Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 712-720
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144199

Hans汉斯

双勾函数在求解最值问题的探索研究

胡玉娟[1*]，余 霞[2#]，边 红[1]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆师范大学附属中学，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2025年3月24日；录用日期：2025年4月17日；发布日期：2025年4月25日

摘 要

随着数学学习的发展与深入，形如 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的模型已经多次出现在我们的视野中，初等数学中求最值问题逐渐普遍化且考查力度较大，刻板印象就是直接用基本不等式求解，因为这通常是同学们最希望看到的容易求解形式。事实上，这类式子是一类双勾函数，本文将剖析双勾函数的基本性质，并利用这些性质解决基本不等式无法解决的最值问题。

关键词

双勾函数，最值问题，基本不等式

Exploration and Research on Double Hook Function in Solving Extremum Problems

Yujuan Hu[1*], Xia Yu[2#], Hong Bian[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]Secondary School of Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 24th, 2025; accepted: Apr. 17th, 2025; published: Apr. 25th, 2025

Abstract

As our study of mathematics progresses, the model represented by $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ has repeatedly come into our field of vision. In elementary mathematics, the problem of finding the maximum

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 胡玉娟, 余霞, 边红. 双勾函数在求解最值问题的探索研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 712-720.
DOI: 10.12677/aam.2025.144199

or minimum value has become more common and more challenging. The stereotype is to directly use the basic inequality to solve it, as this is often the easiest form that students hope to see. In fact, such expressions are a class of double-hook functions. This article will analyze the basic properties of double-hook functions and use these properties to solve maximum or minimum value problems that cannot be solved using the basic inequality.

Keywords

Double Hook Function, Extremum Problems, Fundamental Inequality

1. 引言

最值问题是数学领域中的一个重要课题，它广泛存在于各个分支和实际应用中，在高中阶段，学生开始接触到不等式和函数性质，这为解决最值问题提供了有力的工具[1]。我们已经学习了基本不等式，在解决一些实际问题时，我们还需要认识基本不等式与双勾函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 之间的关系[2]。近年来，在高考中对最值和范围问题的考查力度比较大，因此利用“双勾”函数的性质来解决这些问题，可以使运算得以简化，同时能更有效地得到正确答案，作为未来数学教师我们应该对“双勾”函数加以足够重视[3]。

已有的研究深入剖析了双勾函数的基本性质，如单调性、奇偶性、渐近线及最值特性，还探究了其在不等式、函数值域等基础问题中的应用。例如胡小平在《“双勾”函数的性质及在高考题中的应用》一文中主要剖析了双勾函数的单调性，然后对双勾函数的单调性进行应用[4]。陈晓明在《基本不等式的应用》中提到“没有双勾函数，基本不等式的应用将遇到无法跨越的坎”，主要研究了双勾函数的单调区间和值域，并应用双勾函数的性质解决值域问题[5]。周方旦和高明在《不忘初“型”，方得始终》一文中主要针对高中阶段出现的分式型函数求最值和值域问题，通过换元、变形将其转化为双勾函数模型求解[6]。

然而，随着数学研究的不断深入和实际问题的日益复杂，双勾函数求最值仍然面临着许多挑战。因此，本篇将研究以下问题：当定义域受复杂条件限制时，如何利用双勾函数性质准确求出最值；双勾函数与其他函数复合时，复合函数的结构和性质变得更为复杂，如何剖析其单调性并推广到一般形式，用以求解复杂情形下的最值问题。本文将主要对复合双勾函数以及定义域受限双勾函数的最值问题进行分析归纳，综合运用均值不等式、换元、配凑等多种方法，探索更为高效、通用的解题模型，进一步完善双勾函数求解最值的方法体系。

2. 双勾函数的定义及性质

一般地我们把形如 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的函数称为双勾函数，可以把它看成是一次函数 $y=x$ 与反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 相加而成的函数。由于造型非常像运动品牌耐克的标志，因此我们也将它戏称为“耐克函数”[7]。

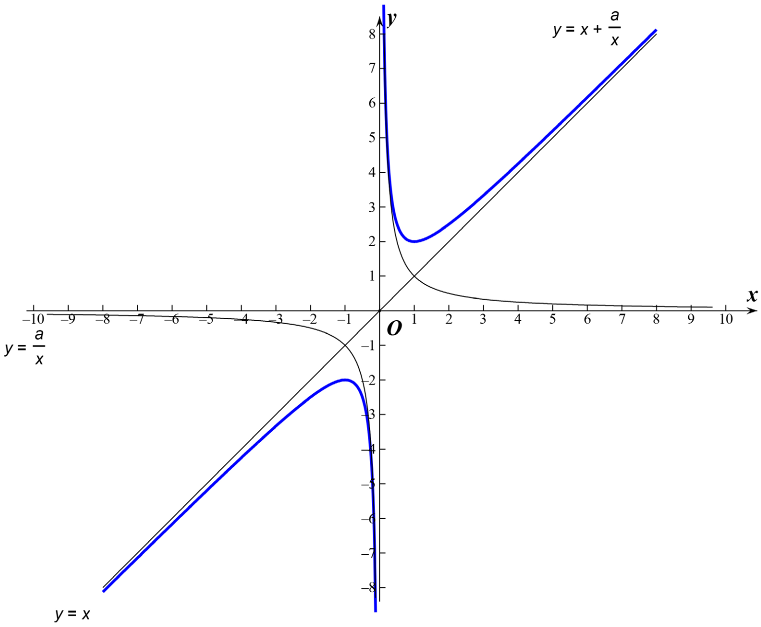

Figure 1. Double hook function
图 1. 双勾函数

图象：如图 1 所示，$y = x$ 与 $y = \frac{a}{x}(a > 0)$ 的函数图象(黑色)，两个函数相加后得到的双勾函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 的图象(蓝色)。从图中可以看出在第一象限有一个“勾”，在第三象限的“勾”还与其对称，故称为双勾函数，图象关于坐标原点对称[8]。双勾函数的图象本质上是双曲线[9]。

渐近线：当自变量 x 趋于无穷大时，$y = \frac{a}{x}$ 趋于零，因此，对勾函数的图象当 x 趋于无穷大时，逼近正比例函数 $y = x$ 的图象，因此有渐近线 $y = x$；

当自变量 x 趋于零时，$y = x$ 趋于零，这时对勾函数的图象逼近反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 的图象，反比例函数的渐近线有 y 轴，所以对勾函数也有渐近线 $x = 0$。

定义域：$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

值域：$\left|x + \frac{a}{x}\right| = |x| + \left|\frac{a}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x| \cdot \left|\frac{a}{x}\right|} = 2\sqrt{a}$，

所以值域是 $\left(-\infty, -2\sqrt{a}\right) \cup \left(2\sqrt{a}, +\infty\right)$。

奇偶性：$\because f(-x) = -x + \frac{a}{-x} = -\left(x + \frac{a}{x}\right) = -f(x)$，

所以双勾函数是奇函数。

单调性：(导数法) $\because f(x) = x + \frac{a}{x}(x > 0, a > 0)$，

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$，

令 $f'(x) = 0$，$1 - \frac{a}{x^2} = 0$，$x = \pm\sqrt{a}$，

当 $x \in \left(-\infty, -\sqrt{a}\right] \cup \left[\sqrt{a}, +\infty\right)$ 时，$f'(x) \geq 0$；

当 $x\in\left[-\sqrt{a},0\right)\cup\left(0,\sqrt{a}\right]$ 时，$f'(x)\le 0$。
$\therefore$ 双勾函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right]$ 和 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 上单调递增，
在 $\left[-\sqrt{a},0\right)$ 和 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 上单调递减。
最值：函数在整个定义域内没有最大值和最小值，

当 $x>0$ 时，$x+\dfrac{a}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{a}{x}}=2\sqrt{a}\left(x=\sqrt{a}\right)$，有最小值 $2\sqrt{a}$；

当 $x<0$ 时，$x+\dfrac{a}{x}=-\left[(-x)+\dfrac{a}{-x}\right]\le -2\sqrt{(-x)\cdot\dfrac{a}{-x}}=-2\sqrt{a}\left(x=-\sqrt{a}\right)$，有最大值 $-2\sqrt{a}$。

极值：在 $x=-\sqrt{a}$ 时取极大值 $f\left(-\sqrt{a}\right)=-2\sqrt{a}$，在 $x=\sqrt{a}$ 时取极小值 $f\left(\sqrt{a}\right)=2\sqrt{a}$。

3. 应用双勾函数的性质求解最值问题及优势

例 3.1 求函数 $y=\dfrac{4}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{4}$ 的最小值，$x\in(0,\pi)$。

利用基本不等式求解：

$\because x\in(0,\pi)$，$\therefore \sin x>0$，$\sin x\in(0,1]$，由基本不等式 $\dfrac{a+b}{2}\ge 2\sqrt{ab}$，

得 $\dfrac{4}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{4}\ge 2\sqrt{\dfrac{4}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{4}}=2$，因此 $y_{\min}=2$，

显然这个结论不正确，一般地，利用基本不等式求最值时，应关注不等式中的“等号”能否成立[10]。当且仅当 $\dfrac{4}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{4}$ 时，才能取得最小值，此时 $\sin x=4$ 与 $\sin x$ 的取值范围是 $(0,1]$ 矛盾，所以不能用这个方法求其最值。那么如何求解这个问题，可以先回归到这个函数的基本性质，利用单调性求解。

利用双勾函数性质求解：

令 $\sin x=t$，$x\in(0,\pi)$，则 $t\in(0,1]$，

$\therefore y=\dfrac{4}{t}+\dfrac{t}{4}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{16}{t}\right)$，$t\in(0,1]$，

由于 $a=16$，$\therefore$ 双勾函数 $y=\left(t+\dfrac{16}{t}\right)$ 在 $(0,4]$ 是减函数，

$\therefore y=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{16}{t}\right)$ 在 $(0,1]$ 上为减函数，

当 $t=1$ 时，$y_{\min}=\dfrac{1}{4}(1+16)=\dfrac{17}{4}$，当 $\sin x=1$ 时，$x=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y_{\min}=\dfrac{17}{4}$。

小结：在许多题目中研究单调性及最值问题时，很多资料中都提到了 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}(a,b>0)$，模型，有些不能用基本不等式求解，我们可以先将其变形为：

$$f(x)=a\left(x+\frac{\frac{b}{a}}{x}\right)(a,b>0)，再令 \frac{b}{a}=k，$$

即可按照双勾函数的性质来求最值。从例题中可以发现，当自变量取值范围取不到 $x=\sqrt{k}$ 时，只能用双勾函数的性质来进行分析讨论最终求解，由此可见，能利用双勾函数解决基本不等式解决不了的问题，这就是双勾函数解题带来的严谨性和便利性。

例 3.2 已知 $x<\frac{3}{2}$，求函数 $y=2x-1+\frac{1}{2x-3}$ 的最大值。

解：$\because x<\frac{3}{2}$，$\therefore 3-2x>0$，

$\therefore y=2x-1+\frac{1}{2x-3}=-\left(3-2x+\frac{1}{3-2x}\right)+2$，

$\therefore y=2-\left(3-2x+\frac{1}{3-2x}\right)\le 2-2=0$，

当且仅当 $3-2x=\frac{1}{3-2x}$ 时，等号成立，得 $x_1=2$ (舍去)，$x_2=1$，

即 $x_2=1$ 时，等号成立，$y_{\max}=0$。

分析：若将条件改为 $x\le\frac{1}{2}$，求其最大值。自变量的范围改变后我们发现，$x_1=2, x_2=1$ 这两个值都不在自变量范围内，那么均值不等式取等号就不成立，也就是说利用均值不等式求解的结果是错误的[11]。这时可以考虑结合换元法用双勾函数的性质来求解。

利用双勾函数性质求解：

$$令\ 3-2x=k，\because x\le\frac{1}{2}，\therefore k\in[2,+\infty)，$$

那么题目就变为求 $f(k)=-\left(k+\frac{1}{k}\right)+2$ 的最大值。

由双勾函数单调性 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 上单调递增，得 $f(k)=k+\frac{1}{k}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，结合自变量取值范围，那么 $f(k)=-\left(k+\frac{1}{k}\right)+2$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减。

$$\therefore f(k)_{\max}=f(2)=-\frac{1}{2}，\ 3-2x=2，\ x=\frac{1}{2}，$$

$$\therefore 当\ x=\frac{1}{2}\ 时，\ y_{\max}=-\frac{1}{2}。$$

小结：这里利用双勾函数的性质解决了基本不等式解决不了的问题，发现双勾函数单调性解题的适用范围更广，基本不等式往往在取等号成立的问题上受定义域的限制。遇到这类题目可以归为一种解题模型，先换元，再结合自变量取值范围求出函数的单调区间，最后可求出最值，这一解题技巧为我们解决问题提供了极大的便利。

例 3.3 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$，求其最值。

解：利用基本不等式求解：

$f(x)=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，$\because \sqrt{x^2+4}>0$，$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$，

$\therefore \sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ge 2\sqrt{1}=2$，当且仅当 $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 时基本不等式成立，即 $x^2+4=1$，$x^2=-3$。由一个数的平方是非负的，所以此时等号不成立，那么就不能得到 $f(x)_{\min}=2$。

所以要利用双勾函数性质求解：

$$f(x)=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}，\ 令\ t=\sqrt{x^2+4}，\ \therefore f(t)=t+\frac{1}{t}，$$

定义域：$t=\sqrt{x^2+4}$，$x^2\ge 0$，$x^2+4\ge 4$，$\therefore\sqrt{x^2+4}\ge 2$，$\therefore t\ge 2$。

$\because f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，那么在定义域 $[2,+\infty)$ 内肯定也单调递增；

$$\therefore f(x)_{\min}=f(t)_{\min}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}。$$

小结： 首先用拆项法将原函数变形，使之成为乘积是定值的形式，这时会优先考虑用基本不等式求最值，但一定要满足“一正二定三相等”的条件，这道题目中，$\sqrt{x^2+4}$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 都为偶次方根是正数满足“一正”，乘积是定值满足“二定”，由于验证“三相等”时等号不成立，所以要应用双勾函数的性质求解。求最值时须注意定义域的取值范围，可根据双勾函数的性质判断该函数在定义域内的单调性，让解题过程更高效、严谨，从而使大部分同学都能准确无误的解决这类问题。

例 3.4 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}(x\in R)$ 的最小值。

解： 令 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=u$，$u\ge 2$，$f(x)=g(u)=u+\dfrac{2}{u}$ 是双勾函数，

由双勾函数的单调性性质可得：

$g(u)=u+\dfrac{2}{u}$ 在 $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ 上单调递增，那么在 $[2,+\infty)$ 上也单调递增，所以 $g(u)$ 的最小值是 $g(2)=2+1=3$，即函数 $f(x)$ 的最小值是 3。

小结： 换元时要注意 u 的范围，双勾函数 $g(u)=u+\dfrac{2}{u}$ 中 $u\in[2,+\infty)$，所以这时的最小值不是 $g\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$，而是根据定义域的取值范围求其最值。

例 3.5 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}(x>0)$ 的最大值。

解： 由于 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{x}+3}$，$\because x>0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $g(x)=x+\dfrac{2}{x}$，由双勾函数的基本性质，结合定义域可得：

$g(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 在 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 上单调递增，$\left(0,\sqrt{a}\right]$ 上单调递减。

$\because a=2$，$\therefore g(x)=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ 单调递增，

即函数 $g(x)$ 在 $x=\sqrt{2}$ 处有最小值，$\therefore g(x)_{\min}=\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

那么 $f(x)_{\max}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}=3-2\sqrt{2}$。

小结： 利用分式的基本性质，分子分母同时除以 x，出现了双勾函数 $x+\dfrac{a}{x}(x>0)$ 模型，把它“拿出来”单另看，按其性质可计算出最小值，这里考察了一个复合函数单调性的问题，$g(x)$ 取最小值，那么 $f(x)$ 取最大值。

归纳：利用基本不等式和“双勾”函数的模型这两种方法解决有关最值问题时，如何在解题中选择更合适的方法呢？通过以上例题可见：若 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}(k>0)$，则当自变量能取到 $x=\sqrt{k}$ 时，可以直接利用基本不等式 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 求解，反之，自变量的范围取不到 $x=\sqrt{k}$ 时，就要使用“双勾”函数的单调性来进行分析求解，双勾函数和基本不等式在求解最值方面其实是相通的，但若受到定义域取值范围的限

制，往往要拜托双勾函数，即可使解决这类问题更严谨、不易出错。

4. 探讨双勾函数求最值的复杂应用

已知函数 $y=x+\frac{a}{x}$ 有如下性质：如果常数 $a>0$，那么该函数在 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 上是减函数，在 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 上是增函数。

(1) 研究函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}\left(\text{常数 } c>0\right)$ 在定义域内的单调性：

分析：首先函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}\left(\text{常数 } c>0\right)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，这是一个复合函数，内层是二次函数 $t=x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上是个增函数，外层是双勾函数 $y=t+\frac{c}{t}$，由已知得：当 $t\in\left(0,\sqrt{c}\right]$ 时单调递减，当 $t\in\left[\sqrt{c},+\infty\right)$ 时单调递增。

其次根据“同增异减”讨论复合函数的单调性，是指复合函数的内层函数和外层函数在定义域内单调性相同时，那么复合函数在该定义域内就是个增函数，反之，若单调性相反，那么该复合函数在定义域内就是减函数。可以看出 $t=\sqrt{c}$ 时左右两侧单调性不同，可得 $x^2=t=\sqrt{c}$， $x=\sqrt[4]{c}$， $\therefore y=x^2+\frac{c}{x^2}$ 在 $\left(0,\sqrt[4]{c}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt[4]{c},+\infty\right)$ 上单调递增。

最后由于函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}$ 是个偶函数，图象关于 y 轴对称，以上分析的是 y 轴右侧的单调性，所以可得 y 轴左侧的单调性：在 $\left(-\infty,-\sqrt[4]{c}\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\sqrt[4]{c},0\right)$ 上单调递增。

证明：$\because$ 分母不为 0，$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

设 $0<x_1<x_2$， $y_1=x_1^2+\frac{c}{x_1^2}$， $y_2=x_2^2+\frac{c}{x_2^2}$，

$$y_2-y_1=x_2^2+\frac{c}{x_2^2}-x_1^2-\frac{c}{x_1^2}=\left(x_2^2-x_1^2\right)+c\left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2}\right)=\left(x_2^2-x_1^2\right)+c\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2x_2^2}$$

$$=\left(x_2^2-x_1^2\right)\left(1-\frac{c}{x_1^2x_2^2}\right)=\frac{\left(x_2^2-x_1^2\right)\left(x_1^2x_2^2-c\right)}{x_1^2x_2^2}.$$

当 $\sqrt[4]{c}\le x_1<x_2$ 时，$\because x_1^2<x_2^2$， $\therefore x_2^2-x_1^2>0$， 又 $\because x_1^2\ge\sqrt{c},x_2^2>\sqrt{c}$， $\therefore x_1^2x_2^2>c$， 即 $x_1^2x_2^2-c>0$，且 $x_1^2x_2^2>0$， $\therefore y_2-y_1>0$， 即 $y_2>y_1$， 根据函数单调性的定义，函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}$ 在 $\left[\sqrt[4]{c},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $0<x_1<x_2\le\sqrt[4]{c}$ 时，此时 $x_1^2<x_2^2$， $\therefore x_2^2-x_1^2>0$， 又 $\because 0<x_1^2<x_2^2\le\sqrt{c}$，

$\therefore x_1^2x_2^2<c$，即 $x_1^2x_2^2-c<0$，且 $x_1^2x_2^2>0$， $\therefore y_2-y_1<0$，即 $y_2<y_1$，那么函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}$ 在 $\left(0,\sqrt[4]{c}\right]$ 上单调递减；

利用函数的奇偶性：又 $\because y(-x)=(-x)^2+\frac{c}{(-x)^2}=x^2+\frac{c}{x^2}=y(x)$， $\therefore$ 函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}$ 是偶函数。由偶函数的对称性质可得：

函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt[4]{c}\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\sqrt[4]{c},0\right)$ 上单调递增。

综上，函数 $y=x^2+\frac{c}{x^2}(c>0)$ 的单调递增区间是 $\left[-\sqrt[4]{c},0\right)$ 和 $\left[\sqrt[4]{c},+\infty\right)$；单调递减区间是 $\left(-\infty,-\sqrt[4]{c}\right]$ 和 $\left(0,\sqrt[4]{c}\right]$。

(2) 对函数 $y=x+\frac{a}{x}$ 和 $y=x^2+\frac{a}{x^2}(a>0)$ 推广，使它们都是推广的函数的特例，研究推广后的函数的单调性。

分析：函数 $y=x+\frac{a}{x}$ 分界的点是 $x=a^{\frac{1}{2}}$，函数 $y=x^2+\frac{a}{x^2}(a>0)$ 分界的点是 $x=a^{\frac{1}{4}}$，可以把函数推广为： $y=\left(x^n+\frac{a}{x^n}\right)$，其中 n 是正整数。

当 n 为奇数时，函数 $y=\left(x^n+\frac{a}{x^n}\right)$ 在 $\left(0,a^{\frac{1}{2n}}\right]$ 上是减函数，在 $\left[a^{\frac{1}{2n}},+\infty\right)$ 是增函数，在 $\left(-\infty,-a^{\frac{1}{2n}}\right]$ 上是增函数，在 $\left[-a^{\frac{1}{2n}},0\right)$ 上是减函数；

当 n 为偶数时，函数 $y=\left(x^n+\frac{a}{x^n}\right)$ 在 $\left(0,a^{\frac{1}{2n}}\right]$ 上是减函数，在 $\left[a^{\frac{1}{2n}},+\infty\right)$ 是增函数，在 $\left(-\infty,-a^{\frac{1}{2n}}\right]$ 上是减函数，在 $\left[-a^{\frac{1}{2n}},0\right)$ 上是增函数。

例 4.1 如果函数 $y=x+\frac{2^b}{x}(x>0)$ 的值域为 $[6,+\infty)$，求 b 的值；

解：$\because a=2^b$，$\therefore x=\sqrt{2^b}$ 处有最小值，值域为 $[6,+\infty)$，$\therefore y_{\min}=6$，

即 $\sqrt{2^b}+\frac{2^b}{\sqrt{2^b}}=6$， $\sqrt{2^b}=3$， $2^b=9$， $\therefore b=\log_2 9$。

例 4.2 利用上述结论，求函数 $F(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ (n 是正整数)在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值和最小值。

解：用二项式定理把 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ 拆开，

$\because \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n=\left(x^2+x^{-1}\right)^n+\left(x^{-2}+x\right)^n$，

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ C_n^0 项： $C_n^0\left(x^2\right)^n\left(x^{-1}\right)^0=C_n^0x^{2n}$； $\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ C_n^0 项： $C_n^0\left(x^{-2}\right)^n x^0=C_n^0\frac{1}{x^{2n}}$；

$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ C_n^0 项： $=C_n^0x^{2n}+C_n^0\frac{1}{x^{2n}}=C_n^0\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)$；

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ C_n^1 项： $=C_n^1(x^2)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^1+C_n^1\left(\frac{1}{x^2}\right)^{n-1}x^1=C_n^1x^{2n-3}+C_n^1x^{3-2n}=C_n^1\left(x^{2n-3}+\frac{1}{x^{2n-3}}\right)$；

以此类推

$$\therefore F(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$$
$$=C_n^0\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)+C_n^1\left(x^{2n-3}+\frac{1}{x^{2n-3}}\right)+\cdots+C_n^r\left(x^{2n-3r}+\frac{1}{x^{2n-3r}}\right)+\cdots+C_n^n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right),$$

利用上述推广的结论，函数 $\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)$、$\left(x^{2n-3}+\frac{1}{x^{2n-3}}\right)$、$\left(x^{2n-3r}+\frac{1}{x^{2n-3r}}\right)$、$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$ 都是在 $(0,1]$ 是

减函数，$[1,+\infty)$ 是增函数，

因此函数 $F(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是减函数，在 $[1,2]$ 上是增函数。

$\therefore F(x)_{\min}=F(1)=2^n+2^n=2^{n+1}$， $F(x)_{\max}=F(2)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}\right)^n+\left(\frac{9}{4}\right)^n$.

归纳：由于其图像类似“双勾”形状，故我们称其为双勾函数，这类函数在解题中经常会遇到，且许多看似不是双勾函数的问题，都可以转化为双勾函数来处理，所以双勾函数可以作为一种解题模型[6]。

5. 结束语

本文主要介绍了利用双勾函数的性质求最值的方法，其优势在于解决数学中基本不等式解决不了的最值问题，若考生熟悉掌握此类函数的性质，对求解的函数进行配凑或换元，构造形式为 $f(t)=t+\frac{a}{t}(a>0)$ 的双勾函数，并且注意当等号成立时在定义域范围内能取到，即可根据双勾函数的性质利用待定系数法轻松求解。希望读者能通过此篇掌握这一类问题的求解方法，当自变量范围不满足基本不等式条件时，学会用双勾函数的单调性来解决问题，同时可以把其当成一种解题技巧，不仅培养了学生的发散思维，而且让学生学会用数学的思维解决问题。

基金项目

国家自然科学基金(12361072)；2023 自治区自然科学基金面上项目(2023D01A36)和 2023 自治区自然科学基金青年项目(2023D01B48)；2023 新疆维吾尔自治区研究生精品课项目《抽象代数》；2022 新疆师范大学教学创新团队项目。

参考文献

[1] 李文静. 高中代数与不等式在最值问题中的解题应用[J]. 数理天地(高中版), 2024(13): 40-41.

[2] 王立彬. 双勾函数与基本不等式[J]. 中学生数理化(高考使用), 2019(19): 13-14.

[3] 赵玉龙. “双勾”函数的性质与应用——对一道高考题的思考[J]. 课程教材教学研究(教育研究), 2014(1): 39-40.

[4] 胡小平. “双勾”函数的性质及在高考题中的应用[J]. 中学数学, 2007(1): 9-10.

[5] 陈晓明. 基本不等式的应用[J]. 理科考试研究, 2017, 24(19): 18-21.

[6] 周方旦, 高明. 不忘初“型”, 方得始终——例谈运用双勾函数模型解题[J]. 中学数学研究, 2024(4): 49-50.

[7] 张建设. “双勾函数”在初等数学中的解法研究[J]. 新智慧, 2021(6): 65-66.

[8] 李昭平. 双勾函数 f(x) = x + a/x (a > 0)知多少[J]. 数理化学习(高中版), 2017(3): 36-38.

[9] 孙海建. 由特殊到一般, 探究“双勾”函数本质[J]. 数学教学通讯, 2015(36): 58-60.

[10] 董存会. 利用基本不等式求最值的常用策略[J]. 高中数理化, 2024(7): 52-53.

[11] 陈宁. 由均值不等式联想到对勾函数[J]. 考试周刊, 2019(40): 62-63.