Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 701-711
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144198

几何图形辅助线的从天而降

朱青昂[1*]，余　霞[2#]，边　红[1]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆师范大学附属中学，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2025年3月24日；录用日期：2025年4月17日；发布日期：2025年4月25日

摘　要

在初中数学课程中，平面几何是培养学生逻辑推理和证明能力的重要部分，该部分的学习对于学生掌握数学的整体框架至关重要。本文通过具体题目分析几何图形中辅助线的由来，探讨如何巧妙地引入辅助线，培养学生对几何图形的深刻理解和空间推理能力。同时探讨辅助线选择的内在逻辑及学生做题时遇到的困难和思考过程，并通过实证研究验证了该方法能有效提高学生数学成绩。

关键词

几何图形，辅助线，数学课堂教学，分析能力

The Sudden Appearance of Auxiliary Lines in Geometric Figures

Qingang Zhu[1*], Xia Yu[2#], Hong Bian[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]Secondary School of Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 24th, 2025; accepted: Apr. 17th, 2025; published: Apr. 25th, 2025

Abstract

In junior high school mathematics courses, plane geometry is an important part for cultivating students' logical reasoning and proof abilities. The learning of this part is crucial for students to master the overall framework of mathematics. This article analyzes the origin of auxiliary lines in geometric figures through specific problems, explores how to skillfully introduce auxiliary lines, and cultivates students' deep understanding of geometric figures and spatial reasoning abilities. At the same

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 朱青昂, 余霞, 边红. 几何图形辅助线的从天而降[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 701-711.
DOI: 10.12677/aam.2025.144198

time, it discusses the internal logic of auxiliary line selection and the difficulties and thinking processes students encounter when solving problems, and verifies through empirical research that this method can effectively improve students' math scores.

Keywords

Geometric Figure, Auxiliary Line, Mathematics Classroom Teaching, Analytical Ability

1. 引言

基于我国现行《义务教育数学课程标准(2022 版)》规定，数学源于对现实世界的抽象，通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象，得到数学的研究对象及其关系；基于抽象结构，通过对研究对象的符号运算、形式推理、模型构建等，形成数学的结论和方法，帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律[1]。

美国数学家 G•波利亚在《怎样解题》中指出尽可能利用那些已知的结论或回归到原始定义，是引入辅助元素的一些最好理由。在几何问题解答中，辅助线的引入通常发生在“拟定方案”的阶段，它可以帮助学生更好地理解题目，将复杂的问题简单化，从而找到解题的突破点[2]。

郑妍在《在添加辅助线的教学中培养学生几何图形思维能力》中通过一道具体实例与学生对话交流，利用综合分析法，即先分析已知条件，利用所学定理推导出可得的结果，再探究要证明的结论成立需要哪些条件，条件推理导出的结论和结论所需的条件如果能够吻合，则找出了正确的证题思路[3]。

德力根仓在《浅谈辅助线在几何证题中的应用》中从四个方面阐述了做辅助线的方法，并举例说明当几何证题适用“综合法”“分析法”、把已知图形变换成所需图形、做辅助线改造原图形或转换原求证等情况时的解题方法，力求对培养学生的逻辑思维和发散思维起到积极作用[4]。

杨高在《自然而得辅助线》中由一道七年级期末测试几何证明题得出思路：当条件与结论不能直接关联时，就引入中间条件(“介绍人”)；若整体分析受阻，就切入局部(“先进一头”)；图形不全就补全图形。有这些基本思路，其实辅助线的添加应该就“自然而然”了[5]。

杨斐雯在《巧作辅助线 活解压轴题》中通过对 2021 年常德市中考第 26 题第(2)问证法探究，联想辅助线，思维发散，给出六种证法[6]。

2. 主要内容

作为数学学科领域的基础模块，平面几何承载着后续高阶知识体系的构建。辅助线作为几何证明的核心解题工具，学生在运用过程中却面临诸多难题。

第一，知识关联薄弱。学生对几何性质和定理只是单纯死记硬背，未能建立系统的认知体系。知识迁移能力不够，知识点不能融会贯通[7]。

第二，思路局限僵化。学生很难抓住图形的隐含线索，无法串联隐含线索构造辅助线[8]。

第三，复杂图形困扰。面对复杂的几何结构时，学生难以通过图形分解与组合建立与基础图形的联系，不能找到解题的突破点[9]。

第四，动态最值困惑。当涉及运动轨迹时，学生无法准确识别变量间的内在联系，缺乏利用数学抽

象构造辅助线的能力。

针对上述问题，本文通过例题分析，分类探究初中基础图形(三角形、矩形、菱形、圆)的辅助线添加规律，建立基于图形本质属性的逻辑推演模型。

2.1. 三角形

三角形是最简单的多边形，也是认识其他图形的基础。解题需掌握三条重要线段：高、中线、角平分线；利用中点构造中位线；全等三角形的性质和判定定理；等腰/等边三角形的性质和判定、“三线合一”以及含特殊角的直角三角形的性质等。

例 1 如图 1，在 ΔABC 中， $\angle ABC = 60^{\circ}$ ， $BC = 6$ ， $AC = 8$ ， D、E 分别为边 AC、AB 上两个动点。

(1) 如图 1，若点 D 为 AC 中点， $\angle AED = 30^{\circ}$ ，求 DE 的值；

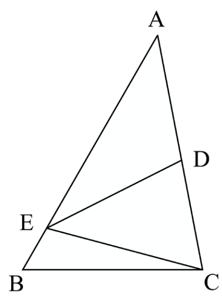

Figure 1. The diagram (1) in example 1

图 1. 例 1 中(1)示意图

(2) 如图 2，若 $AE = CD$ ，连接 BD、CE ，求 $BD + CE$ 的最小值。

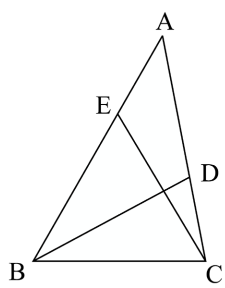

Figure 2. The diagram (2) in example 1

图 2. 例 1 中(2)示意图

分析：要求 DE 的值，已知点 D 为 AC 中点，考虑取 AB 的中点 F ，连接 DF 构造中位线(如图 3 所示)，利用三角形中位线平行于第三边且等于第三边一半的性质，所以 $DF = 3$ ，且 $DF \parallel BC$ 。已知 $\angle ABC = 60^{\circ}$ ，得出 $\angle EFD = 120^{\circ}$ ，进而证明 ΔEFD 为等腰三角形，通过三线合一求得底边 DE 的值。

波利亚在《怎样解题：数学思维的新方法》中曾说：如果你解决不了这个问题，那就试着解决一道和这个问题有关的问题。你能想出一道更简单的问题吗？更一般的问题？更特殊的问题？一道类似的问题？你能把这道题的一部分做出来吗？下面有一道题目你以前解过，你能利用它吗[2]？

如图 4 所示， ΔABC 和 ΔADE 都是等腰三角形，连接 BD、CE ，求证： $BD = CE$ 。

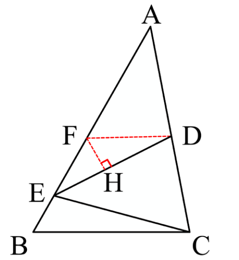

Figure 3. A diagram of a triangle using a midpoint to construct a median line
图 3. 三角形中利用中点构造中位线图

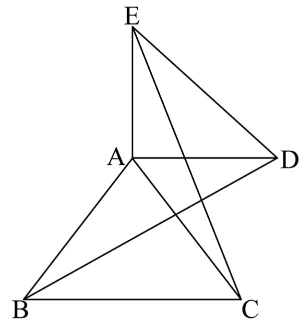

Figure 4. "Common vertex rotation (hand in hand)" pattern
图 4. "共顶点旋转(手拉手)"图形

证明：∵ ΔABC 和 ΔADE 都是等腰三角形

∴ $AB = AC$， $AD = AE$， $\angle BAC = \angle DAE$

∴ $\angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$，即 $\angle BAD = \angle CAE$

∴ $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ （SAS），$BD = CE$。

你能利用它吗？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了有可能应用它，你是否应该引入某个辅助元素[2]？回到题目上去。题中给出 $AE = CD$，考虑将相等的两边转换成全等三角形的对应边，学生首先想到的思路是证明 $\Delta ACE \cong \Delta CBD$，但显然 $AC \neq BC$，此种思路行不通。换种思路，不妨以 AE 和 CD 作为对应边，过点 C 作 $CF \parallel AB$ 且 $CF = AC$ 构造全等三角形得出对应边相等，即 $CE = DF$ （如图 5 所示)，题目要求 $BD + CE$ 的最小值，即 $BD + DF$ 的最小值，即为 BF 的长，通过构造直角三角形 ΔBHF，利用勾股定理求出 BF 的长度，将动点的问题转化为静点的问题。

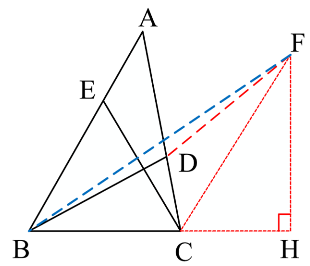

Figure 5. The "hand in hand" figure is constructed in a triangle
图 5. 三角形中构造"手拉手"图形

2.2. 矩形

有一个角是直角的平行四边形叫做矩形，它继承平行四边形所有的性质，其中一个直角可以转化为直角三角形中的直角，可将其划归为勾股定理或三角形全等的问题进行研究，构造全等三角形将线段相等问题转化为对应边相等，将复杂问题简单化。

例 2 如图 6，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAC = 45^\circ$。

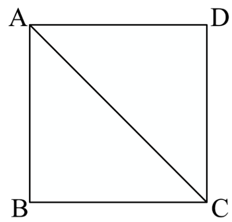

Figure 6. A diagram of rectangular in example 2
图 6. 例 2 矩形示意图

(1) 求证：矩形 $ABCD$ 为正方形；

(2) 如图 7，若点 P 在矩形的对角线 AC 上，点 E 在边 BC 上，且 $PE = PD$，求证：$\angle EPD = 90^\circ$；

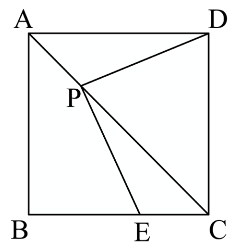

Figure 7. The diagram (2) in example 2
图 7. 例 2 中(2)示意图

(3) 在(2)的条件下，若点 F 为 PE 中点，求证：在线段 PC 或线段 BE 上必存在一点 G (不与端点重合)，使得 $BC^2 + EC^2 = 8FG^2$。

分析：已知四边形 $ABCD$ 为矩形，$\angle BAC = 45^\circ$，易得 ΔABC 为等腰直角三角形，$AB = BC$，易证矩形 $ABCD$ 为正方形。过点 P 分别作 $PM \perp BC$，$PN \perp CD$，构造手拉手三角形，已知 $PE = PD$，利用矩形的直角性质，构造全等三角形 $\Delta PME \cong \Delta PND$ (如图 8 所示)，得到 $\angle MPE = \angle NPD$，易知 $\angle NPM = 90^\circ$，易证 $\angle EPD = 90^\circ$。观察题目 $BC^2 + EC^2 = 8FG^2$，根据线段的平方关系，等式左边联想到勾股定理两直角边的平方和，在 $Rt\Delta ECD$ 中，$EC^2 + CD^2 = ED^2$，由(2)知，$\angle EPD = 90^\circ$，可知 DE 与 PE 的数量关系 $DE = \sqrt{2}PE$，则 $DE^2 = 2PE^2$。现已证出 $PE = PD$，$BC^2 + EC^2 = 2PE^2$，只需证出 $PE^2 = 4FG^2$，已知点 F 为 PE 中点，则 $PE^2 = 4PF^2$，那么只需证 $PF = FG$ 即可，根据斜边中线等于斜边一半的性质，则过点 E 作 $EG \perp CP$ 于点 G (如图 8 所示)，FG 为 $Rt\Delta PGE$ 的斜边中线，$PF = FG$ 得证，进而确定了 G 点的位置。

2.3. 菱形

有一组邻边相等的平行四边形是菱形，菱形也是特殊的平行四边形，四条边都相等；对角线垂直且

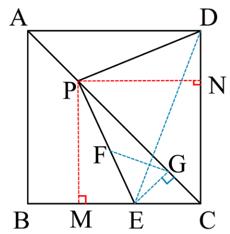

Figure 8. A diagram of the "hand in hand" triangle constructed in a rectangle
图 8. 矩形中构造"手拉手"三角形图

平分对角，将菱形分成四个全等的直角三角形。通常将菱形与等边三角形联系起来，利用等边三角形的性质进行解题。

例 3 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC = 60^{\circ}$，对角线 AC、BD 相交于点 O。点 M 从点 B 向点 C 运动(到点 C 时停止)，点 N 为 CD 上一点，且 $\angle MAN = 60^{\circ}$，连接 AM 交 BD 于点 P。

(1) 如图 9，过点 D 作 $DG \perp AN$ 于点 G，若 $DG = 1.7$，求点 C 到 AM 的距离；

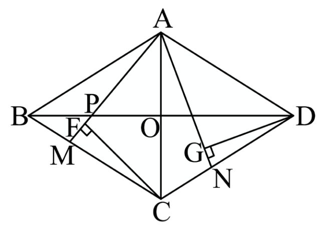

Figure 9. The diagram (1) in example 3
图 9. 例 3 中(1)示意图

(2) 如图 10，点 E 是 AN 上一点，且 $AE = AP$，连接 BE、OE。试判断：在运动过程中，$BE + OE$ 是否存在最小值？若存在，请求出；若不存在，请说明理由。

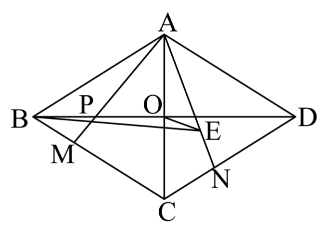

Figure 10. The diagram (2) in example 3
图 10. 例 3 中(2)示意图

分析：利用菱形对角线互相垂直且平分对角，将菱形分成四个全等直角三角形的性质。题目要求点 C 到 AM 的距离，即求 CF 的长度，题中给出 $DG = 1.7$，找出 CF 和 DG 分别所在的三角形 ΔAFC 和 ΔAGD，利用题中所给条件证明二者全等，即得到 $CF = DG = 1.7$ (如图 11 所示)；利用条件 $AE = AP$，将其作为对应边，易知 $AC = AB$，学生想到作第一条辅助线：连接 CE，易证 $\Delta AEC \cong \Delta APB$，得到 $\angle ACE = \angle ABP = 30^{\circ}$，则 $\angle DCE = 30^{\circ}$，得到 ΔACD 是等边三角形，则 CE 在等边三角形"三线合一"上，点 O 为 AC 中点，那么想到作第二条辅助线：取 CD 的中点 H，连接 EH (如图 12 所示)，根据三角形中

位线定理，易证点 O、E、H 三点共线，且 OH 为 ΔACD 的中位线，即 $OH=\frac{1}{2}AD=1$，且 $OE=EH$，则 $BE+OE=BE+EH\geq BH$，即求 BH 的值，那么得到作第三条辅助线的思路：过点 B 作 $BQ\perp DC$ 于点 Q，利用勾股定理求出 BH 的长度即为 $BE+OE$ 的最小值。

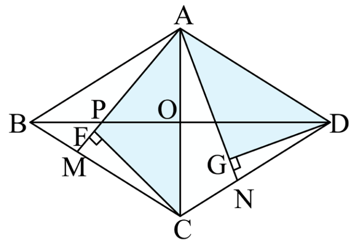

Figure 11. A diagram of constructing congruent triangles in a rhombus
图 11. 菱形中构造全等三角形图

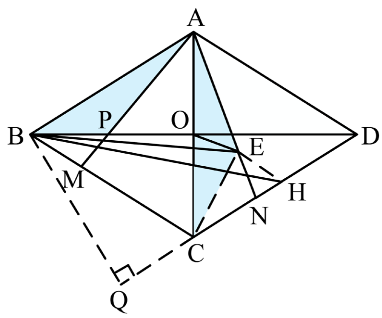

Figure 12. Constructing “hand in hand” triangles within a rhombus
图 12. 菱形中构造“手拉手”三角形图

2.4. 圆

圆是特殊的曲线，许多性质是通过与圆有关的线段(如直径、弦等)和角(如圆心角、圆周角等)体现的。核心知识包括圆的对称性；弧、弦、圆心角之间的关系；直径所对的圆周角是直角；垂径定理；三角形的外接圆和内切圆；圆内接四边形的对角互补等等。

例 4 已知 ΔABC 中，$AB=BC=6$，$\odot O$ 是 ΔABC 的外接圆。

(1) 如图 13，若 $\angle ABC=60^{\circ}$，D 为 AE 上一动点，过点 B 作直线 AD 的垂线，垂足为 E。求证：$CD=DE+AE$；

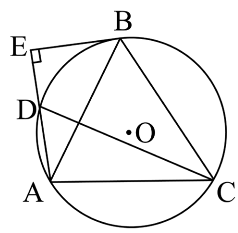

Figure 13. The diagram (1) in example 4
图 13. 例 4 中(1)示意图

(2) 如图 14，若 $\angle ABC = 120^{\circ}$，过点 B 作 $BF \perp BC$ 交 AC 于点 F。点 Q 是线段 AB 上一动点(不与 A、B 重合)，连接 FQ，求 $BQ + 2FQ$ 的最小值。

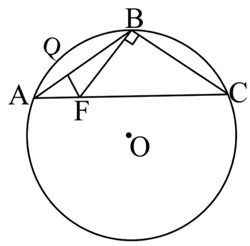

Figure 14. The diagram (2) in example 4
图 14. 例 4 中(2)示意图

分析：利用题中所给条件，易知 ΔABC 为等边三角形，则 $\angle ACB = 60^{\circ}$，利用圆内接四边形对角互补，想到作第一条辅助线连接 BD，得到 $\angle ADB = 120^{\circ}$，$\angle EDB = 60^{\circ}$。已知 $BE \perp DE$，可写出 $BD = 2DE$，只需证 $CD = DE + AE = DE + AD + DE = AD + BD$ 即可。根据同弧所对的圆周角相等得 $\angle BDC = \angle BAC = 60^{\circ}$。已知 $AC = BC$，构造手拉手模型，延长 DB 于点 F，使得 $BF = AD$ (如图 15 所示)，易证 $\Delta CAD \cong \Delta CBF$ (SAS)，则 $CD = CF$，ΔDCF 为等边三角形，$CD = DF = BD + BF = BD + AD = 2DE + AD = DE + AE$。已知 $\angle ABC = 120^{\circ}$，$AB = BC$，则 $\angle A = \angle C = 30^{\circ}$，过点 B 作 $BN \parallel CA$，利用平行的性质构造内错角相等，则 $\angle ABN = \angle A = 30^{\circ}$。过点 Q 作 $QH \perp BN$ 于点 H，根据直角三角形的性质，可得 $BQ = 2QH$ (如图 16 所示)，则 $BQ + 2FQ = 2QH + 2FQ = 2(QH + FQ)$，当点 F、Q、H 三点共线且当 $FH \perp BN$ 时 $BQ + 2FQ$ 有最小值，即点 B 到 AC 的距离。

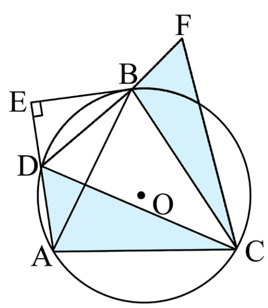

Figure 15. Constructing “hand in hand” triangle diagrams within a circle
图 15. 圆内构造“手拉手”三角形图

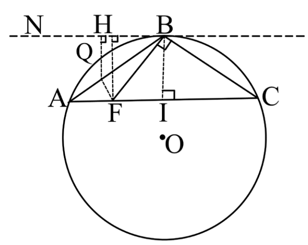

Figure 16. Diagram of constructing parallel lines within a circle
图 16. 圆内构造平行线图

3. 辅助线选择的分类原则与内在逻辑

3.1. 辅助线选择的分类原则

通过归纳初中几何常见题型，辅助线的选择总结为以下三个原则：

对称性原则：当图形是等腰三角形、菱形等含有对称性的图形时，优先考虑添加对称轴或连接对称点。如证明菱形对角线垂直。

构造全等或相似原则：解决线段或角的相等问题时，通过添加辅助线构造全等/相似三角形。如例 1，通过中点构造中位线，将动点问题转化为静点问题。

转化问题原则：直接证明困难时，通过辅助线将复杂图形分解为基本图形或把杂乱的图形变清晰[10]。如例 2，在矩形中作垂线，将斜边问题转化为全等三角形问题。

3.2. 辅助线选择的内在逻辑

辅助线的添加遵循三个核心原则：几何图形性质分析、证明目标导向和解题思路整合。以下为具体逻辑框架：

3.2.1. 基于几何图形性质添加辅助线

三角形中点：常考虑添加中线，利用中线平分对边和面积的性质，转化线段比例或面积关系。多边中点：构造中位线，如证明梯形中位线定理。例 1 中体现了根据三角形中点的性质添加中位线，有效转化线段和角度关系。

角平分线：根据角平分线到两边距离相等的性质添加辅助线构造全等三角形证明线段或角相等。当角平分线与平行线同时出现时，易构造等腰三角形，利用其性质解题。

特殊三角形：等腰三角形中常添加底边垂线，利用“三线合一”的性质分割成两个全等的直角三角形方便证明。直角三角形连接斜边中点与直角顶点，利用斜边中线等于斜边一半的性质来解题，转化为等腰三角形问题。

3.2.2. 基于证明目标添加辅助线

证明线段相等：构造全等三角形，借助平移、旋转、对称等几何变换将无关线段整合到同一三角形中；四边形问题，连接对角线，转化为三角形全等问题证明线段相等。在例 1、例 3 中，当证明目标是线段相等或与线段和相关问题时，常构造全等三角形。

角度关系转化：添加平行线，利用同位角、内错角相等转化角的关系。在圆中，利用同弧所对的圆周角相等、圆内接四边形对角互补等性质，实现角的等量转化。

最值问题：对称变换，作对称点将折线路径转化为直线，利用“两点之间线段最短”求解。在涉及动点到定直线距离的最值问题时，根据“垂线段最短”，添加垂线解决最值问题。例 1 通过构造全等三角形，利用“两点之间线段最短”求最小值；例 4 通过作平行线和垂线，利用“垂线段最短”求解最值问题。

3.2.3. 基于解题思路添加辅助线

正向联想：从已知条件出发，挖掘几何图形的基本特征和几何结构[11]，联想可能的辅助线。看到直角三角形能想到勾股定理、特殊角关系，通过添加垂线构造所需图形。

逆向推导：从结论出发，分析所需条件。若现有条件不足，思考添加怎样的辅助线可以创造条件。若证明线段的平方关系，可构造直角三角形应用勾股定理。

4. 实证研究

为检验基于几何图形性质构造辅助线的教学方法对学生解题能力的提升是否有效，本研究选取乌鲁木齐某初中八年级的 4 名学生为研究对象(记为 S1、S2、S3、S4，男女各半，数学成绩中等)，开展教学实验，通过前后测对比分析其学习成效。

4.1. 实验设计

前测阶段：要求学生独立完成这篇文章中四道例题，限时 60 分钟。测试结果显示：S1、S2 对复杂图形分解能力薄弱，无法识别中点、直角三角形等关键要素，未能正确添加辅助线；S3、S4 虽尝试构造辅助线(如中位线、垂线)，但因逻辑不清未能完成证明；四人均未得出正确结论，平均得分率为 12.5% (满分 40 分)。

干预阶段：针对学生的问题，进行一周的专项训练，每天利用课间时间，主要内容：核心原则讲解(对称性原则、构造全等原则、转化问题原则)；思维导图构建(从已知逆向推导辅助线)。

后测阶段：一周后仍然使用四道例题再次测试，限时 60 分钟。结果显示：S1、S2 可以根据中点构造中位线，完成度达到 50%；S3、S4 可以运用转化原则，逻辑变得清晰，完成度达到 60%。

4.2. 结论与讨论

本研究通过实证验证了辅助线教学策略的有效性，实验结果表明，辅助线教学可以提升学生的几何推理能力，对学生成绩的提高有明显帮助，学生从单纯摸索转向基于图形性质的目标导向；通过“条件–目标”双向分析，逐步搭建逻辑桥梁；学生面对变式题型时迁移能力增强。

5. 结束语

本文从相关辅助线例题出发，分析其解题思路，通过几何图形自身的基本性质探索辅助线的构造，构造辅助线是数学知识的建构过程，也是旧知识向新知识迁移的过程。辅助线的教学，教师不能为了教而教，应该让学生理解其中的核心思想、逻辑结构，并以该知识点为契机，搜集多个相似知识点，让学生做到举一反三，提高自身思想维度。学科教学要以激发学生兴趣为出发点，培养学生善于去发现数学中的魅力，不仅是辅助线的构造，而是在遇到其他题目时，也能积极地去打开探索数学世界的大门，为数学学习激发更多的内生动力。

基金项目

国家自然科学基金(12361072)；2023 自治区自然科学基金面上项目(2023D01A36)和 2023 自治区自然科学基金青年项目(2023D01B48)；2023 新疆维吾尔自治区研究生精品课项目《抽象代数》；2022 新疆师范大学教学创新团队项目。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[2] G·波利亚. 怎样解题: 数学思维的新方法[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2018: 39-42.

[3] 郑妍. 在添加辅助线的教学中培养学生几何图形思维能力[J]. 现代教学, 2022(S2): 25-26.

[4] 德力根仓. 浅谈辅助线在几何证题中的应用[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2014, 30(12): 264-266.

[5] 杨高. 自然而得辅助线——由一道七(下)期末测试几何证明题所得的启示[J]. 科学咨询(教育科研), 2016(24): 100.

[6] 杨菲雯. 巧作辅助线活解压轴题——由 2021 年常德市中考第 26 题引发的思考[J]. 中学数学, 2024(6): 70-71.

[7] 秦闻翼. 培养初中生平面几何"辅助线构造"能力的教学研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海师范大学, 2023.
[8] 王鑫鑫. 初中平面几何构造辅助线教学研究[D]: [硕士学位论文]. 洛阳: 洛阳师范学院, 2023.
[9] 萨娜. 初中平面几何添加辅助线教学研究[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2019.
[10] 孙丹丹. 初中平面几何问题构造辅助线教学研究[D]: [硕士学位论文]. 济宁: 曲阜师范大学, 2021.
[11] 张宁. 抓住图形特征解法自然生成[J]. 数理化学习(初中版), 2022(8): 37-41.