理 4.2 中令 $k = 0$ 可得

$$\begin{aligned} F(\mathcal{A}^*) - F(\mathcal{A}^1) &\geq \frac{\tau}{2} \|\mathcal{A}^1 - \mathcal{Y}^1\|_F^2 + \tau \langle \mathcal{Y}^1 - \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^1 - \mathcal{Y}^1 \rangle \\ &= \frac{\tau}{2} \left(\|(\mathcal{A}^1 - \mathcal{Y}^1) + (\mathcal{Y}^1 - \mathcal{A}^*)\|_F^2 - \|\mathcal{Y}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\tau}{2} \left(\|\mathcal{A}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2 - \|\mathcal{Y}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2 \right),$$

因此有

$$2\tau^{-1}m_1 \leq \|\mathcal{Y}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2 - \|\mathcal{A}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2,$$

则存在 $a_1 = 2\tau^{-1}t_1^2m_1 = 2\tau^{-1}m_1$, $b_1 = \|n_1\|_F^2 = \|\mathcal{A}^1 - \mathcal{A}^*\|_F^2$, 使得 $a_1 + b_1 \leq c$ 。

结合引理 4.4、引理 4.5、引理 4.6 中的 $t_k \geq \frac{k+1}{2}$ 可推出

$$F(\mathcal{A}^k) - F(\mathcal{A}^*) \leq \frac{2\tau \|\mathcal{A}^0 - \mathcal{A}^*\|_F^2}{(k+1)^2}.$$

5. 数值实验

为了考察新算法的数值表现,我们将新算法 HAPG 与经典算法 APG 进行比较。本节共分为两部分:第一部分将两个算法应用于求解一些随机产生的低秩 Hankel 张量补全问题;第二部分将两个算法应用于图像修复实例。数值实验的所有程序都用 Matlab R2020a 进行编程,都在配置为 Intel(R) Core(TM) i5-8250U @1.60GHz, 内存 8.00 GB, Windows11 系统的数值环境下运行实现。

5.1. 随机 Hankel 张量补全

本小节实验考虑随机产生的张量补全问题。通过对随机生成的不同大小的低秩 Hankel 张量进行补全,从而比较算法 HAPG 与经典算法 APG。随机张量是由张量的 Tucker 分解生成的:

$$\mathcal{T} = \mathcal{G} \times_1 U_1 \times_2 U_2 \times_3 \cdots \times_N U_N,$$

其中 $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_N}$ 是核张量, $U_n \in \mathbb{R}^{I_n \times r_n}, n=1,2,\dots,N$ 为矩阵。本实验中,针对维数分别为 $50 \times 50 \times 50$ 、 $60 \times 60 \times 60$ 、 $50 \times 55 \times 60$ 和 Tucker 秩分别为 $(2, 2, 2)$ 和 $(5, 5, 5)$ 的 Hankel 张量进行补全。张量采样率用 p 来表示,取值分别为 0.3、0.4、0.5。两种算法的参数设置均为 $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $\eta = 0.7$, $\varepsilon = 10^{-7}$, $\mu_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|P(T)_{(i)}\|_2$ 。

Table 1. Comparison of HAPG and APG when $p = 0.3$

表 1. 当 $p = 0.3$ 时, HAPG 与 APG 的比较

大小	秩	算法	迭代次数	CPU 时间(s)	RSE
$50 \times 50 \times 50$	$(2, 2, 2)$	HAPG	51	3.5622	$1.0119\text{E}-07$
$50 \times 50 \times 50$	$(2, 2, 2)$	APG	404	12.4566	$1.3689\text{E}-02$
$50 \times 50 \times 50$	$(5, 5, 5)$	HAPG	48	4.1882	$1.9041\text{E}-07$
$50 \times 50 \times 50$	$(5, 5, 5)$	APG	331	17.9997	$1.8155\text{E}-03$
$60 \times 60 \times 60$	$(2, 2, 2)$	HAPG	49	8.1870	$1.7418\text{E}-07$
$60 \times 60 \times 60$	$(2, 2, 2)$	APG	327	18.8714	$1.7757\text{E}-03$
$60 \times 60 \times 60$	$(5, 5, 5)$	HAPG	48	7.1464	$1.8177\text{E}-07$
$60 \times 60 \times 60$	$(5, 5, 5)$	APG	326	16.5799	$2.9050\text{E}-03$
$50 \times 55 \times 60$	$(2, 2, 2)$	HAPG	50	5.2405	$2.2166\text{E}-07$
$50 \times 55 \times 60$	$(2, 2, 2)$	APG	342	16.0661	$3.5862\text{E}-03$
$50 \times 55 \times 60$	$(5, 5, 5)$	HAPG	48	5.2017	$1.8730\text{E}-07$
$50 \times 55 \times 60$	$(5, 5, 5)$	APG	336	17.0260	$1.8636\text{E}-03$

表 1~3 给出了算法 HAPG 与 APG 在迭代次数、CPU 时间和算法精度方面的数值比较结果, 其中算法的 CPU 时间以秒为单位, 算法的精度用相对均方误差(Relative Standard Error, RSE)进行评估, 其表达式为

$$\text{RSE} = \frac{\|\mathcal{A} - \mathcal{T}\|_F}{\|\mathcal{T}\|_F},$$

其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别表示原始张量和算法输出的最优解。根据数值结果分析, 新算法的迭代次数明显少于 APG 算法, 平均减少了四倍; 其次, 新算法的总体运行时间平均缩短了两倍, 表现出更高的处理效率; 此外, 新算法在精度方面也表现得更加准确。表 1~3 的 18 个算例的具体数据清晰地表明, 新算法在 CPU 时间、迭代次数和精度方面均优于 APG 算法。综上所述, 实验结果证实了新算法的有效性。

Table 2. Comparison of HAPG and APG when $p = 0.4$

表 2. 当 $p = 0.4$ 时, HAPG 与 APG 的比较

大小	秩	算法	迭代次数	CPU 时间(s)	RSE
$50 \times 50 \times 50$	(2, 2, 2)	HAPG	39	2.6959	6.3945E-07
$50 \times 50 \times 50$	(2, 2, 2)	APG	54	5.5029	1.3890E-06
$50 \times 50 \times 50$	(5, 5, 5)	HAPG	37	2.5964	5.7245E-07
$50 \times 50 \times 50$	(5, 5, 5)	APG	52	5.4613	1.0550E-06
$60 \times 60 \times 60$	(2, 2, 2)	HAPG	38	5.3335	3.9458E-07
$60 \times 60 \times 60$	(2, 2, 2)	APG	58	7.2416	1.6587E-06
$60 \times 60 \times 60$	(5, 5, 5)	HAPG	37	5.4985	5.3087E-07
$60 \times 60 \times 60$	(5, 5, 5)	APG	58	7.2750	2.0358E-06
$50 \times 55 \times 60$	(2, 2, 2)	HAPG	39	4.1615	3.4127E-07
$50 \times 55 \times 60$	(2, 2, 2)	APG	61	6.0741	3.0991E-06
$50 \times 55 \times 60$	(5, 5, 5)	HAPG	40	4.4156	5.2058E-07
$50 \times 55 \times 60$	(5, 5, 5)	APG	77	7.3773	7.0927E-06

Table 3. Comparison of HAPG and APG when $p = 0.5$

表 3. 当 $p = 0.5$ 时, HAPG 与 APG 的比较

大小	秩	算法	迭代次数	CPU 时间(s)	RSE
$50 \times 50 \times 50$	(2, 2, 2)	HAPG	42	3.8150	2.2917E-07
$50 \times 50 \times 50$	(2, 2, 2)	APG	105	5.0253	2.4126E-05
$50 \times 50 \times 50$	(5, 5, 5)	HAPG	41	4.4324	3.2083E-07
$50 \times 50 \times 50$	(5, 5, 5)	APG	122	6.0840	6.8978E-05
$60 \times 60 \times 60$	(2, 2, 2)	HAPG	41	7.1227	3.2009E-07
$60 \times 60 \times 60$	(2, 2, 2)	APG	110	8.3881	2.0665E-05
$60 \times 60 \times 60$	(5, 5, 5)	HAPG	40	7.0135	3.1990E-07
$60 \times 60 \times 60$	(5, 5, 5)	APG	103	9.4540	2.4405E-06
$50 \times 55 \times 60$	(2, 2, 2)	HAPG	41	5.1206	3.2042E-07
$50 \times 55 \times 60$	(2, 2, 2)	APG	101	8.1390	3.1291E-05
$50 \times 55 \times 60$	(5, 5, 5)	HAPG	42	5.5192	3.2940E-07
$50 \times 55 \times 60$	(5, 5, 5)	APG	109	6.2233	4.0509E-05

5.2. 图像修复

在本小节中,我们将算法 HAPG 与 APG 用于求解 Hankel 结构的图像修复问题。具体地,在采样率为 $p=0.3$ 的情形下,对 $100 \times 100 \times 100$, 秩为 $(2, 2, 2)$ 的 Hankel 张量,分别使用算法 HAPG 和 APG 进行图像修复。为了更好地体现图像修复的效果,我们给出了原始图像、采样图像以及经过算法修复后的图像,见图 1 与图 2。本小节实验参数与 5.1 节相同,同时用峰值信噪比(PNSR)来体现修复效果,其表达式如下:

$$\text{PNSR} = 10 \log_{10} \frac{n \mathcal{T}_{\max}^2}{\|\mathcal{A} - \mathcal{T}\|_F^2},$$

其中 n 表示张量中像素的个数, $\mathcal{T}_{\max}$ 表示原始张量的最大像素值。针对该图像修复问题,修复效果见图 2。图 1, 图 2 的实验结果表明,新算法对于图像修复问题有着不错的修复效果。

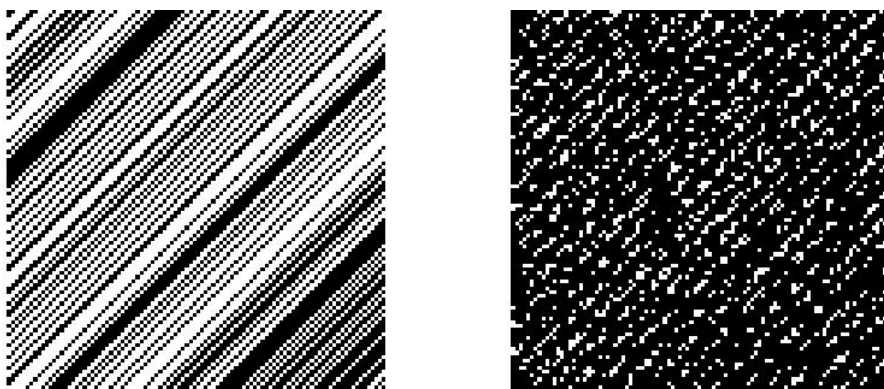


Figure 1. On the left is the original slice image; On the right is the sampling slice image
图 1. 左为原始切片图像; 右为取样切片图像

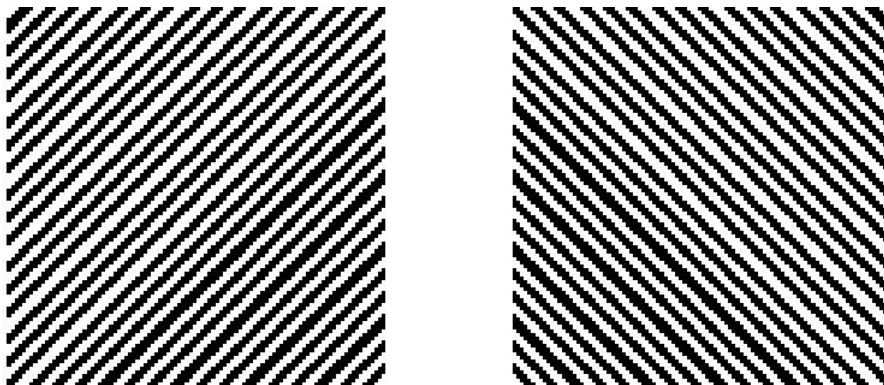


Figure 2. On the left is the image repaired by the APG algorithm; The image repaired by the right HAPG algorithm
图 2. 左为 APG 算法修复的图像; 右 HAPG 算法修复的图像

6. 总结

本文针对 Hankel 张量补全问题提出了一种新的基于 l_∞ -模的保结构加速邻近梯度法。该算法基于加速邻近梯度算法的框架,在每次迭代中利用 l_∞ -模投影使得生成张量始终为 Hankel 结构,同时算法能够提高张量补全的效率与精度。并在理论上,我们证明了新算法在合理假设条件下的收敛性。最后,通过求解随机 Hankel 张量补全问题与图像修复实例的数值实验进一步表明了算法的有效性。

基金项目

山西省科技创新人才团队专项(202204051002018), 山西省回国留学人员科研资助项目(2022-170), 国家自然科学基金(12371381)。

参考文献

- [1] Bertalmio, M., Sapiro, G., Caselles, V. and Ballester, C. (2000) Image Inpainting. *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, New Orleans, 23-28 July 2000, 417-424. <https://doi.org/10.1145/344779.344972>
- [2] Mørup, M. (2011) Applications of Tensor (Multiway Array) Factorizations and Decompositions in Data Mining. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, **1**, 24-40. <https://doi.org/10.1002/widm.1>
- [3] Signoretto, M., Van de Plas, R., De Moor, B. and Suykens, J.A.K. (2011) Tensor versus Matrix Completion: A Comparison with Application to Spectral Data. *IEEE Signal Processing Letters*, **18**, 403-406. <https://doi.org/10.1109/lsp.2011.2151856>
- [4] Comon, P. (2009) Tensor Decompositions, State of the Art and Applications. *IMA Conference on Mathematics in Signal Processing*, Singapore, 15-17 May 2009, 1-24.
- [5] Leurgans, S.E., Ross, R.T. and Abel, R.B. (1993) A Decomposition for Three-Way Arrays. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **14**, 1064-1083. <https://doi.org/10.1137/0614071>
- [6] Tucker, L.R., Koopman, R.F. and Linn, R.L. (1969) Evaluation of Factor Analytic Research Procedures by Means of Simulated Correlation Matrices. *Psychometrika*, **34**, 421-459. <https://doi.org/10.1007/bf02290601>
- [7] Oseledets, I.V. (2011) Tensor-Train Decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**, 2295-2317. <https://doi.org/10.1137/090752286>
- [8] Zhao, Q., Zhou, G., Xie, S., et al. (2016) Tensor Ring Decomposition. <https://arxiv.org/abs/1606.05535>
- [9] Liu, J., Musialski, P., Wonka, P. and Ye, J. (2013) Tensor Completion for Estimating Missing Values in Visual Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 208-220. <https://doi.org/10.1109/tpami.2012.39>
- [10] 郭雄伟, 王川龙. 低秩张量填充的加速随机临近梯度算法[J]. 计算数学, 2022, 44(4): 534-544.
- [11] Gandy, S., Recht, B. and Yamada, I. (2011) Tensor Completion and Low-N-Rank Tensor Recovery via Convex Optimization. *Inverse Problems*, **27**, Article 025010. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/2/025010>
- [12] Smith, R.S. (2014) Frequency Domain Subspace Identification Using Nuclear Norm Minimization and Hankel Matrix Realizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **59**, 2886-2896. <https://doi.org/10.1109/tac.2014.2351731>
- [13] Vanhuffel, S., Chen, H., Decanniere, C. and Vanhecke, P. (1994) Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares. *Journal of Magnetic Resonance, Series A*, **110**, 228-237. <https://doi.org/10.1006/jmra.1994.1209>
- [14] Adamo, A. and Mazzucchelli, P. (2014) 3D Interpolation Using Hankel Tensor Completion by Orthogonal Matching Pursuit. *Gruppo Nazionale di Geofisicadella Terra Solida (GNGTS)*, Bologna, 25-27 November 2014, 5-11.
- [15] Trickett, S., Burroughs, L. and Milton, A. (2013) Interpolation Using Hankel Tensor Completion. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013*, Houston, 19 August 2013, 3634-3638. <https://doi.org/10.1190/segam2013-0416.1>
- [16] 王川龙, 郭雄伟. 低秩 Hankel 张量填充的快速算法[J]. 中国科学: 数学, 2022, 52(6): 729-740.
- [17] Wang, C., Guo, X. and Yan, X. (2022) An Accelerated Proximal Gradient Algorithm for Hankel Tensor Completion. *Journal of the Operations Research Society of China*, **12**, 461-477. <https://doi.org/10.1007/s40305-022-00422-8>
- [18] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (1996) Matrix Computations. 3rd Edition, The Johns Hopkins University Press.
- [19] Cai, J., Candès, E.J. and Shen, Z. (2010) A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1956-1982. <https://doi.org/10.1137/080738970>
- [20] Qi, L. (2015) Hankel Tensors: Associated Hankel Matrices and Vandermonde Decomposition. *Communications in Mathematical Sciences*, **13**, 113-125. <https://doi.org/10.4310/cms.2015.v13.n1.a6>
- [21] Jensen, J.L.W.V. (1906) Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, **30**, 175-193. <https://doi.org/10.1007/bf02418571>
- [22] 张江梅, 王川龙. 基于 l_∞ -模的 Hankel 矩阵填充的保结构阈值算法[J]. 应用数学学报, 2019, 42(1): 55-70.
- [23] Beck, A. and Teboulle, M. (2009) A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **2**, 183-202. <https://doi.org/10.1137/080716542>