

一维扩展的Fisher-Kolmogorov方程的 BDF2-直接间断Galerkin算法

王春娇, 王 蕾*

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2025年3月24日; 录用日期: 2025年4月17日; 发布日期: 2025年4月25日

摘 要

本文主要研究一维扩展的Fisher-Kolmogorov方程的有效数值算法。通过结合BDF2时间离散格式与直接间断有限元算法对一维扩展的Fisher-Kolmogorov方程进行求解。首先, 引入辅助变量, 将四阶的扩展的Fisher-Kolmogorov方程转化为低阶耦合方程, 然后利用直接间断有限元求解耦合方程, 最后使用BDF2方法, 对时间格式进行离散。本文给出了详细的数值算法, 并通过一个一维算例进行数值试验, 验证了算法的有效性和收敛性。

关键词

EFK, 直接间断Galerkin, BDF2

The BDF2-Direct Discontinuous Galerkin Algorithm for One-Dimensional Extended Fisher-Kolmogorov Equation

Chunjiao Wang, Lei Wang*

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Mar. 24th, 2025; accepted: Apr. 17th, 2025; published: Apr. 25th, 2025

Abstract

This paper mainly studies the effective numerical algorithm for the one-dimensional extended

*通讯作者。

文章引用: 王春娇, 王蕾. 一维扩展的 Fisher-Kolmogorov 方程的 BDF2-直接间断 Galerkin 算法[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 721-730. DOI: 10.12677/aam.2025.144200

Fisher-Kolmogorov equation. By combining the BDF2 time discretization format with the direct discontinuous finite element algorithm, the one-dimensional extended Fisher-Kolmogorov equation is solved. Firstly, an auxiliary variable is introduced to transform the fourth-order extended Fisher-Kolmogorov equation into a low-order coupled equation. Then, the coupled equation is solved by using the direct discontinuous finite element method. Finally, the BDF2 method is used to discretize the time scheme. The detailed numerical algorithm is presented in this paper, and a one-dimensional example is used for numerical experiments to verify the effectiveness and convergence of the algorithm.

Keywords

EFK, Direct Discontinuous Galerkin, BDF2

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要对以下具有周期边界条件的一维扩展的 Fisher-Kolmogorov (EFK) 方程

$$u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} = -f(u), (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T], \quad (1)$$

进行了数值研究, 其初值为

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

其中 u 和 u_{xx} 都满足周期边界, $f(u) = u^3 - u$, $\bar{\Omega} = [a, b]$ 是空间区间, γ, T 是正常数。

当 $\gamma = 0$ 时, 得到标准的 Fisher-Kolmogorov 方程, 它是由 Fisher 和 Kolmogorov 于 1937 年, 在描述生物种群的扩散与适应间的相互作用时提出的。后来, 由 Couillet 等人[1]、Dee 和 van Saroos [2]-[4] 根据实际需要增加了四阶导数项得到扩展的 Fisher-Kolmogorov (EFK) 方程。目前该方程在相变动力学和模式形成问题中具有重要地位, 并且被广泛地应用于双稳态系统的图式形成[2]、液晶中畴壁的传播问题[2] 等方面。

对于 EFK 方程的求解, 有以下数值方法。一维情形下, Danumjaya 和 Pani [5] 开发并分析了二阶分裂法与正交三次样条配点法的组合方案, 同时提出 C^1 连续有限元方法, 提升了数值解的精度与连续性, 为 EFK 方程的离散化提供了有效框架。Onyejekwe [6] 利用边界元方法对其进行了数值分析。Danumjay [7] 使用有限元解的半离散格式和 Crank-Nicolson 全离散格式, 推导出最优误差估计。在二维情形下, Khiari 和 Omrani [8]、He [9] 分别提出了 Crank-Nicolson 有限差分格式和一种二阶线性隐式有限差分格式, 证明了数值解的存在唯一性, 并得到了其在 L^∞ 范数下的收敛性结果。EFK 的混合有限元方法也一直受到人们的关注, Danumjaya 和 Pani [10] 利用协调线性三角形 P_1 元, 通过引入中间变量 $v = \Delta u$ 建立了一个低阶混合元格式, 在半离散和 Euler 全离散格式下, 证明了逼近解的存在唯一性和稳定性, 并得到了在 H^1 -模意义下和 v 在 L^2 -模意义下 $O(h^2)$ 阶的最优误差估计。Wang 等人[11] 提出一种新的混合有限元格式求解 EFK 方程, 利用协调线性三角形 P_1 元和分片常数 $P_0 \times P_0$ 元, 借助投影算子, 在半离散格式和 Crank-Nicolson 全离散格式下, 导出 u 和 v 在 H^1 -模意义下的最优误差估计。杨和张[12] 通过引入中间变量 $v = -\Delta u$, 在内罚间断有限元框架下用 Wilson 元, 得到原始变量和中间变量的 $O(h^2)$ 和 $O(h^2 + \tau)$ 阶的最优误差估计结果。

传统有限差分法(FDM)在处理有间断的问题时存在固有缺陷, 其基于网格点值的差分格式在间断处会引发数值振荡。而间断有限元(DG)方法允许单元间分片多项式的不连续性, 突破了这一限制。该方法的核心优势在于: 通过提升单元内插值多项式的阶数, 实现任意阶精度, 克服了传统有限元法(FEM)需全局连续性和有限体积法(FVM)受限于一阶精度的不足; 在处理复杂边界条件时, DG 方法在局部弱形式中处理边界通量, 无需网格与边界严格匹配; 通过引入数值通量函数, 在保持高阶精度的同时有效抑制间断附近的数值振荡。直接间断有限元(DDG)方法相较其他 DG 方法, 不是改变方程的弱格式, 而是改变数值流通量。2009 年, Liu 和 Yan [13] 基于方程的弱形式, 在单元边界处直接引入相容且守恒的数值通量, 提出 DDG 方法求解非线性扩散方程, 并且给出保证稳定性的一般形式的数值通量。Liu 和 Yan [13][14] 于 2009 年和 2010 年提出的两种 DDG 方法都缺乏对称性, 因此很难得到 L^2 范数下的误差估计。2013 年, Vidden 和 Yan [15] 在弱形式中引入测试函数的导数的数值通量, 且与 u_x 的数值通量相同, 得到对称的 DDG 方法, 数值实验表明对称的 DDG 方法对于数值通量中的系数选择并不敏感, 存在大量可容许的数值通量且能够达到最优的 $(k+1)$ 阶精度。

近年来, EFK 方程的数值方法研究取得了显著进展。传统有限差分法虽然实现简单, 但在处理四阶导数时需引入多步离散, 导致计算复杂度增加, 且易在间断处引发数值振荡[8] [9]。有限元法通过弱形式离散可部分缓解此问题[5], 但高阶连续性要求限制了其灵活性。局部间断有限元法[16]通过分片多项式提升空间离散的灵活性, 但需额外处理数值通量稳定性问题。此外, 混合有限元法通过变量降阶简化了四阶项的处理[10] [11], 但非线性项的稳定性仍是挑战。

近期, 一些新方法被引入 EFK 方程, Sun 等人[17]通过凸分裂技术与变步长 BDF2 格式的结合, 有效提升了非线性项处理的数值稳定性, 为长时间尺度模拟提供了理论保障; 王[18]针对四阶算子的间断有限元离散, 建立了最优误差估计框架, 揭示了间断 Galerkin 方法在高阶导数问题中的收敛特性; 张[19]提出非标准有限元构造方法, 为非线性反应项的处理提供了新思路; 而 Ismail 等人[20]则从全离散 Galerkin 格式的角度, 系统分析了时空耦合误差的传播机制。这些工作共同推进了 EFK 方程数值解法的理论深度。

本文引入中间变量 $w = u_{xx}$ 将四阶的 EFK 方程转化为低阶耦合方程, 有效规避传统方法处理高阶导数的连续性难题; 在空间上使用对称的 DDG 方法, 克服早期 DDG 格式非对称性导致的稳定性限制, 并实现对间断附近数值振荡的抑制, 避免全局连续性约束, 同时保证最优 $(k+1)$ 阶空间收敛, 时间上采用 BDF2 方法进行离散, 以求解 EFK 方程。基于全离散 DDG 数值格式, 本文给出了详细的数值算法, 并通过一个一维算例进行了数值试验, 验证了算法的有效性和收敛性。本文的布局如下: 在第 2 节中, 构造了全离散直接间断有限元数值格式; 在第 3 节中, 我们提供了一个详细的数值算法; 在第 4 节中, 通过数值计算结果, 验证算法的有效性; 在第 5 节中, 我们对本文做一个简要的总结。

2. DDG 全离散数值格式

在本节中, 时间离散格式使用 BDF2, 构造全离散(1)的 DDG 数值格式。

首先引 DDG 方法中的常用符号。划分空间区间 $\bar{\Omega} = [a, b]$, 其中 $a = x_{1/2} < x_{2/3} < \dots < x_{N+1/2} = b$, 每个单元区间表示为 $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, 其中 $1 \leq j \leq N$ 。单元区间中心和单元区间长度表示为

$x_j = \frac{1}{2}(x_{j-1/2} + x_{j+1/2})$, $h_j = x_{j-1/2} - x_{j+1/2}$, $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$, $u_{j+1/2}^+$ 和 $u_{j+1/2}^-$ 分别表示为 I_{j+1} 左端点 $x_{j+1/2}$ 处 u 的值和 I_j 右端点 $x_{j+1/2}$ 处 u 的值。每个单元边界上 u 的跳跃值定义为 $[u] = u^+ - u^-$, 均值定义为

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)。$$

通过引入辅助变量 $w = -u_{xx}$ 将问题(1)转化为以下耦合系统

$$\begin{cases} u_t - \gamma w_{xx} + w = -f(u), & (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T], \\ w = -u_{xx}, & (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $f(u) = u^3 - u$ 。然后, 为了进一步得到全离散格式, 将时间区间 $[0, T]$ 划分为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$ 。时间步长为 $\tau = T/M$ 且整数 $M > 0$ 。为方便起见, 定义 $u^{n+1} = u(x, t_{n+1})$ 。

对于任意给定的单元 $I_j, j = 1, 2, \dots, N$, 以及相应的函数 v, r , 我们给出内积和 L^2 范数的定义如下:

$$(u, v)_{I_j} = \int_{I_j} u v dx, \quad \|u\|_{I_j}^2 = (u, u)_{I_j}.$$

对方程(3)两侧同时乘以光滑函数 v 和 $\varphi \in H^1(\bar{\Omega})$, 并在每个单元上进行分部积分可以得到方程(3)的局部变分形式: 求 $u: [0, T] \rightarrow H^1(\bar{\Omega})$, 使得

$$\begin{cases} (u_t, v)_{I_j} + \gamma (w_x, v_x)_{I_j} - \gamma w_x v|_{\partial I_j} + (w, v)_{I_j} + (f(u), v)_{I_j} = 0, \\ (w, \varphi)_{I_j} - (u_x, \varphi_x)_{I_j} + u_x \varphi|_{\partial I_j} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

对所有单元求和, 可得在 $t = t_{n+1}$ 处(3)的全局弱形式为

情形I: $n = 0$

$$\begin{cases} (\delta_t u^1, v) + \gamma (w_x^1, v_x) - \gamma \sum_{j=1}^N w_x^1 [v]|_{\partial I_j} + (w^1, v) + (f(u^1), v) = (R_1^1, v), \\ (w^1, \varphi) - (u_x^1, \varphi_x) + \sum_{j=1}^N u_x^1 [\varphi]|_{\partial I_j} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

情形II: $n \geq 1$

$$\begin{cases} (\delta_t u^{n+1}, v) + \gamma (w_x^{n+1}, v_x) - \gamma \sum_{j=1}^N w_x^{n+1} [v]|_{\partial I_j} + (w^{n+1}, v) + (f(u^{n+1}), v) = (R_2^{n+1}, v), \\ (w^{n+1}, \varphi) - (u_x^{n+1}, \varphi_x) + \sum_{j=1}^N u_x^{n+1} [\varphi]|_{\partial I_j} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

其中时间方向采用 BDF2 离散形式, 表示为:

$$\delta_t u^{n+1} = \begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, & n = 0, \\ \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\tau}, & n \geq 1. \end{cases}$$

并且有

$$R_1^1 = \frac{u^1 - u^0}{\tau} - u_t^1 = O(\tau), \quad R_2^{n+1} = \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\tau} - u_t^{n+1} = O(\tau^2). \quad (7)$$

为了进一步得到全离散数值格式, 定义分片多项式空间

$$V_h^k = \{v: v \in P^k(I_j), v \in (I_j), j = 1, \dots, N\}$$

其中 $P^k(I_j)$ 表示每个单元 I_j 上次数不超过 $k (k \geq 0)$ 的多项式全体。设 $u_h^{n+1}, w_h^{n+1} \in V_h^k$ 分别为 u^{n+1}, w^{n+1} 的近似, 为了保证稳定性, 增加额外的边界项, 对任意试探函数 v_h 和 $\varphi_h \in V_h^k$, 可以得到全离散的 DDG 格式。

情形I: $n = 0$

$$\begin{cases} (\delta_t u_h^1, v_h) + \gamma (w_{h,x}^1, v_{h,x}) + \gamma \sum_{j=1}^N (\widehat{w_{h,x}^1} [v_h])_{j+\frac{1}{2}} + \gamma \sum_{j=1}^N ([w_h^1] \widehat{v_{h,x}})_{j+\frac{1}{2}} + (w_h^1, v_h) + (f(u_h^1), v_h) = 0, \\ (w_h^1, \varphi_h) - (u_{h,x}^1, \varphi_{h,x}) - \sum_{j=1}^N (\widehat{u_{h,x}^1} [\varphi_h])_{j+\frac{1}{2}} - \sum_{j=1}^N ([u_h^1] \widehat{\varphi_{h,x}})_{j+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

情形II: $n \geq 1$

$$\begin{cases} (\delta_t u_h^{n+1}, v_h) + \gamma (w_{h,x}^{n+1}, v_{h,x}) + \gamma \sum_{j=1}^N (\widehat{w_{h,x}^{n+1}} [v_h])_{j+\frac{1}{2}} + \gamma \sum_{j=1}^N ([w_h^{n+1}] \widehat{v_{h,x}})_{j+\frac{1}{2}} + (w_h^{n+1}, v_h) + (f(u_h^{n+1}), v_h) = 0, \\ (w_h^{n+1}, \varphi_h) - (u_{h,x}^{n+1}, \varphi_{h,x}) - \sum_{j=1}^N (\widehat{u_{h,x}^{n+1}} [\varphi_h])_{j+\frac{1}{2}} - \sum_{j=1}^N ([u_h^{n+1}] \widehat{\varphi_{h,x}})_{j+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

其中, 数值流通量选取为:

$$\begin{cases} \widehat{u_{h,x}} = \frac{\beta_0}{h} [u_h] + \bar{u}_{h,x} + \beta_1 h [u_{h,xx}], \\ \widehat{w_{h,x}} = \frac{\beta_0}{h} [w_h] + \bar{w}_{h,x} + \beta_1 h [w_{h,xx}], \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (\hat{v}_x)_{j+\frac{1}{2}} = -\frac{\beta_0}{h} (v^-) + \frac{1}{2} (v_x)^- - \beta_1 h (v_{xx})^-, \\ (\hat{v}_x)_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\beta_0}{h} (v^+) + \frac{1}{2} (v_x)^+ + \beta_1 h (v_{xx})^+, \\ (\hat{\varphi}_x)_{j+\frac{1}{2}} = -\frac{\beta_0}{h} (\varphi^-) + \frac{1}{2} (\varphi_x)^- - \beta_1 h (\varphi_{xx})^-, \\ (\hat{\varphi}_x)_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\beta_0}{h} (\varphi^+) + \frac{1}{2} (\varphi_x)^+ + \beta_1 h (\varphi_{xx})^+. \end{cases}$$

3. 算法实现

引入如下的双线性格式 $\mathbb{B}(u, v)$,

$$\mathbb{B}(u, v) = \sum_{j=1}^N \int_{I_j} u_x v_x \, dx + \sum_{j=1}^N (\widehat{u_x} [v])_{j+1/2} + \sum_{j=1}^N ([u] \widehat{v_x})_{j+1/2},$$

此时可得半离散格式为

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v_h) + \gamma \mathbb{B}(w_h, v_h) + (w_h, v_h) + (f(u_h), v_h) = 0, \\ (w_h, \varphi_h) - \mathbb{B}(u_h, \varphi_h) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

在第 j 个区间上, 通过取 $u_{h,j}, w_{h,j} \in V_h^k$, 我们有 $u_{h,j} = \sum_{i=0}^k u_{i,j} \phi_{i,j}$, $w_{h,j} = \sum_{p=0}^k w_{p,j} \phi_{p,j}$, 将这些代入到(11)

中, 并且令 $v_h = \phi_{m,j}$, $\varphi_h = \phi_{l,j}$, 我们可以得到(11)的有限元格式的矩阵形式

$$\begin{cases} \mathbf{blockMU}_t + \gamma \mathbf{blockW} + \mathbf{blockMW} = \mathbf{F}, \\ \mathbf{blockMW} - \mathbf{blockU} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{blockM} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & & & \\ & \mathbf{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_N \end{bmatrix}_{(k+1)N \times (k+1)N},$$

$$\mathbf{block} = \mathbf{blockA} + \mathbf{blockC},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{blockM}f(\mathbf{U}(t)),$$

$$\mathbf{U}(t) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)^T, \quad \mathbf{W}(t) = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)^T,$$

$$\mathbf{u}_j = (u_{0,j}, \dots, u_{k,j}), \mathbf{w}_j = (w_{0,j}, \dots, w_{k,j}), j = 1, \dots, N,$$

其中, 结合边界条件

$$\mathbf{blockA} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_N \end{bmatrix}_{(k+1)N \times (k+1)N},$$

$$\mathbf{blockC} = \begin{bmatrix} \mathbf{C2}_1 & \mathbf{C3}_1 & & & & \mathbf{C1}_1 \\ \mathbf{C1}_2 & \mathbf{C2}_2 & \mathbf{C3}_2 & & & \\ & \mathbf{C1}_3 & \mathbf{C2}_3 & \mathbf{C3}_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{C1}_{N-1} & \mathbf{C2}_{N-1} & \mathbf{C3}_{N-1} \\ \mathbf{C3}_N & & & & \mathbf{C1}_N & \mathbf{C2}_N \end{bmatrix}_{(k+1)N \times (k+1)N}.$$

$$\mathbf{C1}_j = 2\mathbf{CB}_j + \mathbf{CB1}_j + \mathbf{CB2}_j - \mathbf{EB1}_j^T - \mathbf{EB2}_j^T;$$

$$\mathbf{C2}_j = \mathbf{C21}_j + \mathbf{C22}_j;$$

$$\mathbf{C21}_j = 2\mathbf{DB}_j + \mathbf{DB1}_j + \mathbf{DB2}_j + \mathbf{DB1}_j^T + \mathbf{DB2}_j^T;$$

$$\mathbf{C22}_j = -2\mathbf{B}_j - \mathbf{B1}_j - \mathbf{B2}_j - \mathbf{B1}_j^T - \mathbf{B2}_j^T;$$

$$\mathbf{C3}_j = -2\mathbf{EB}_j - \mathbf{EB1}_j - \mathbf{EB2}_j + \mathbf{CB1}_j^T + \mathbf{CB2}_j^T;$$

其中

$$\mathbf{M}_j = \left((\phi_{i,j}, \phi_{m,j}) \right)_{(k+1) \times (k+1)},$$

$$\mathbf{A}_j = \left((\nabla \phi_{i,j}, \nabla \phi_{m,j}) \right)_{(k+1) \times (k+1)},$$

$$\mathbf{B}_j = -\frac{\beta_0}{h} \left(\Phi_{i,j} \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)},$$

$$\mathbf{CB}_j = -\frac{\beta_0}{h} \left(\Phi_{i,j-1} \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)},$$

$$\mathbf{DB}_j = \frac{\beta_0}{h} \left(\Phi_{i,j} \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)},$$

$$\mathbf{EB}_j = \frac{\beta_0}{h} \left(\Phi_{i,j+1} \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B1}_j &= \frac{1}{2} \left(\Phi_{i,j,x} \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{CB1}_j &= \frac{1}{2} \left(\Phi_{i,j,x} \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{DB1}_j &= \frac{1}{2} \left(\Phi_{i,j,x} \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{EB1}_j &= \frac{1}{2} \left(\Phi_{i,j,x} \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{B2}_j &= -\beta_1 h \left(\Phi_{i,j,xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{CB2}_j &= -\beta_1 h \left(\Phi_{i,j,xx} \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{DB2}_j &= \beta_1 h \left(\Phi_{i,j,xx} \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}, \\
\mathbf{EB2}_j &= -\beta_1 h \left(\Phi_{i,j,xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_m \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)_{(k+1) \times (k+1)}.
\end{aligned}$$

接下来, 我们给出(12)在 $n \geq 1$ 的全离散格式,

$$\begin{cases} \mathbf{blockM} \frac{3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\tau} + \gamma \mathbf{blockw}_h^{n+1} + \mathbf{blockMw}_h^{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h^n), \\ \mathbf{blockMw}_h^{n+1} - \mathbf{blocku}_h^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

我们可以将(13)简化为

$$\begin{cases} (\gamma \mathbf{block} + \mathbf{blockM}) \mathbf{w}_h^{n+1} + \frac{3}{2\tau} \mathbf{blockMu}_h^{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h^n) + \frac{2}{\tau} \mathbf{blockMu}_h^n - \frac{1}{2\tau} \mathbf{blockMu}_h^{n-1}, \\ \mathbf{blockMw}_h^{n+1} - \mathbf{blocku}_h^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \gamma \mathbf{block} + \mathbf{blockM} & \frac{3}{2\tau} \mathbf{blockM} \\ \mathbf{blockM} & -\mathbf{block} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_h^{n+1} \\ \mathbf{u}_h^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{u}_h^n) + \frac{2}{\tau} \mathbf{blockMu}_h^n - \frac{1}{2\tau} \mathbf{blockMu}_h^{n-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

4. 数值实验

在本节中, 我们将提供一个一维算例来验证算法的有效性和收敛性。

$$u_t + \gamma u_{xxx} - u_{xx} + f(u) = g(x, t), (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T],$$

初值为

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega},$$

其中 u 和 u_{xx} 都满足周期边界, 非线性项 $f(u) = u^3 - u$, $\bar{\Omega} = [a, b]$ 是空间区间, γ 是正常数。

在本算例中, 我们取 $\bar{\Omega} = [-4, 4]$, $T = 1$, 初值为 $u_0 = \sin(\pi x)$, 精确解 $u(x, t) = e^{-5t} \sin(\pi x)$, 源项 $g(x, t) = e^{-5t} \sin(\pi x) (-6 + \gamma \pi^4 + \pi^2 + e^{-10t} \sin^2(\pi x))$, 表 1 显示了 $\gamma = 0.001$ 的计算结果, 固定时间步长 $\tau = 1/3000$, 空间步长分别为 $h = 8/10, 8/20, 8/40, 8/80, 8/160, 8/320$ 给出算法的误差以及空间收敛阶。表 1 的数值结果表明全离散格式的空间收敛阶为 $O(h^{k+1})$ 。

Table 1. Spatial convergence results with a fixed time step $\tau = 1/3000$, $\gamma = 0.001$

表 1. 固定时间步长 $\tau = 1/3000$, $\gamma = 0.001$ 空间收敛结果

k	N	$\ u - u_h\ _{L^2}$	收敛阶
1	10	6.9474E-03	—
	20	3.1494E-03	1.1414
	40	1.0133E-03	1.6360
	80	2.7253E-04	1.8946
	160	6.9451E-05	1.9724
	320	1.7456E-05	1.9922
2	10	1.9750E-03	—
	20	1.8752E-04	3.3967
	40	2.0135E-05	3.2193
	80	2.4098E-06	3.0627
	160	3.1039E-07	2.9568
	320	4.0216E-08	2.9482

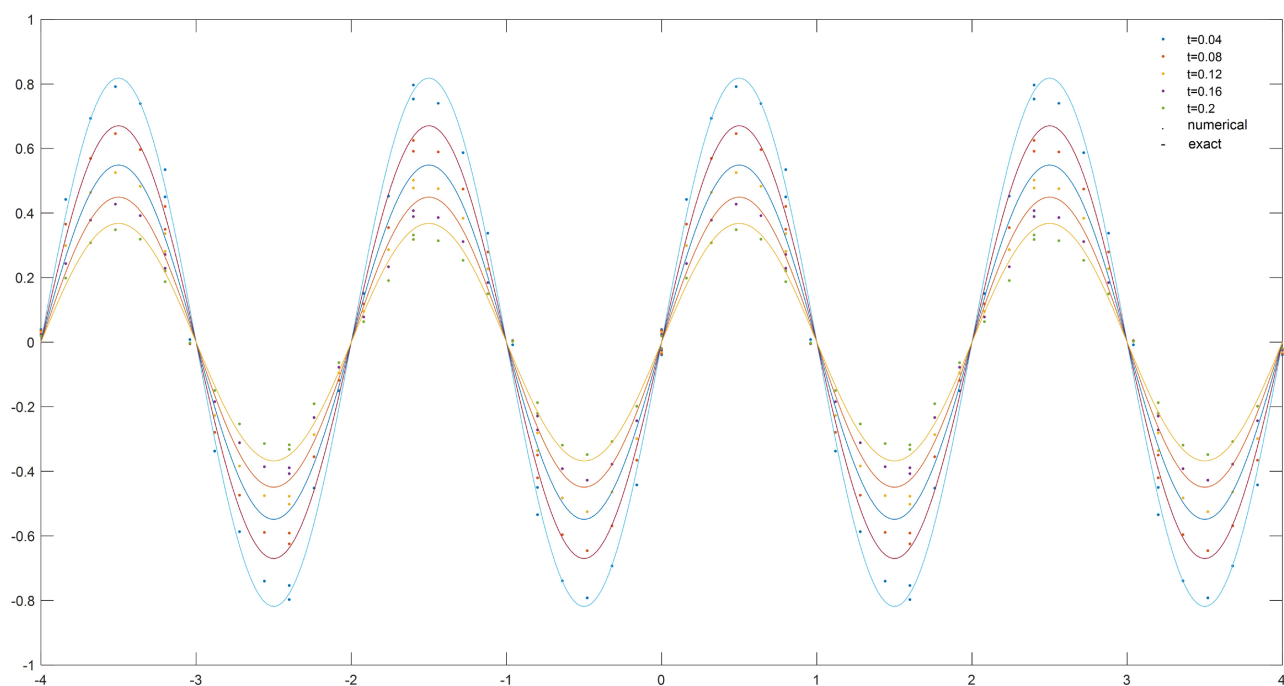


Figure 1. u and its numerical solution when $\gamma = 0.001, k = 2, h = 10$

图 1. $\gamma = 0.001, k = 2, h = 10$ 时 u 和其数值解

图 1 展示了 $\gamma = 0.001, k = 2, h = 8/10$ 时精确解与数值解的对比, 可见数值解在 $\bar{\Omega}$ 内与精确解基本一致, 但在每个小区间上仍存在偏差。图 2 进一步减小空间步长至 $h = 8/80$, 数值解与精确解几乎完全重合, 验证了算法的空间收敛性。

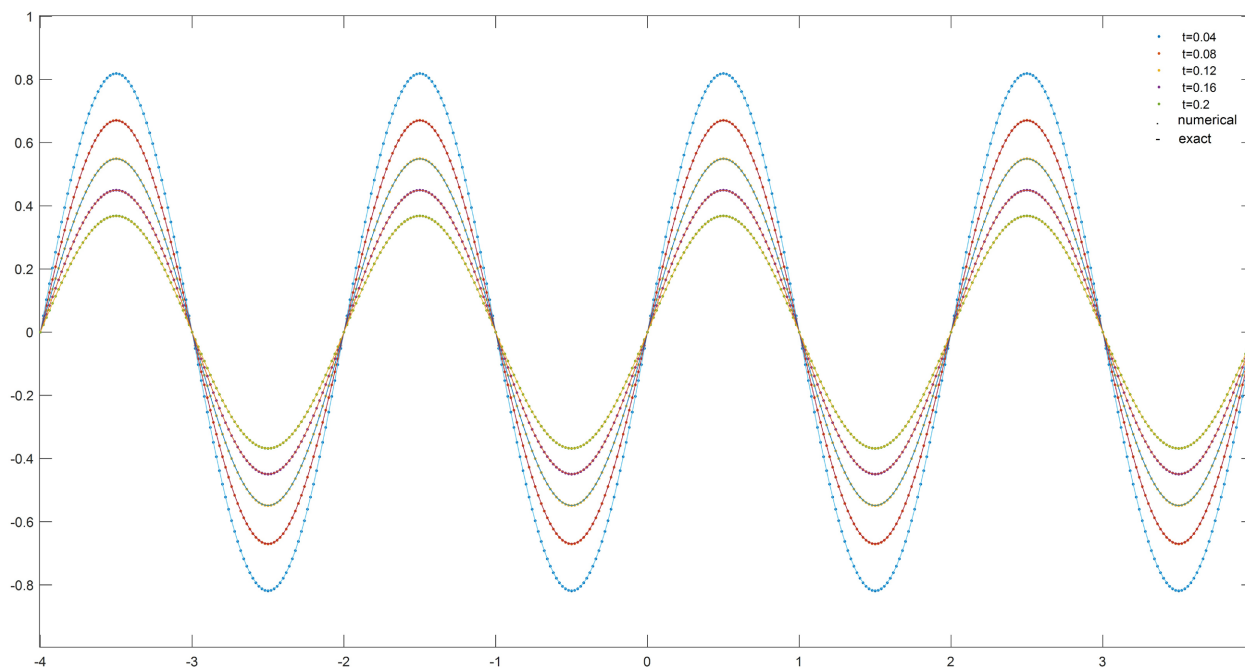


Figure 2. u and its numerical solution when $\gamma = 0.001, k = 2, h = 80$

图 2. $\gamma = 0.001, k = 2, h = 80$ 时 u 和其数值解

5. 总结

本文中, 将 BDF2 时间离散格式与空间上的 DDG 方法相结合求解 EFK 方程。通过引入一个辅助变量, 将 EFK 方程转换成一个低阶耦合系统, 使用 BDF2 时间离散格式与直接间断有限元方法得到全离散格式。我们给出了数值算法以及如何进行数值计算。最后通过数值算例验证算法的有效性。

参考文献

- [1] Couillet, P., Elphick, C. and Repaux, D. (1987) Nature of Spatial Chaos. *Physical Review Letters*, **58**, 431-434. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.58.431>
- [2] Dee, G.T. and van Saarloos, W. (1988) Bistable Systems with Propagating Fronts Leading to Pattern Formation. *Physical Review Letters*, **60**, 2641-2644. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.60.2641>
- [3] van Saarloos, W. (1987) Dynamical Velocity Selection: Marginal Stability. *Physical Review Letters*, **58**, 2571-2574. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.58.2571>
- [4] van Saarloos, W. (1988) Front Propagation into Unstable States: Marginal Stability as a Dynamical Mechanism for Velocity Selection. *Physical Review A*, **37**, 211-229. <https://doi.org/10.1103/physreva.37.211>
- [5] Danumjaya, P. and Pani, A.K. (2005) Orthogonal Cubic Spline Collocation Method for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **174**, 101-117. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.04.002>
- [6] Onyejekwe, O.O. (2015) A Direct Implementation of a Modified Boundary Integral Formulation for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **3**, 1262-1269. <https://doi.org/10.4236/jamp.2015.310155>
- [7] Danumjaya, P. (2016) Finite Element Methods for One Dimensional Fourth Order Semilinear Partial Differential Equation. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, **2**, 395-410.

- <https://doi.org/10.1007/s40819-015-0068-0>
- [8] Khiari, N. and Omrani, K. (2011) Finite Difference Discretization of the Extended Fisher-Kolmogorov Equation in Two Dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 4151-4160. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.09.065>
- [9] He, D. (2016) On The L^∞ -Norm Convergence of a Three-Level Linearly Implicit Finite Difference Method for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation in Both 1D and 2D. *Computers & Mathematics with Applications*, **71**, 2594-2607. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.026>
- [10] Danumjaya, P. and Pani, A.K. (2011) Mixed Finite Element Methods for a Fourth Order Reaction Diffusion Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **28**, 1227-1251. <https://doi.org/10.1002/num.20679>
- [11] Wang, J., Li, H., He, S., Gao, W. and Liu, Y. (2013) A New Linearized Crank-Nicolson Mixed Element Scheme for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *The Scientific World Journal*, **2013**, Article 756281. <https://doi.org/10.1155/2013/756281>
- [12] 杨晓侠, 张厚超. Extended Fisher-Kolmogorov 方程的间断有限元分析[J]. 数学物理学报, 2021, 41(6): 1880-1896.
- [13] Liu, H. and Yan, J. (2009) The Direct Discontinuous Galerkin (DDG) Methods for Diffusion Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **47**, 675-698. <https://doi.org/10.1137/080720255>
- [14] Liu, H. and Yan, J. (2010) The Direct Discontinuous Galerkin (DDG) Method for Diffusion with Interface Corrections. *Communications in Computational Physics*, **8**, 541-546. <https://doi.org/10.4208/cicp.010909.011209a>
- [15] Vidden, C. and Yan, J. (2013) A New Direct Discontinuous Galerkin Method with Symmetric Structure for Nonlinear Diffusion Equations. *Journal of Computational Mathematics*, **31**, 638-662. <https://doi.org/10.4208/jcm.1307-m4273>
- [16] Xu, Y. and Shu, C.W. (2010) Local Discontinuous Galerkin Methods for High-Order Time-Dependent Partial Differential Equations. *Communications in Computational Physics*, **7**, 1-46.
- [17] Sun, Q., Ji, B. and Zhang, L. (2022) A Convex Splitting BDF2 Method with Variable Time-Steps for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **114**, 73-82. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.03.017>
- [18] 王菲. 四阶扩散方程间断有限元方法最优误差估计的研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022.
- [19] 张朝凤. 一类四阶非线性反应扩散方程的非标准有限元方法[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 郑州大学, 2022.
- [20] Ismail, K., Ankur, and Omrani, K. (2024) Error Analysis of the Fully Galerkin Approximations for the Nonlinear Extended-Fisher-Kolmogorov Equation. *Computational and Applied Mathematics*, **43**, Article No. 361. <https://doi.org/10.1007/s40314-024-02827-y>