Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(4), 826-842**
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144210

Hans汉斯

三维粘性系数依赖于密度的不可压缩热传导Navier-Stokes方程的全局强解

王智辉

重庆交通大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2025年3月26日；录用日期：2025年4月21日；发布日期：2025年4月28日

摘　要

本文研究了三维粘性系数依赖于密度的非齐次不可压缩热传导Navier-Stokes方程。首先，当粘性系数的梯度的范数满足$\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^\infty(0,T;L^p)}<\infty$时，存在一个整体强解，此外，如果初始能量适当小，证明了三维粘性非齐次热传导变粘性Navier-Stokes方程整体强解的唯一性。

关键词

全局强解，热传导Navier-Stokes方程，粘性相关密度，不可压缩

Global Strong Solution for 3D Viscous Incompressible Heat Conducting Navier-Stokes Equations with Density-Dependent Viscosity

Zhihui Wang

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

Received: Mar. 26th, 2025; accepted: Apr. 21st, 2025; published: Apr. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we investigate an 3D viscosity incompressible heat conducting Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity. First, we obtain that there exists a global strong solution

文章引用: 王智辉. 三维粘性系数依赖于密度的不可压缩热传导 Navier-Stokes 方程的全局强解[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 826-842. DOI: 10.12677/aam.2025.144210

provided the norm of the gradient of viscosity satisfies $\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^\infty(0,T;L^p)}<\infty$. Moreover, if energy is suitably small, we show the uniqueness of the global strong solution to the three-dimensional viscous non-homogeneous heat conducting Navier-Stokes equations with variable viscosity.

Keywords

Global Strong Solution, Heat Conducting Navier-Stokes Equations, Density-Dependent Viscosity, Incompressible

1. 引言

近年来，由于非齐次 Navier-Stokes 方程在模拟许多物理现象中的突出作用，人们对非齐次 Navier-Stokes 方程进行了广泛的数学研究，并且取得了大量的成果。由于物理重要性、复杂性、丰富的现象和数学挑战，非齐次不可压缩 Navier-Stokes 方程的初边值问题拥有大量的研究文献。

在本文中，考虑以下粘性系数依赖于密度的不可压缩热传导 Navier-Stokes 方程的全局强解，区域 $\Omega\subset R^3$ 上的三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组可由下面的方程组来描述：

$$\begin{cases}\rho_t+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\ (\rho u)_t+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)+\nabla P=\operatorname{div}\left(2\mu(\rho)\mathfrak{D}(u)\right),\\ c_v\left[(\rho\theta)_t+\operatorname{div}(\rho u\theta)\right]-\operatorname{div}\left(\kappa(\rho)\nabla\theta\right)=2\mu(\rho)|\mathfrak{D}u|^2,\\ \operatorname{div} u=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，初始条件

$$(\rho,u,\theta)(0,x)=(\rho_0,u_0,\theta_0)(x),\ x\in\Omega,\tag{1.2}$$

边界条件：

$$u=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu}=0,\ \text{ on }\partial\Omega.\tag{1.3}$$

其中 ν 是单位外法线，$t\ge 0$ 是时间，函数 ρ,u,θ,P 分别是流体的密度、速度、绝对温度和压力，且 $\mathfrak{D}(u)$ 形变张量满足 $\mathfrak{D}(u)=\frac{1}{2}\left(\nabla u+(\nabla u)^{tr}\right)$。

粘性系数 $\mu(\rho)$ 和 $\kappa(\rho)$ 是依赖于 ρ 的连续可微函数，满足

$$\bar{\mu}\ge\mu(\rho)\ge\underline{\mu}>0,\ \bar{\kappa}\ge\kappa(\rho)\ge\underline{\kappa}>0,\tag{1.4}$$

其中，$\underline{\mu},\bar{\mu},\underline{\kappa},\bar{\kappa}$ 是正常数。

早期的关于 Navier-Stokes 方程解的存在性研究主要分为两类，即弱解的存在性和强解的存在性。1974 年，Kazhikov [1]得到了，在初始密度 ρ_0 远离真空，非齐次 Navier-Stokes 方程在能量空间中至少有一个全局弱解。他还得到了该系统对于三个空间维度的小数据和二维的所有数据都存在全局强解。2003 年，为了克服真空存在带来的困难，Choe 和 Kim [2]提出了以下兼容性条件：

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_0 + \nabla P_0 = \sqrt{\rho_0}\, g_1 \\ -\kappa\Delta\theta_0 - 2\mu|u_0|^2 = \sqrt{\rho_0}\, g_2 \end{cases}$$

并且研究了强解的局部存在性，后来 2013 年由 Huang-Wang [3]推广到了全局强解。2019 年，Danchin 和 Mucha [4]建立了三维有界域中具有非负密度的强解的全局存在性。2015 年，Zhang 和 Tan [5]得到了强解的全局存在性和唯一性。最近，2021 年，Guo 和 Li [6]将文献[5]中的结果推广到了粘性系数随温度变化的情况。

如果粘性系数 μ 为常数，1974 年，Kazhikov [1]证明了强解的存在性，但是并未证得唯一性。1978 年，Ladyzenskaya 和 Solonnikov [7]证明了二维情况下强解的全局存在性，并且得到了三维情况下强解的局部存在性以及当初值 u_0 小时，强解的全局存在性。后来，诸如 1999 年 Itoh 和 Tani [8]，1990 年 Padula [9] [10]，1991 年，Salvi [11]等也得出了一些相关结果。2017 年，Zhong [12]得到了在三维情况下具有非负密度不可压缩热传导 Navier-Stokes 方程强解的全局存在性。2020 年，在此基础上，Zhong [13]将这个结果推广到了三维问题强解的全局存在性和强解大时间行为。

$$-\operatorname{div}\left(\mu\left(\rho_0\right)\nabla u_0\right) + \nabla P = \sqrt{\rho_0}\, g, \tag{1.5}$$

目前为止，只要粘性系数 $\mu(\rho)$ 取决于密度 ρ，大多数结果都集中在二维情况下。正如文献[14]所指出的，密度和速度之间的强相互作用会使密度依赖粘性系数情况的全局理论以及恒定粘性系数情况不能直接应用。全局弱解是由 1988 年，DiPerna 和 Lions [15] [16]导出的。后来，1997 年，在粘性系数 $\mu(\rho)$ 是 L^∞ 范数中正常数的小扰动的情况下，Desjardins [17]得到了二维情况下具有更高正则性的全局弱解。2015 年，Abidi 和 Zhang [18]将这个二维结果推广到了强解的情况。对于三维情况，2004 年，Cho 和 Kim [19]通过施加一些初始兼容性条件构建了一个独特的局部强解。1996 年，Lions [16]建立了在允许真空的初始密度的任何空间维度上非齐次 Navier-Stokes 方程弱解的全局存在性。之后，2015 年，Liang [20]和 2018 年，Lü-Shi-Zhong [21]分别建立了二维 Cauchy 问题解的全局存在性。后来，2015 年 Huang-Wang [22]研究了有界域上强解的全局存在性。2018 年，Wang [23]研究了具有一般外力的三维初边值问题，在初始密度足够小的假设下得到了强解的全局存在性。2022 年，Zhong [24]得到了具有大初值和允许真空的二维边值问题强解的全局存在性和强解的大时间行为。

受 Zhong [12]-[14]启发，本文研究三维粘性系数依赖于密度的不可压缩热传导 Navier-Stokes 方程的全局强解。

2. 主要定理

定理 2.1 当常数 $q \in (3,\infty)$，假设初始数据 (ρ_0, u_0, θ_0) 满足正则性条件

$$0 \le \rho_0 \in W^{1,q}, u_0 \in H_0^1 \cap H^2, \theta_0 \in H_n^2, \operatorname{div} u_0 = 0, \tag{2.1}$$

和相容性条件

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(2\mu(\rho)\mathfrak{D}(u_0)\right) + \nabla P_0 = \sqrt{\rho_0}\, g_1, \\ \operatorname{div}\left(\kappa(\rho_0)\nabla\theta_0\right) + 2\mu(\rho_0)\left|\mathfrak{D}(u_0)\right|^2 = \sqrt{\rho_0}\, g_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $P_0 \in H^1$ 且 $g_1, g_2 \in L^2$。则对于问题(1.1)，存在时间 T 和一个唯一强解，使得当 $q_0 \in (3,\infty)$

$$\begin{cases} \rho \ge 0,\ \ \rho \in C\left([0,T]; W^{1,q_0}\right),\ \ \rho_t \in C\left([0,T]; L^{q_0}\right), \\ u \in C\left([0,T]; H_0^1 \cap H^2\right) \cap L^2\left(0,T; W^{2,q_0}\right), \\ \theta \ge 0,\ \ \theta \in C\left([0,T]; H_n^2\right) \cap L^2\left(0,T; W^{2,q_0}\right), \\ \left(u_t, \theta_t\right) \in L^2\left(0,T; H^1\right),\ \left(\sqrt{\rho}u_t, \sqrt{\rho}\theta_t\right) \in L^\infty\left(0,T; L^2\right), \end{cases} \tag{2.3}$$

此外，如果T^*是局部强解(ρ,u,θ)的最大存在时间，则对任意的$3<p\le q$，有$T^*=\infty$或

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^\infty(0,T;L^p)}=\infty. \tag{2.4}$$

定理 2.2 假设初始数据(ρ_0,u_0,θ_0)当$0\le\rho_0\le\bar{\rho}$时，满足(2.1)，(2.2)和定理 1.1 的条件。则存在一个仅依赖于$\Omega,\|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2},\|\rho_0\|_{L^\infty},\|\nabla u_0\|_{L^2}$的小正常数$\varepsilon_0$，使得如果

$$\|\nabla\mu(\rho_0)\|_{L^p}\le\varepsilon_0, \tag{2.5}$$

则问题(1.1)有一个唯一的全局强解。

标注 2.3 为了克服密度相关粘度带来的困难，先验估计由$\sup\limits_{0\le t<T^*}\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^p}=M<\infty$开始，然后利用 Stokes 方程的正则性结果，完成先验估计的证明。其数学意义在于假设粘性系数梯度的范数有界，确保粘性项与$(u\cdot\nabla)u$的相互作用不会破坏解的光滑性。

3. 预备知识

3.1. 符号说明

$$\begin{cases} L^p=L^p(\Omega),H^k=H^{k,2}(\Omega),W^{k,p}=W^{k,p}(\Omega),\\ H_0^1=\{u\in H^1\mid u=0\text{ on }\partial\Omega\},H_v^2=\{u\in H^2\mid\nabla u\cdot v=0\text{ on }\partial\Omega\}.\end{cases}$$

3.2. 引理

引理 3.1 假设当$3<q<\infty$时，有$0\le\rho\le\bar{\rho}$和$\rho\in W^{1,q}$。令(u,P)是边值问题的唯一弱解：

$$-\operatorname{div}(\mu(\rho)\nabla u)+\nabla P=F,\ \operatorname{div}u=0\ \text{ in }\Omega,\ \int\frac{P}{\mu(\rho)}\mathrm{d}x=0, \tag{3.1}$$

其中在$[0,\bar{\rho}]$上有$\mu\in C^1[0,\infty)$和$\underline{\mu}\le\mu(\rho)\le\bar{\mu}$，则有以下结果：

(1) 假设$f\in L^2$，$(u,P)\in H^2\times H^1$和

$$\|u\|_{H^2}+\left\|\frac{P}{\mu(\rho)}\right\|_{H^1}\le C\|f\|_{L^2}\left(1+\|\mu(\rho)\|_{L^q}\right)^{\frac{q}{q-3}}. \tag{3.2}$$

(2) 假设当$r\in(3,q)$时$F\in L^r$，则$(u,\Pi)\in W^{2,r}\times W^{1,r}$且

$$\|u\|_{W^{2,r}}+\left\|\frac{P}{\mu(\rho)}\right\|_{W^{1,r}}\le C\|F\|_{L^r}\left(1+\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^q}\right)^{\frac{qr}{2(q-r)}}. \tag{3.3}$$

其中，常数C仅依赖于$\Omega,q,r,\bar{\mu}$和$\underline{\mu}$。

4. 定理 2.1 证明

设T^*是系统(1.1)~(1.3)强解(ρ,u,θ)的最大存在时间。假设(2.4)不成立，即

$$\sup_{0\le t<T^*}\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^p}=M<\infty, \tag{4.1}$$

其中$3<p\le q$。

4.1. 先验估计

首先，由于传输方程(1.1)$_1$和不可压缩条件 $\operatorname{div} u = 0$，容易获得下面的引理。

引理 4.1.1 假设(ρ,u,θ,P)是问题(1.1)~(1.3)在$[0,T^*)$上的一个强解，则对于任意的$t\in[0,T^*)$，有

$$\|\rho(t)\|_{L^\infty} = \|\rho_0\|_{L^\infty} \le \bar{\rho}. \tag{4.2}$$

引理 4.1.2 假设(ρ,u,θ,P)是问题(1)在$[0,T^*)$上的一个强解，则对于任意的$T\in[0,T^*)$，有

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\rho\theta\|_{L^1} + \left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^2}^2\right) + \underline{\mu}\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le C. \tag{4.3}$$

证明 将(1.1)$_1$和(1.1)$_3$分别乘以 u 和 θ，将两式相加，并在 Ω 上关于 x 积分。将所得方程，对时间 t 分部积分并利用(1.1)$_1$和(1.1)$_4$，易得(4.3)。

证毕。

引理 4.1.3 假设(ρ,u,θ,P)是问题(1)在$[0,T^*)$上的一个强解，则对于任意的$T\in[0,T^*)$，有

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}\right)\mathrm{d}t \le C. \tag{4.4}$$

证明 因为$\mu(\rho)$是连续可微函数，可从(1.1)$_1$中得

$$[\mu(\rho)]_t + u\cdot\nabla\mu(\rho) = 0. \tag{4.5}$$

将(1.1)$_2$乘以u_t并将所得方程在 Ω 上积分，可得

$$2\int\mu(\rho)\mathfrak{D}(u)\cdot\nabla u_t \mathrm{d}x + \int\rho|u_t|^2\mathrm{d}x = -\int\rho u\cdot\nabla u\cdot u_t \mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

因为

$$2\int\mu(\rho)\mathfrak{D}(u)\cdot\nabla u_t \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\mathrm{d}x - \int[\mu(\rho)]_t|\mathfrak{D}(u)|^2\mathrm{d}x$$

结合(4.5)和(4.6)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\mathrm{d}x + \int\rho|u_t|^2\mathrm{d}x = -\int\rho u\cdot\nabla u\cdot u_t\mathrm{d}x - \int(u\cdot\nabla\mu(\rho))|\mathfrak{D}(u)|^2\mathrm{d}x \triangleq \sum_{i=1}^2 I_k. \tag{4.7}$$

利用 Holder 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，可得

$$\begin{aligned}|I_1| &\le \int\left|\sqrt{\rho}u_t\right|\left|\sqrt{\rho}u\right||\nabla u|\mathrm{d}x \le C\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}\\ &\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{4}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^3\|\nabla u\|_{H^1},\end{aligned} \tag{4.8}$$

利用 Sobloev's 嵌入定理和(4.3)，可得

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left|\int(u\cdot\nabla\mu(\rho))|\mathfrak{D}(u)|^2\mathrm{d}x\right| \le C\int|\nabla\mu(\rho)||u||\nabla u|\mathrm{d}x\\ &\le C\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^4}^2 \le C\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}},\end{aligned} \tag{4.9}$$

将(4.8)和(4.9)代入至(4.7)中，并利用 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\mathrm{d}x + \left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 &\le \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^3\|\nabla u\|_{H^1} + C\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\\ &\le \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6 + C\|\nabla u\|_{H^1}^2,\end{aligned} \tag{4.10}$$

应用引理 3.1，(4.1)和(4.2)可得

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{H^1} &\le C\left(\|\rho u_t\|_{L^2}+\|\rho u\cdot\nabla u\|_{L^2}\right)\left(1+\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^p}\right)^{\frac{p}{p-3}}\\ &\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}+C\|\rho u\cdot\nabla u\|_{L^2}\\ &\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}+C\|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\\ &\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\\ &\le \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{H^1}+C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{L^2}^3,\end{aligned}\tag{4.11}$$

因此，

$$\|\nabla u\|_{H^1}\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{L^2}^3.\tag{4.12}$$

将(4.12)代入(4.11)，并应用 Cauchy 不等式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\,\mathrm{d}x+\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\le\frac{3}{4}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^6+\|\nabla u\|_{H^1}^2,\tag{4.13}$$

因此，结合(4.3)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\,\mathrm{d}x+\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\le C,\tag{4.14}$$

结合(4.3)与(4.14)，并利用 Gronwall 不等式即可得(4.4)。

证毕。

注 4.1.1 在条件(4.1)下，对于任意的 $T\in[0,T^*)$，有

$$\|\nabla u\|_{H^1}\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}.\tag{4.15}$$

引理 4.1.4 当常数 $q\in(3,\infty)$，在条件(4.1)下，对于任意的 $T\in[0,T^*)$，有

$$\sup_{0\le t\le T}\|u\|_{H^2}\le C.\tag{4.16}$$

证明 将$(1.1)_2$关于时间 t 微分，可得

$$\rho u_{tt}+\rho u\cdot\nabla u_t-\mathrm{div}\left(2\mu(\rho)\mathfrak{D}(u_t)\right)=-\nabla P_t+\rho_t\left(u_t+u\cdot\nabla u\right)-\rho u_t\cdot\nabla u+\mathrm{div}\left(2\mu_t\mathfrak{D}(u)\right).\tag{4.17}$$

将(4.17)乘以 u_t 并在 Ω 上分部积分，利用$(1.1)_1$得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho|u_t|^2\,\mathrm{d}x+2\int\mu(\rho)\mathfrak{D}(u_t)\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\\ &=\int\mathrm{div}(\rho u)|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{div}(\rho u)u\cdot\nabla u\cdot u_t\mathrm{d}x\\ &\quad-\int\rho u_t\cdot\nabla u\cdot u_t\mathrm{d}x-\int2\mu_t\mathfrak{D}(u)\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\\ &\triangleq\sum_{k=1}^4 M_k.\end{aligned}\tag{4.18}$$

下面分别估计 M_k。

$$
\begin{aligned}
|M_1| &= \left|-\int \rho u\cdot\nabla|u_t|^2\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le 2\|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^6}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^3}\|\nabla u_t\|_{L^2} \\
&\le C\|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t\|_{L^2} \\
&\le \frac{\underline{\mu}}{8}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|M_2| &= \left|-\int \rho u\cdot\nabla(u\cdot\nabla u\cdot u_t)\mathrm{d}x\right| \\
&\le \|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^6}\|u_t\|_{L^6} + \|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}^2\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}\|u_t\|_{L^6} \\
&\quad + \|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^6}^2\|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla u_t\|_{L^2} \\
&\le C\|u\|_{H^2}\|\nabla u_t\|_{L^2} \\
&\le \frac{\underline{\mu}}{8}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|M_3| &= \left|-\int \rho u_t\cdot\nabla u\cdot u_t\mathrm{d}x\right| \\
&\le \|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^3}\|\nabla u_t\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2} \\
&\le C\|\nabla u\|_{L^2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\
&\le \frac{\underline{\mu}}{8}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|M_4| &= \left|-\int 2\mu_t\mathfrak{D}(u)\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\right| \\
&\le C\int |u||\nabla\mu(\rho)||\nabla u||\nabla u_t|\mathrm{d}x \\
&\le C\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^p}\|\nabla u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\|\nabla u_t\|_{L^2} \\
&\le \frac{\underline{\mu}}{8}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^\infty}^2\|u\|_{H^2}^2 \\
&\le \frac{\underline{\mu}}{8}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^\infty}^2\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^\infty}^2.
\end{aligned}
$$

因为

$$
2\int \mu(\rho)\mathfrak{D}(u_t)\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x = 2\int \mu(\rho)|\mathfrak{D}(u_t)|^2\,\mathrm{d}x \ge 2\underline{\mu}\int|\mathfrak{D}(u_t)|^2\,\mathrm{d}x = \underline{\mu}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2, \tag{4.19}
$$

将 $M_k\,(k=1,2,3,4)$ 代入(4.18)，并结合(4.19)可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + \underline{\mu}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \le C\left(1+\|u\|_{L^\infty}^2\right)\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^\infty}^2. \tag{4.20}
$$

由(4.15)和 Sobolev 不等式可得

$$
\int_0^T\|u\|_{L^\infty}^2\,\mathrm{d}t \le C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}\,\mathrm{d}t \le C\int_0^T\|u\|_{H^2}^2\,\mathrm{d}t \le C\int_0^T\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t \le C, \tag{4.21}
$$

因此，由(4.20)，(4.21)和 Gronwall 不等式可得

$$
\sup_{0\le t\le T}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2 + \int_0^T\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \le C, \tag{4.22}
$$

由(4.15)和(4.22)可得

$$\sup_{0\le t\le T}\|u\|_{H^2}\le C\sup_{0\le t\le T}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}+C\le C. \tag{4.23}$$

证毕。

引理 4.1.5 当常数 $q\in(3,6]$，在条件(4.1)下，对于任意的 $T\in\left[0,T^*\right)$，有

$$\sup_{0\le t\le T}\|\rho\|_{W^{1,q}}\le C. \tag{4.24}$$

证明 由引理 3.1，(4.2)，(4.23)，Sobolev 嵌入定理和 Holder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_0^T\|\nabla u\|_{L^\infty}\mathrm{d}t&\le\int_0^T C\|\nabla u\|_{W^{1,r}}\mathrm{d}t\\&\le\int_0^T C\left(\|\rho u_t\|_{L^r}+\|\rho u\cdot\nabla u\|_{L^r}\right)\left(1+\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^p}\right)^{\frac{pr}{2(p-r)}}\mathrm{d}t\\&\le C\int_0^T\left(\|\rho u_t\|_{L^r}+\|\rho u\cdot\nabla u\|_{L^r}\right)\mathrm{d}t\\&\le C\int_0^T\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}\mathrm{d}t+C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{r}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{2r-3}{r}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

结合(4.22)可得

$$\int_0^T\|\nabla u\|_{L^\infty}\mathrm{d}t\le C. \tag{4.25}$$

对输运方程$(1.1)_1$去空间导数∇，有

$$\partial_t\nabla\rho+u\cdot\nabla^2\rho+\nabla u\cdot\nabla\rho=0. \tag{4.26}$$

当 $q\in(3,6]$，用 $q|\nabla p|^{q-2}\nabla\rho$ 乘以(4.26)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla\rho|^q\mathrm{d}x+q\int u\cdot\nabla^2\rho\cdot|\nabla\rho|^{q-2}\nabla\rho\mathrm{d}x=-q\int\nabla u\cdot\nabla\rho\cdot|\nabla\rho|^{q-2}\nabla\rho\mathrm{d}x,$$

对上式分部积分并结合 $\operatorname{div}u=0$ 可得

$$q\int u\cdot\nabla^2\rho\cdot|\nabla\rho|^{q-2}\nabla\rho\mathrm{d}x=\int u\cdot\nabla\left(|\nabla\rho|^q\right)\mathrm{d}x=-\int|\nabla\rho|^q\operatorname{div}u\mathrm{d}x=0,$$

因此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\rho\|_{L^q}^q\le q\int|\nabla u||\nabla\rho|^q\mathrm{d}x\le q\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^q}^q,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\rho\|_{L^q}\le\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^q},$$

结合上式和(4.25)，并利用 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla\rho\|_{L^q}\le C, \tag{4.27}$$

由(4.2)和(4.27)可得

$$\sup_{0\le t\le T}\|\rho\|_{W^{1,q}}\le C. \tag{4.28}$$

证毕。

引理 4.1.6 当常数 $q\in(3,6]$，在条件(4.1)下，对于任意的 $T\in\left[0,T^*\right)$，有

$$\sup_{0\le t\le T}\|\theta\|_{H^2}\le C. \tag{4.29}$$

证明 令 $\bar{\theta}\triangleq\frac{1}{|\Omega|}\int\theta\mathrm{d}x$ 是 θ 的平均值，由(4.2)，(4.3)和 Poincare 不等式可得

$$|\bar{\theta}|\int\rho\mathrm{d}x\le\left|\int\rho\theta\mathrm{d}x\right|+\left|\int\rho\left(\theta-\bar{\theta}\right)\mathrm{d}x\right|\le C+C\|\nabla\theta\|_{L^2},$$

因此

$$\|\theta\|_{H^1}\le C+C\|\nabla\theta\|_{L^2}. \tag{4.30}$$

相似地可得

$$\|\theta_t\|_{H^1}\le C\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}+C\|\nabla\theta_t\|_{L^2}. \tag{4.31}$$

将(1.1)$_3$ 乘以 θ_t 并将所得方程在 Ω 上积分，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\kappa(\rho)|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x+c_v\int\rho|\theta_t|^2\mathrm{d}x\\
&=-c_v\int\rho(u\cdot\nabla\theta)\theta_t\mathrm{d}x+2\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta_t\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\kappa(\rho)_t|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x\\
&\triangleq I_1+I_2+I_3.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

由(4.2)，(4.23)并利用 Holder 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$|I_1|=\left|-c_v\int\rho(u\cdot\nabla\theta)\theta_t\mathrm{d}x\right|\le\frac{c_v}{2}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2. \tag{4.33}$$

结合(4.1)，(4.5)，(4.23)，(4.30)和 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned}
I_2&\le2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta\mathrm{d}x+C\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^6}^2\|\theta\|_{L^2}+C\bar{\mu}\|\theta\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\le2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta\mathrm{d}x+C\|u\|_{H^2}^3\|\nabla\theta\|_{L^2}+C\|\nabla\theta\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\le2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta\mathrm{d}x+C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

因

$$\kappa(\rho)_t+u\cdot\nabla\kappa(\rho)=0, \tag{4.35}$$

对(4.35)分部积分并结合和(4.23)可得

$$\begin{aligned}
I_3&=-\frac{1}{2}\int u\cdot\nabla\kappa(\rho)|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\kappa(\rho)u\cdot\nabla|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x\\
&\le C\|\kappa(\rho)\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\theta\|_{L^2}\left\|\nabla^2\theta\right\|_{L^2}\le C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^2\theta\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

将(4.33)，(4.34)和(4.35)代入(4.32)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\kappa(\rho)|\nabla\theta|^2-4\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta\right)\mathrm{d}x+c_v\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2\\
&\le\frac{c_v}{2}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^2\theta\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C\\
&\le C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^2\theta\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

由(1.1)$_3$，(1.3)和椭圆方程标准 H^2 估计可得

$$
\begin{aligned}
\|\theta\|_{H^2}^2 &\le C\left\|\kappa^{-1}\right\|_{L^\infty}\left(\left\|\mu(\rho)|\nabla u|^2\right\|_{L^2}^2+\|\rho\theta_t\|_{L^2}^2+\|\rho u\cdot\nabla\theta\|_{L^2}^2+\|\nabla\kappa(\rho)\cdot\nabla\theta\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right)\\
&\le C\|\nabla u\|_{L^4}^4+C\|\rho\|_{L^\infty}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2+C\|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C\|\kappa'\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^4}^2\|\nabla\theta\|_{L^4}^2+C\|\theta\|_{L^2}^2\\
&\le C\|u\|_{H^2}^4+C\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2+C\|\theta\|_{H^1}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}\|\theta\|_{H^2}\\
&\le \frac{c_v}{2}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C+\frac{1}{2}\|\theta\|_{H^2}^2,
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

结合(4.23)，(4.28)，(4.30)和(4.38)可得

$$
\|\theta\|_{H^2}^2\le\frac{c_v}{2}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C,
\tag{4.39}
$$

将(4.39)代入(4.37)可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\kappa(\rho)|\nabla\theta|^2-4\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta\right)\mathrm{d}x+c_v\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2\le C\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C.
\tag{4.40}
$$

因为

$$
4\int\mu(\rho)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta\mathrm{d}x\le C\bar{\mu}\|\theta\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^{\frac{12}{5}}}^2\le C\|\nabla\theta\|_{L^2}\|u\|_{H^2}^2\le\frac{k}{2}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C,
$$

结合上式与(4.22)，(4.30)，(4.40)并利用 Gronwall 不等式可得

$$
\sup_{0\le t\le T}\|\theta\|_{H^1}^2+\int_0^T\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\le C.
\tag{4.41}
$$

对$(1.1)_3$关于 t 求导并结合$(1.1)_1$和(4.5)可得

$$
\begin{aligned}
&c_v\left[\rho\theta_{tt}+\rho u\cdot\nabla\theta_t\right]-\operatorname{div}\left(\kappa(\rho)\nabla\theta_t\right)\\
&=c_v\operatorname{div}(\rho u)\left(\theta_t+u\cdot\nabla\theta\right)-c_v\rho u_t\cdot\nabla\theta+2\mu(\rho)\left(|\mathfrak{D}(u)|^2\right)_t\\
&\quad-2\left(u\cdot\nabla\mu(\rho)\right)|\mathfrak{D}(u)|^2+\operatorname{div}\left(\kappa(\rho)_t\nabla\theta\right),
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

将(4.42)乘以 θ_t 并在 Ω 上分部积分

$$
\begin{aligned}
&\frac{c_v}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho|\theta_t|^2\mathrm{d}x+\int\kappa(\rho)|\nabla\theta_t|^2\mathrm{d}x\\
&=c_v\int\operatorname{div}(\rho u)|\theta_t|^2\mathrm{d}x+c_v\int\operatorname{div}(\rho u)(u\cdot\nabla\theta)\theta_t\mathrm{d}x-c_v\int\rho(u_t\cdot\nabla\theta)\theta_t\mathrm{d}x\\
&\quad+2\int\mu(\rho)\left(|\mathfrak{D}(u)|^2\right)_t\theta_t\mathrm{d}x-2\int\left(u\cdot\nabla\mu(\rho)\right)|\mathfrak{D}(u)|^2\theta_t\mathrm{d}x-\int\kappa(\rho)_t\nabla\theta\cdot\nabla\theta_t\mathrm{d}x\\
&\triangleq\sum_{k=1}^{6}\bar{M}_k.
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

下面将分别估计 $\bar{M}_k\,(k=1,2,\cdots,6)$

$$
\begin{aligned}
\left|\bar{M}_1\right|&=\left|-c_v\int\rho u\cdot\nabla|\theta_t|^2\mathrm{d}x\right|\le 2c_v\|\rho\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^\infty}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}\|\nabla\theta_t\|_{L^2}\\
&\le C\|u\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}\|\nabla\theta_t\|_{L^2}\le\frac{\kappa}{12}\|\nabla\theta_t\|_{L^2}^2+C\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
$$

将 $\bar{M}_k\,(k=1,2,\cdots,6)$ 代入(4.43)，可得

$$c_v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + \underline{\kappa}\left\|\nabla\theta\right\|_{L^2}^2 \le C\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + C\left\|\theta\right\|_{H^2}^2 + C\left\|\nabla u_t\right\|_{L^2}^2 + C. \tag{4.44}$$

由(4.39)，(4.40)，(4.41)可得

$$\left\|\theta\right\|_{H^2}^2 \le C\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + C, \tag{4.45}$$

结合(4.44)和(4.45)可得

$$c_v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + \underline{\kappa}\left\|\nabla\theta_t\right\|_{L^2}^2 \le C\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + C\left\|\nabla u_t\right\|_{L^2}^2 + C, \tag{4.46}$$

结合(4.22)和(4.46)并利用 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + \int_0^T\left\|\nabla\theta_t\right\|_{L^2}^2 \le C, \tag{4.47}$$

因此，由(4.46)和(4.47)可得

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\theta\right\|_{H^2}^2 \le C\sup_{0\le t\le T}\left\|\sqrt{\rho}\theta_t\right\|_{L^2}^2 + C \le C. \tag{4.48}$$

4.2. 定理 2.1 的证明

下面将利用反证法来证明。假设(2.4)是错的，即(4.1)成立。引理 4.1.1~4.1.6 中的常数 C 均与 $t<T^*$ 无关，即引理 4.1.1~4.1.6 中得到的所有先验估计对于任意 $t<T^*$ 都是一直有界的。因此函数

$$(\rho,u,\theta)(T^*,x) \triangleq \lim_{t\to T^*}(\rho,u,\theta)(t,x),$$

在 $t=T^*$ 满足初始条件(1.5)。其中，标准论证所得 $\rho,\dot{u},\dot{\theta}\in C([0,T];L^2)$，而 $\dot{f}\triangleq f_t+u\cdot\nabla f$，意味着

$$(\rho\dot{u},\rho\dot{\theta})(T^*,x) \triangleq \lim_{t\to T^*}(\rho\dot{u},\rho\dot{\theta})(t,x)\in L^2.$$

因此，

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(2\mu(\rho)\mathfrak{D}(u)\right)+\nabla P\big|_{t=T^*} = \sqrt{\rho}(T^*,x)g_1(x), \\ \mathrm{div}\left(\kappa(\rho)\nabla\theta\right)+2\mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2\big|_{t=T^*} = \sqrt{\rho}(T^*,x)g_2(x), \end{cases}$$

有

$$g_1(x)\triangleq\begin{cases} \rho^{-\frac{1}{2}}(T^*,x)(\rho\dot{u})(T^*,x), & \text{for } x\in\left\{x\,|\,\rho(T^*,x)>0\right\}, \\ 0, & \text{for } x\in\left\{x\,|\,\rho(T^*,x)=0\right\}, \end{cases}$$

和

$$g_2(x)\triangleq\begin{cases} c_v\rho^{-\frac{1}{2}}(T^*,x)(\rho\dot{\theta})(T^*,x), & \text{for } x\in\left\{x\,|\,\rho(T^*,x)>0\right\}, \\ 0, & \text{for } x\in\left\{x\,|\,\rho(T^*,x)=0\right\}, \end{cases}$$

满足 $g_1,g_2\in L^2$。因此，$(\rho,u,\theta)(T^*,x)$ 也满足(2.2)，所以取 $(\rho,u,\theta)(T^*,x)$ 作为初始数据，可以将局部强解拓展到 T^* 之外，这与 T^* 的最大性相矛盾。因此完成了定理 1.1 的证明。

5. 定理 2.2 的证明

在本节中，定义 $C_0 \triangleq \left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_{L^2}^2$。通常，利用 $C(f)$ 表示 C 对的依赖，在本节中，所有的正常数 C 都与时间 t 无关。

5.1. 先验估计

引理 5.1.1 假设是问题(1.1)在 $[0,T]$ 上的唯一局部强解，且满足初始数据，有

$$\|\rho(t)\|_{L^\infty} = \|\rho_0\|_{L^\infty}, \tag{5.1}$$

和

$$\left\|\sqrt{\rho}u(t)\right\|_{L^2}^2 + \underline{\mu}\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}t \le C_0. \tag{5.2}$$

此外，有

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{e}^{\sigma t}\left\|\sqrt{\rho}u(t)\right\|_{L^2}^2 + \underline{\mu}\mathrm{e}^{\sigma t}\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le C_0. \tag{5.3}$$

其中，$\sigma = \dfrac{\underline{\mu}}{\bar{\rho}d^2}$，$d$ 是 Ω 的直径。

证明 因为$(1.1)_1$是输运方程，对其应用标准极大值原理，易得(5.1)。

将$(3.1)_2$乘以 u_t 并分部积分，再关于 t 积分可得

$$\left\|\sqrt{\rho}u(t)\right\|_{L^2}^2 + 4\int_0^t\int \mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s = \left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_{L^2}^2. \tag{5.4}$$

由于

$$2\int \mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x \ge 2\underline{\mu}\int \left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x = \underline{\mu}\|\nabla u\|_{L^2}^2, \tag{5.5}$$

并结合(5.4)可得(5.2)。

由(4.2)和 Poincaré 不等式可得

$$\left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^2}^2 \le \|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}^2 \le \bar{\rho}d^2\|\nabla u\|_{L^2}^2, \tag{5.6}$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^2}^2 + \sigma\left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^2}^2 + \underline{\mu}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le 0, \tag{5.7}$$

易得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\sigma t}\left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^2}^2\right) + \underline{\mu}\mathrm{e}^{\sigma t}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le 0. \tag{5.8}$$

在 $[0,T]$ 上积分，即可得(5.3)。

证毕。

引理 5.1.2 假设 (ρ,u,θ) 是问题(1.1)在 $[0,T]$ 上的唯一局部强解，且满足初始数据，假设

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\nabla\mu(\rho)(t)\right\|_{L^q} \le 1, \tag{5.9}$$

则存在一个仅依赖于 $\Omega, C_0, q, \underline{\mu}, \bar{\mu}, \|\rho_0\|_{L^\infty}$ 和 $\|\nabla u_0\|_{L^2}$ 的正常数 C，使得对于 $i\in\{1,2\}$，有

$$\sup_{0\le t\le T} t^i \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_0^T t^i \left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le C. \tag{5.10}$$

证明 证明类似引理 4.1.3。由(4.7)，(4.8)，(4.9)易得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \rho |u_t|^2 \mathrm{d}x \le C\|\nabla u\|_{L^2}^3 \|\nabla u\|_{H^1} + C\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\nabla u\|_{H^1}, \tag{5.11}$$

其中，C 仅依赖于 $\Omega, \|\rho_0\|_{L^\infty}, \underline{\mu}, \overline{\mu}$ 和 q。

因此，结合(5.2)和(5.11)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 \\ &\le C_1(C_0,C)\|\nabla u\|_{L^2}^3 + C_1(C_0,C)\|\nabla u\|_{L^2}^6 + C_1(C_0,C)\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{9}{2}},\end{aligned} \tag{5.12}$$

将上式与(5.2)结合可得(5.10)。

将(5.12)乘以 t^2 并利用(4.4)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int t\mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}t\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 \\ &\le \int \mu(\rho)\left|\mathfrak{D}(u)\right|^2 \mathrm{d}x + C_1(C_0,C)t\|\nabla u\|_{L^2}^3 + C_1(C_0,C)t\|\nabla u\|_{L^2}^3 \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\nabla u\|_{L^2}^3 \\ &\le C_1(C_0,C)\overline{\mu}\|\nabla u\|_2^2,\end{aligned} \tag{5.13}$$

由(5.2)，(5.3)，(5.12)和 Gronwall 不等式可得(5.10)。

证毕。

引理 5.1.3 假设 (ρ,u,θ) 是问题(1.1)~(1.3)在 $[0,T]$ 上的唯一局部强解，且(5.4)成立，则存在一个仅依赖于 $\Omega, C_0, \|\rho_0\|_{L^\infty}, \|\nabla u_0\|_{L^2}, \underline{\mu}, \overline{\mu}$ 和 q 的正常数 C，使得对于 $i\in\{1,2\}$，有

$$\sup_{0\le t\le T} t\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + \int_0^T t\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le C, \tag{5.14}$$

和

$$\sup_{0\le t\le T} t^2\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + \int_0^T t^2\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le C. \tag{5.15}$$

证明 利用(4.18)和引理 5.1.4 中的 J_k 估计，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + \underline{\mu}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \le C\left(1+\|u\|_{L^\infty}^2\right)\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^3, \tag{5.16}$$

将(5.16)乘以 t 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2\right) + \underline{\mu}t\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \\ &\le \left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + Ct\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + Ct\|u\|_{L^\infty}\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 + Ct\|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^3.\end{aligned} \tag{5.17}$$

由(5.10)可得

$$\int_0^T t\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \le \left(\int_0^T \left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T t^2\left\|\sqrt{\rho} u_t\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \le C. \tag{5.18}$$

结合(4.15)和 Sobolev 不等式，可得

$$\int_0^T \|u\|_{L^\infty}^2 \,\mathrm{d}t \le C\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}\,\mathrm{d}t \le C\int_0^T \|u\|_{H^2}^2\,\mathrm{d}t \le C\int_0^T \left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t \le C. \tag{5.19}$$

由(5.9)，(5.10)，(5.18)以及 Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$\int_0^T t\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}^3\,\mathrm{d}t \le \sup_{0\le t\le T}\left(t\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u\|_{L^2}\int_0^T\|u\|_{L^\infty}^2\mathrm{d}t \le C\sup_{0\le t\le T} t\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le C. \tag{5.20}$$

对于 $i=2$，将(5.16)乘以 t^2，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\right)+\underline{\mu}t^2\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\\&\le 2t\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2+Ct^2\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2+Ct^2\|u\|_{L^\infty}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2+Ct^2\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}^3.\end{aligned} \tag{5.21}$$

引理 5.1.4 假设 (ρ,u,θ) 是问题(1.1)~(1.3)在 $[0,T]$ 上的唯一局部强解，且(5.4)成立，则存在一个仅依赖于 $\Omega, C_0, \|\rho_0\|_{L^\infty}, \|\nabla u_0\|_{L^2}, \underline{\mu}, \overline{\mu}$ 和 q 的正常数 C，使得

$$\int_0^T \|\nabla u\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}t \le C \tag{5.22}$$

证明 由 Sobolev 嵌入定理，仅需估计 $\|\nabla u\|_{W^{1,r}}$。令 $F \triangleq \rho u_t + \rho u\cdot\nabla u$ 并取 r，其中 $3<r<\min\{6,p\}$。则由引理 4.1.4 和 Sobolev 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\nabla u\|_{W^{1,r}} &\le C\int_0^T \|F\|_{L^r}\left(1+\|\nabla\mu(\rho)\|_{L^p}\right)^{\frac{pr}{2(p-r)}}\mathrm{d}t\\&\le C\int_0^T\left(\|\rho u_t\|_{L^r}+\|\rho u\cdot\nabla u\|_{L^r}\right)\mathrm{d}t\\&\le C\int_0^T\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}\mathrm{d}t+C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{r}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{2r-3}{r}}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.23}$$

因此，当 $0<T\le 1$ 时，可得

$$\int_1^T\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}\mathrm{d}t \le \sup_{1\le t\le T}\left(t^2\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{6-r}{4r}}\left(\int_1^T t^2\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{3r-6}{4r}}\left(\int_1^T t^{-\frac{4r}{r+6}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{r+6}{4r}} \le C. \tag{5.24}$$

当 $T>1$ 时，由(5.10)，(5.11)和(5.16)可得

$$\int_1^T\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}\mathrm{d}t \le \sup_{1\le t\le T}\left(t^2\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{6-r}{4r}}\left(\int_1^T t^2\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{3r-6}{4r}}\left(\int_1^T t^{-\frac{4r}{r+6}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{r+6}{4r}} \le C. \tag{5.25}$$

因此，由(5.24)和(5.25)可得

$$\int_0^T\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}\mathrm{d}t \le C. \tag{5.26}$$

相似地，如果 $0<T\le 1$，可得

$$\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{r}}\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{2r-3}{r}}\mathrm{d}t \le C\sup_{0\le t\le T}\left(t\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{3}{2r}}\left(\int_0^T t\|\nabla u\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2r-3}{2r}}\left(\int_0^T t^{-\frac{4r}{r+6}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{r+6}{4r}} \le C. \tag{5.27}$$

如果 $T>1$，可得

$$\int_1^T \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{r}} \|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{2r-3}{r}} \mathrm{d}t \le C\int_1^T \|\nabla u\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t \le C \sup_{1\le t\le T}\left(t^2 \|\nabla u\|_{H^1}^2\right)^{\frac{3}{2r}} \left(\int_1^T t^{-2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{2r}} \le C. \tag{5.28}$$

由(5.27)和(5.28)可得

$$\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{r}} \|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{2r-3}{r}} \mathrm{d}t \le C. \tag{5.29}$$

结合(5.26)和(5.29)可得(5.22)。

引理 5.1.5 假设(ρ,u,θ)是问题(1.1)~(1.3)在$[0,T]$上的唯一局部强解，且(5.4)成立，则存在一个仅依赖于$\Omega, C_0, \|\rho_0\|_{L^\infty}, \|\nabla u_0\|_{L^2}, \underline{\mu}, \overline{\mu}$和$q$的正常数$C$，如果

$$\left\|\nabla \mu(\rho_0)\right\|_{L^q} \le \varepsilon_0, \tag{5.30}$$

则

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\nabla \mu(\rho)(t)\right\|_{L^q} \le \frac{1}{2}. \tag{5.31}$$

证明 由标准能量估计可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla \mu(\rho)\right\|_{L^p} \le C(p)\|\nabla u\|_{L^\infty}\left\|\nabla \mu(\rho)\right\|_{L^p}, \tag{5.32}$$

其中，C是一个仅依赖于p的正常数。因此由 Gronwall 不等式和(5.22)可得

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\nabla \mu(\rho)\right\|_{L^p} \le \left\|\nabla \mu(\rho_0)\right\|_{L^p} \exp\left(C(p)\int_0^T \|\nabla u\|_{L^\infty} \mathrm{d}t\right) \le L\left\|\nabla \mu(\rho_0)\right\|_{L^p}. \tag{5.33}$$

令$\varepsilon_0 \triangleq \frac{1}{2L}$，由(5.30)和(5.33)可得(5.31)。

5.2. 定理 2.2 的证明

下面计划将局部强解推广至全局强解。

令ε_0为引理 5.1.5 中所述常数，并假设初始数据满足(2.1)和(2.2)且

$$\left\|\nabla \mu(\rho_0)\right\|_{L^q} \le \varepsilon_0 \le \frac{1}{2}. \tag{5.34}$$

依据([25],定理 1.1),存在时间$T_* > 0$使得问题(1.1)~(1.3)在$\Omega\times(0,T_*)$有一个唯一的局部强解(ρ,u,θ)，且T_*依赖于$\|\rho_0\|_{W^{1,q}}$，$\|\nabla u_0\|_{H^1}$，$\|g\|_{L^2}$和μ。因为$\left\|\nabla \mu(\rho_0)\right\|_{L^q} \le \varepsilon_0 \le \frac{1}{2}$和$\nabla\mu(\rho)$在$L^q$空间的连续性，则存在$T_1 \in (0,T_*)$使得$\sup_{0\le t\le T}\left\|\nabla \mu(\rho)(t)\right\|_{L^q} \le 1$。

令

$$T^* \triangleq \sup\left\{T \mid (\rho,u,\theta)\text{是}(1.1)\text{在}\ \Omega\times[0,T]\ \text{上的一个强解}\right\},$$

$$T_1^* \triangleq \sup\left\{T \mid (\rho,u,\theta)\text{是}(1.1)\text{在}\ \Omega\times(0,T]\ \text{上的一个强解且}\ \sup_{0\le t\le T}\left\|\nabla \mu(\rho)\right\|_{L^q} \le 1\right\}.$$

则$T_1^* \ge T_1 > 0$。由定理 5.1.5 易得

$$T^* = T_1^*. \tag{5.35}$$

显然，$T^* = \infty$。否则，如果$T^* < \infty$，由引理 4.1.4，4.1.5，4.1.6，对于任意的$t \in (0,T^*)$，存在一个一致常数$C(T^*)$的，使得

$$\left\|\rho(t)\right\|_{W^{1,q}}+\left\|u(t)\right\|_{H^2}+\left\|\theta(t)\right\|_{H^2}\leq C\left(T^*\right),$$

应用定理 1.1 的证明，取 $(\rho,u,\theta)\left(T^*,x\right)$ 作为初始数据可将局部强解推广至 T^* 之外。至此完成定理 2.2 的证明。

致 谢

作者非常感谢审稿人提出的建设性的意见和友好的建议。

基金项目

作者由国家自然科学基金资助项目——青年科学基金项目(管道中的定常不可压缩与可压缩空泡流的适定性理论，项目编号：12001071)资助。

参考文献

[1] Kazhikov, A.V. (1974) Resolution of Boundary Value Problems for Nonhomogeneous Viscous Fluids. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi*, **216**, 1008-1010.

[2] Jun Choe, H. and Kim, H. (2003) Strong Solutions of the Navier-Stokes Equations for Nonhomogeneous Incompressible Fluids. *Communications in Partial Differential Equations*, **28**, 1183-1201. https://doi.org/10.1081/pde-120021191

[3] Huang, X. and Wang, Y. (2013) Global Strong Solution to the 2D Nonhomogeneous Incompressible MHD System. *Journal of Differential Equations*, **254**, 511-527. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.029

[4] Danchin, R. and Mucha, P.B. (2018) The Incompressible Navier-Stokes Equations in Vacuum. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **72**, 1351-1385. https://doi.org/10.1002/cpa.21806

[5] Zhang, X. and Tan, Z. (2015) The Global Wellposedness of the 3D Heat-Conducting Viscous Incompressible Fluids with Bounded Density. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **22**, 129-147. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.001

[6] Guo, Z. and Li, Q. (2021) Global Existence and Large Time Behaviors of the Solutions to the Full Incompressible Navier-Stokes Equations with Temperature-Dependent Coefficients. *Journal of Differential Equations*, **274**, 876-923. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.10.031

[7] Ladyzhenskaya, O.A. and Solonnikov, V.A. (1978) Unique Solvability of an Initial and Boundary-Value Problem for Viscous Incompressible Nonhomogeneous Fluids. *Journal of Soviet Mathematics*, **9**, 697-749. https://doi.org/10.1007/bf01085325

[8] Itoh, S. and Tani, A. (1999) Solvability of Nonstationary Problems for Nonhomogeneous Incompressible Fluids and the Convergence with Vanishing Viscosity. *Tokyo Journal of Mathematics*, **22**, 17-42. https://doi.org/10.3836/tjm/1270041610

[9] Padula, M. (1982) An Existence Theorem for Non-Homogeneous Incompressible Fluids. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **31**, 119-124. https://doi.org/10.1007/bf02849542

[10] Padula, M. (1990) On the Existence and Uniqueness of Non-Homogeneous Motions in Exterior Domains. *Mathematische Zeitschrift*, **203**, 581-604. https://doi.org/10.1007/bf02570758

[11] Salvi, R. (1991) The Equations of Viscous Incompressible Non-Homogeneous Fluids: On the Existence and Regularity. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, *Series B*, *Applied Mathematics*, **33**, 94-110. https://doi.org/10.1017/s0334270000008651

[12] Zhong, X. (2017) Global Strong Solution for 3D Viscous Incompressible Heat Conducting Navier-Stokes Flows with Non-Negative Density. *Journal of Differential Equations*, **263**, 4978-4996. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.06.004

[13] Zhong, X. (2020) Global Existence and Large Time Behavior of Strong Solutions for 3D Nonhomogeneous Heat Conducting Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article 111503. https://doi.org/10.1063/5.0012871

[14] Zhong, X. (2018) Global Strong Solution for Viscous Incompressible Heat Conducting Navier-Stokes Flows with Density-Dependent Viscosity. *Analysis and Applications*, **16**, 623-647. https://doi.org/10.1142/s0219530518500069

[15] DiPerna, R.J. and Lions, P.L. (1988) Equations différentielles ordinaires et équations de transport avec descoefficients irréguliers. In: *Séminaire Équations aux dérivées partielles* (*Polytechnique*) *dit aussi* "*Séminaire Goulaouic-Schwartz*", 1-9.

[16] Lions, P.L. (1996) Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume I: Incompressible Models. Oxford University Press.

[17] Desjardins, B. (1997) Regularity Results for Two-Dimensional Flows of Multiphase Viscous Fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **137**, 135-158. https://doi.org/10.1007/s002050050025

[18] Abidi, H. and Zhang, P. (2015) On the Global Well-Posedness of 2-D Inhomogeneous Incompressible Navier-Stokes System with Variable Viscous Coefficient. *Journal of Differential Equations*, **259**, 3755-3802. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.05.002

[19] Cho, Y. and Kim, H. (2004) Unique Solvability for the Density-Dependent Navier-Stokes Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **59**, 465-489. https://doi.org/10.1016/j.na.2004.07.020

[20] Liang, Z. (2015) Local Strong Solution and Blow-Up Criterion for the 2D Nonhomogeneous Incompressible Fluids. *Journal of Differential Equations*, **258**, 2633-2654. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.12.015

[21] Lü, B., Shi, X. and Zhong, X. (2018) Global Existence and Large Time Asymptotic Behavior of Strong Solutions to the Cauchy Problem of 2D Density-Dependent Navier-Stokes Equations with Vacuum. *Nonlinearity*, **31**, 2617-2632. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aab31f

[22] Huang, X. and Wang, Y. (2014) Global Strong Solution with Vacuum to the Two Dimensional Density-Dependent Navier-Stokes System. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **46**, 1771-1788. https://doi.org/10.1137/120894865

[23] Wang, W., Yu, H. and Zhang, P. (2018) Global Strong Solutions for 3D Viscous Incompressible Heat Conducting Navier-Stokes Flows with the General External Force. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4589-4601. https://doi.org/10.1002/mma.4915

[24] Zhong, X. (2022) Global Existence and Large Time Behavior of Strong Solutions for Nonhomogeneous Heat Conducting Navier-Stokes Equations with Large Initial Data and Vacuum. *Communications in Mathematical Sciences*, **20**, 1193-1209. https://doi.org/10.4310/cms.2022.v20.n5.a1

[25] Cho, Y. and Kim, H. (2008) Existence Result for Heat-Conducting Viscous Incompressible Fluids with Vacuum. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **45**, 645-681. https://doi.org/10.4134/jkms.2008.45.3.645