

一类三维保守系统中的同宿轨异宿环和混沌

杨 廷¹, 蔡 玥^{1*}, 路 凯²

¹江西财经大学信息管理与数学学院, 江西 南昌

²长江大学信息与数学学院, 湖北 荆州

收稿日期: 2025年3月28日; 录用日期: 2025年4月23日; 发布日期: 2025年4月29日

摘 要

本文研究了一个三维保守系统的同宿轨、异宿环和混沌。当系统有一条平衡点曲线时, 我们得到连接原点的两条同宿轨并且给出了解析表达式。在另一条件下, 我们发现系统存在一个异宿环, 并且给出了解析表达式。当系统有无穷多孤立平衡点时, 我们分析了这些平衡点的稳定性, 发现系统具有暂态混沌现象。此外, 系统展示了一些共存的轨道, 包括混沌和周期轨共存, 拟周期轨和周期轨共存, 混沌和拟周期轨共存。

关键词

同宿轨, 异宿环, 混沌, 共存轨道

Homoclinic Orbits, Heteroclinic Cycle and Chaos in a Three-Dimensional Conservative System

Ting Yang¹, Yue Cai^{1*}, Kai Lu²

¹School of Information Management and Mathematics, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang Jiangxi

²School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou Hubei

Received: Mar. 28th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

This paper investigates the homoclinic orbits, heteroclinic cycle and chaos in a three-dimensional

*通讯作者。

文章引用: 杨廷, 蔡玥, 路凯. 一类三维保守系统中的同宿轨异宿环和混沌[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 954-967.
DOI: 10.12677/aam.2025.144219

conservative system. First, if the system has a curve of equilibria, we get two homoclinic orbits associating with the origin and give the analytical expression. Under another condition, the system has a heteroclinic cycle and the analytical expression is also given. Second, if the system has infinitely many isolated equilibria, we analyse the stabilities of the equilibria. In this case, we find that the system could show transient chaos phenomenon. Moreover, several coexisting orbits are found in the system, including coexisting chaotic orbit and periodic orbits, coexisting quasi-periodic orbits and periodic orbits, coexisting chaotic orbit and quasi-periodic orbits.

Keywords

Homoclinic Orbit, Heteroclinic Cycle, Chaos, Coexisting Orbit

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

混沌，作为二十世纪最伟大的发现之一，已经取得了广泛的关注，并且在非线性电路、生物模型、经济模型等领域展示了很好的应用前景[1]-[8]。

耗散系统和保守系统都可以有混沌行为。对前者而言，局部相空间的体积随着时间的变化是处处压缩的，渐近状态体现为吸引子。然而，对于保守系统而言，相空间的体积是保持不变的。这就意味着保守系统不存在吸引子。因此，保守系统中的混沌是一个非吸引的混沌集。而且，这个混沌集的维数等于系统的维数。这也意味着保守混沌系统比耗散混沌系统具有更丰富的遍历性[9] [10]。

在混沌系统中，同宿轨和异宿轨是两类特殊的连接轨道。同宿轨指的是当时间趋于负无穷和正无穷时，会趋于同一个不变集的一条连接轨道。异宿轨指的是当时间趋于负无穷和正无穷时，会趋于两个不同不变集的一条连接轨道[11]。在一定条件下，同宿轨和异宿轨能够分支出混沌和周期轨。基于这个性质，越来越多的学者致力于同宿轨和异宿轨的研究[12]-[23]。

对自治系统而言，给出同宿轨和异宿轨的存在性是一项困难的任务，而得到轨道的精确表达式更是一个挑战。Hale 等人[24]给出了 Gray-Scott 模型精确的同宿解和异宿解；Bao 和 Yang [25]提出了一个新的方法来得到精确的同宿轨；Li 和 Zhao [26]给出了一个三维系统的精确异宿环族；Li 和 Chen [27]研究了三阶系统中的精确同宿轨和异宿轨；Algaba 等人[28]利用爆破技术研究了一条精确的同宿轨；Zhang 和 Li [29]得到了一类三维流的精确同宿轨。然而，据我们所知，对具有平衡点曲线的三维自治系统中的精确同宿轨和异宿环，并没有相应结果。

本文研究了如下三维保守系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = ay + bx^2y + c \sin x, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\dot{} = \frac{d}{dt}$ 。容易验证系统(1)的散度等于 0，这说明此系统是一个体积不变的保守系统。当 $c = 0$ ，系统有一条平衡点曲线，同时我们发现系统有两条同宿轨和一个同宿环并且得到了他们的解析表达式。我们发现这些连接轨道可以在很宽的参数范围内持续存在。当 c 变为非零时，系统由退化结构变为非退化结构，并且稳定流形与不稳定流形发生分离，从而平衡曲线、同宿轨和异宿轨同时消失。此时，系统中出现了

无穷多个孤立平衡点。我们证明了所有的平衡点都是鞍点。在这种情况下，我们发现系统能够显示瞬态混沌到周期解现象。我们也给出了系统轨道上某个变量的演化过程和这两种状态的 Poincare 映射。此外，得到了共存的轨道，如共存的混沌轨道和周期轨道，共存的拟周期轨道和周期轨道，共存的混沌轨道和拟周期轨道。

本文安排如下：第二节给出了两条同宿轨和异宿环的存在条件，并且给出了这些连接轨道的解析表达式；第三节分析了平衡点的稳定性，而且展示了暂态混沌现象以及一些共存的轨道。

2. 同宿轨和异宿环

本节考虑 $c=0$ 时系统(1)的动力学。此时，系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = ay + bx^2y. \end{cases} \quad (2)$$

从系统(2)可知， x 轴是一条平衡点曲线。通过对方程的积分，我们可以得到两个精确的同宿轨和一个精确的异宿环。

定理 2.1 当 $a > 0, b < 0$ 时，系统(2)有两条连接原点的同宿轨 Γ_1 和 Γ_2 。解析表达式如下：

$$\Gamma_1 = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \quad \Gamma_2 = (-x_1(t), -y_1(t), -z_1(t)),$$

其中

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}}, \\ y_1(t) &= \frac{2\sqrt{a}\left(e^{-\sqrt{a}t} + \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)}{\left(e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^2}, \\ z_1(t) &= \frac{-2a\left(e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^2 + 4a\left(e^{-\sqrt{a}t} + \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^2}{\left(e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^3}. \end{aligned}$$

证明：从系统(2)可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = z$$

和

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dz}{dt} = (a + bx^2) \frac{dx}{dt}. \quad (3)$$

作变换

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-1} \\ &= \frac{dx}{dt} \cdot (-1) \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-2} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = - \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-3} \cdot \frac{d^2t}{dx^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(- \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-3} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} \right) \\
 &= \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-1} \cdot \left(3 \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-3} \cdot \frac{d^3t}{dx^3} \right) \\
 &= 3 \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-5} \cdot \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-4} \cdot \frac{d^3t}{dx^3}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

结合(3)和(5), 可得

$$3 \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-3} \cdot \frac{d^3t}{dx^3} = a + bx^2. \tag{6}$$

令 $U(x) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-2}$, 则

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{dx} &= -2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-3} \frac{d^2t}{dx^2}, \\
 \frac{d^2U}{dx^2} &= 6 \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-3} \cdot \frac{d^3t}{dx^3}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

从(6)和(7), 得

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2(a + bx^2),$$

因此,

$$U = \frac{b}{6}x^4 + ax^2 + c_1x + c_2,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。于是, 可得

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{b}{6}x^4 + ax^2 + c_1x + c_2} \tag{8}$$

或

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{b}{6}x^4 + ax^2 + c_1x + c_2}. \tag{9}$$

令 $c_1 = c_2 = 0$, 则(8)变成

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{b}{6}x^4 + ax^2}, \tag{10}$$

其中 $a < 0, b < 0$ 。通过对上式积分, 得到(10)的一个解

$$x_1(t) = \frac{2}{e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}}. \tag{11}$$

从系统(2), 有

$$y_1(t) = \frac{2\sqrt{a}\left(e^{-\sqrt{a}t} + \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)}{\left(e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^2}, \quad (12)$$

$$z_1(t) = \frac{-2a\left(e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^2 + 4a\left(e^{-\sqrt{a}t} + \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^2}{\left(e^{-\sqrt{a}t} - \frac{b}{6a}e^{\sqrt{a}t}\right)^3}. \quad (13)$$

因此, $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ 是系统(2)的一个解析解。当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ 会趋于原点 $(0, 0, 0)$ 。这样一来, $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ 就是系统(2)的一个同宿解。

同理对方程(9)积分, 可得系统(2)的另一个同宿解 $(-x_1(t), -y_1(t), -z_1(t))$ 。

定理证明完毕。

为了验证结果, 我们给出数值仿真。令 $a=1, b=-24$, 那么系统(2)有一条(黑色的)平衡点曲线。选择初始点为 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0.4, -0.24, -0.112)$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时, 轨道(蓝色部分和红色部分)都会趋于原点。于是, 就得到一条同宿轨, 如图1所示。选择另一初始点为 $(-x_1(0), -y_1(0), -z_1(0)) = (-0.4, 0.24, 0.112)$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时, 轨道(绿色部分和粉色部分)也都会趋于原点。于是, 也得到一条同宿轨, 如图1所示。

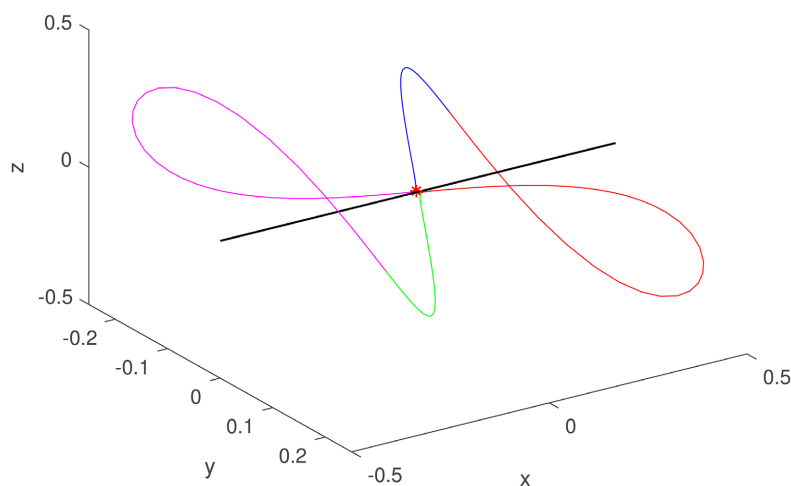


Figure 1. Two homoclinic orbits of system (2) with $a=1, b=-24$

图1. 当 $a=1, b=-24$ 时, 系统(2)的两条同宿轨

定理 2.2 令 $a < 0, b > 0$, 则系统(2)有一个连接 $\left(\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$ 和 $\left(-\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$ 的异宿环:

$$\gamma_1 \cup \left(-\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right) \cup \gamma_2 \cup \left(\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right).$$

解析表达式为

$$\gamma_1 = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)), \quad \gamma_2 = (-x_2(t), -y_2(t), -z_2(t)),$$

其中

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \sqrt{\frac{-3a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{\sqrt{-2}at}}{1 + e^{\sqrt{-2}at}}, \\ y_2(t) &= -\sqrt{\frac{24a^2}{b}} \cdot \frac{e^{\sqrt{-2}at}}{(1 + e^{\sqrt{-2}at})^2}, \\ z_2(t) &= -\sqrt{\frac{-48a^3}{b}} \cdot \frac{e^{\sqrt{-2}at}(1 - e^{\sqrt{-2}at})}{(1 + e^{\sqrt{-2}at})^3}. \end{aligned}$$

证明: 令 $c_1 = 0, c_2 = \left(\frac{3a}{b}\right)^2$, 则方程(8)为

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{b}{6}} \left(x^2 + \frac{3a}{b} \right), \quad (14)$$

其中 $a < 0, b > 0$ 。通过积分, 可得(14)的一个解

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{-3a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{\sqrt{-2}at}}{1 + e^{\sqrt{-2}at}}. \quad (15)$$

从系统(2), 可得

$$y_2(t) = -\sqrt{\frac{24a^2}{b}} \cdot \frac{e^{\sqrt{-2}at}}{(1 + e^{\sqrt{-2}at})^2}, \quad (16)$$

$$z_2(t) = -\sqrt{\frac{-48a^3}{b}} \cdot \frac{e^{\sqrt{-2}at}(1 - e^{\sqrt{-2}at})}{(1 + e^{\sqrt{-2}at})^3}. \quad (17)$$

因此, $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ 是系统(2)的一个解析解。而且, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 解 $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ 会趋于 $\left(-\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 解 $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ 会趋于 $\left(\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$ 。所以, 解 $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ 就是系统(2)的一个异宿解。

同理, 对方程(9), 可得系统(2)的另一个异宿解: $(-x_2(t), -y_2(t), -z_2(t))$ 。而且, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 解 $(-x_2(t), -y_2(t), -z_2(t))$ 会趋于 $\left(\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 解 $(-x_2(t), -y_2(t), -z_2(t))$ 会趋于 $\left(-\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$ 。

于是, 这两个异宿轨和这两个平衡点 $\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{b}}, 0, 0\right)$ 构成了一个异宿环。定理证明完毕。

为了验证结果, 我们给出数值仿真。令 $a = -2, b = 6$, 那么系统(2)有一条(黑色的)平衡点曲线。选择初始点为 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0, -1, 0)$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时, 轨道(蓝色部分和红色部分)会分别趋于 $(-1, 0, 0)$ 和 $(1, 0, 0)$ 。于是, 就得到一条异宿轨, 如图 2 所示。选择另一初始点为 $(-x_2(0), -y_2(0), -z_2(0)) = (0, 1, 0)$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时, 轨道(绿色部分和粉色部分)也会分别趋于 $(1, 0, 0)$ 和 $(-1, 0, 0)$ 。于是, 也得到一条异宿轨, 如图 2 所示。因此, 构成了一个异宿环。

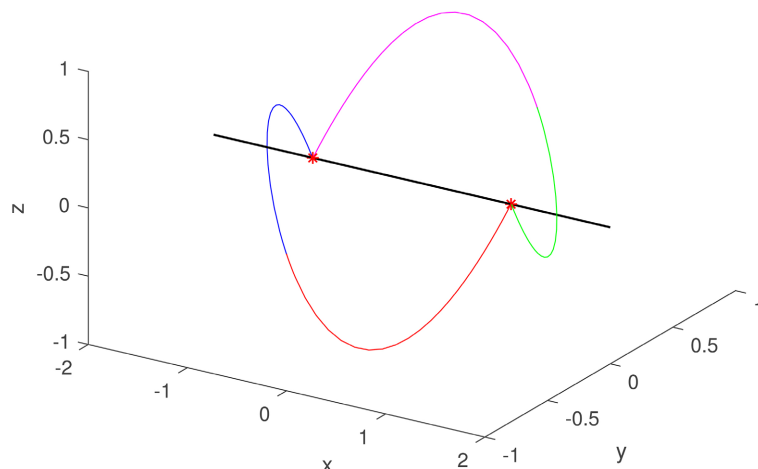


Figure 2. The heteroclinic cycle of system (2) with $a = -2, b = 6$

图 2. 当 $a = -2, b = 6$ 时, 系统(2)的异宿环

3. 保守混沌

本节研究当 $c \neq 0$ 时, 系统(1)的动力学。此时, 系统有无穷多个孤立的平衡点。我们分析了这些平衡点的稳定性, 发现所有平衡点都是鞍点。而且, 我们发现系统能够展示暂态混沌现象, 给出了关于变量 x 的波形图。此外, 发现了一些轨道共存现象。包括共存的混沌轨道和周期轨道, 共存的拟周期轨道和周期轨道, 共存的混沌轨道和拟周期轨道。

3.1. 无穷多孤立平衡点

定理 3.1 令 $c \neq 0$, 则系统(1)有无穷多个鞍点 $E_k(k\pi, 0, 0)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

证明: 当 $c \neq 0$, 则系统(1)有无穷多个平衡点 $E_k(k\pi, 0, 0)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

当 k 是偶数时, 系统(1)在平衡点 E_k 处的 Jacobi 矩阵是

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & a + bk^2\pi^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

则特征方程为

$$\lambda^3 - (a + bk^2\pi^2)\lambda - c = 0. \quad (18)$$

根据 Routh-Hurwitz 判别法, 相应的三个行列式为

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = c, \Delta_3 = -c^2.$$

这意味着方程(18)的根的实部并不全是负的。而且, 三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = c.$$

于是, 当 $c > 0$ 时, 特征值有两个负实部和一个正实部。当 $c < 0$ 时, 特征值有一个负实部和两个正实部。

类似地, 当 k 是奇数时, 可以得到: 当 $c > 0$ 时, 特征值有一个负实部和两个正实部。当 $c < 0$ 时, 特征值有两个负实部和一个正实部。

所以, 对所有 $k \in \mathbb{Z}$, 平衡点 $E_k(k\pi, 0, 0)$ 都是鞍点。

3.2. 暂态混沌

令 $a=1, b=-1.5, c=0.96$ 。选择 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 为初始点, 时间 t 从 0 到 30000, 我们研究系统(1)的轨道中变量 x 的变化过程, 如图 3 所示。为了更清晰地展示此过程, 我们对图 3 做了局部放大, 如图 4 所示。

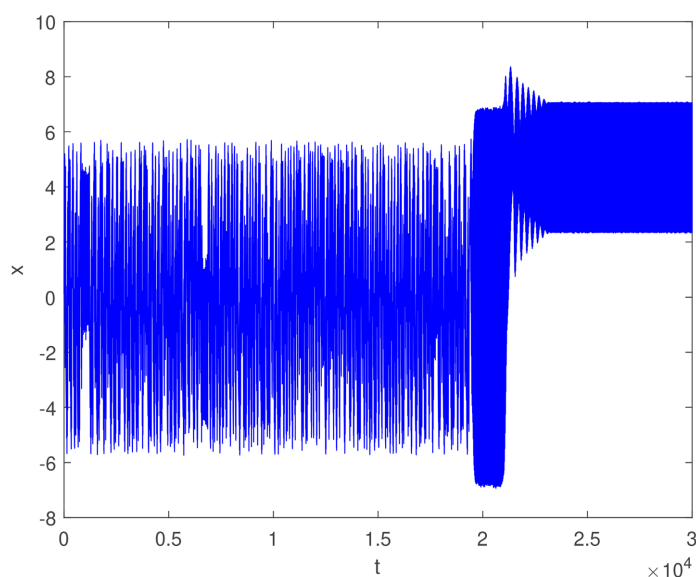


Figure 3. The waveform of system (1) variable x in the range $t \in [0, 30000]$

with $a=1, b=-1.5, c=0.96$

图 3. 当 $a=1, b=-1.5, c=0.96$ 时, 系统(1)中变量 x 波形图(t 从 0 到 30000)

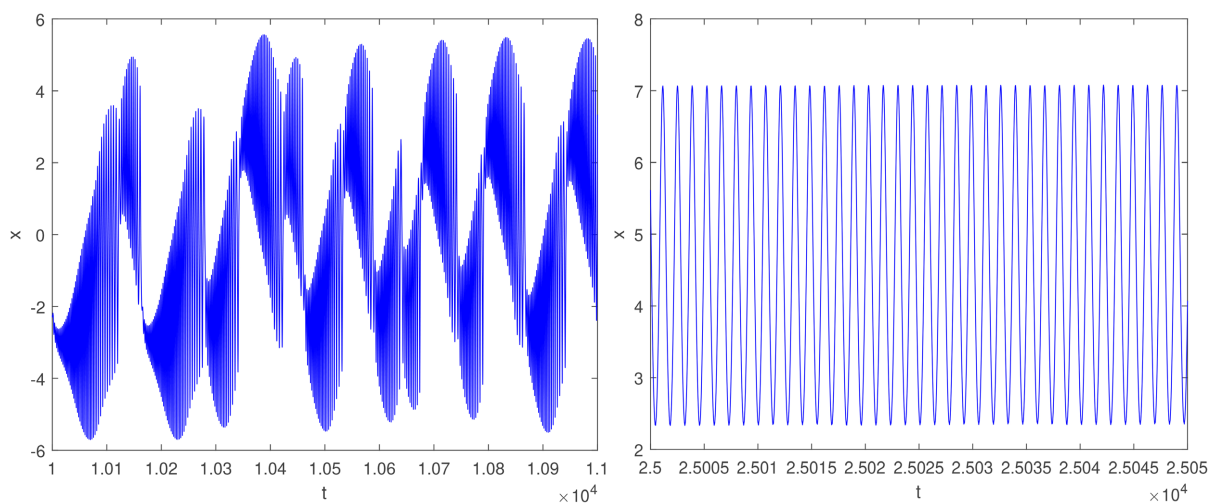


Figure 4. The locally amplified waveform of system (1) variable x

图 4. 系统(1)中变量 x 的局部放大的波形图

从 x 的波形图可知, 系统(1)在有限时间内会展示一个混沌行为(对应的混沌集的 Lyapunov 指数为 0.0355, 0.0000, -0.0355), 随着时间的推移, 演变成一个周期行为。图 5 给出了相空间中暂态混沌和周期轨道的图形, 图 6(a)和图 6(b)分别给出了暂态混沌和周期轨道的 Poincare 点, 其中 Poincare 截面为 $y=0$ 。

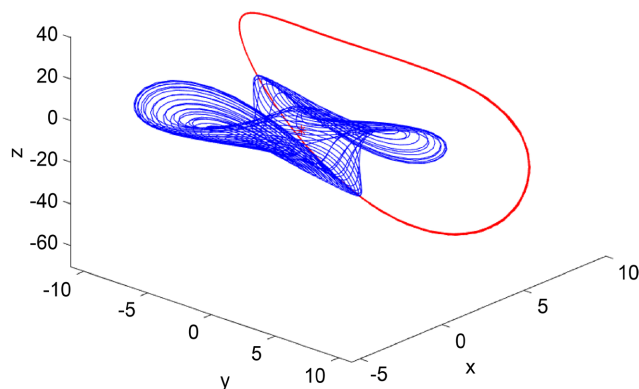


Figure 5. The transient chaos and periodic orbit of system (1) with $a=1, b=-1.5, c=0.96$

图 5. 当 $a=1, b=-1.5, c=0.96$ 时, 系统(1)的暂态混沌和周期轨道

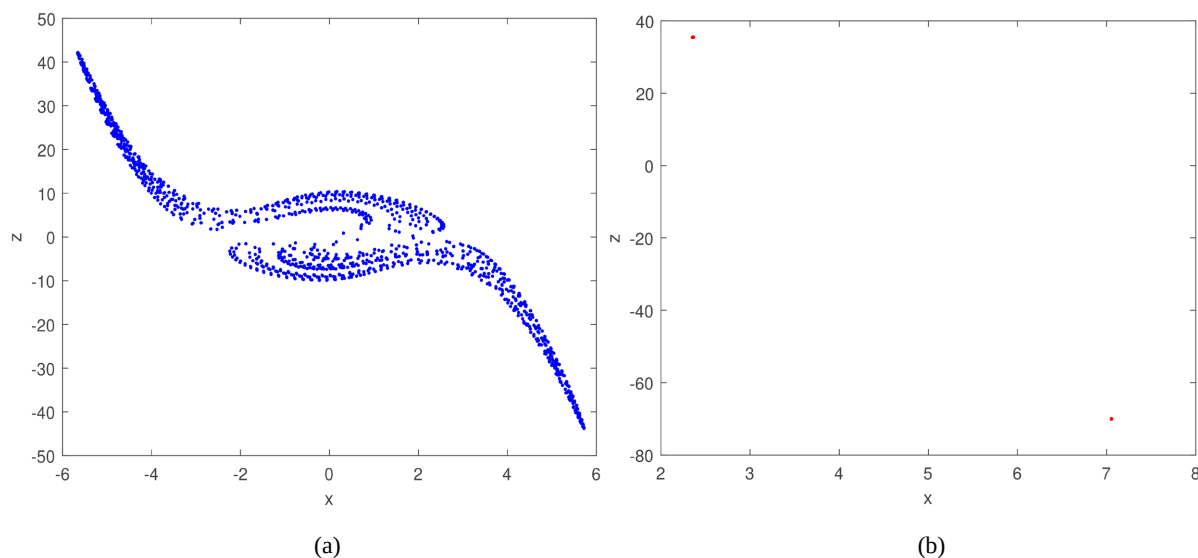


Figure 6. The Poincaré points of system (1) with $a=1, b=-1.5, c=0.96$: (a) Transient chaos; (b) Periodic orbit

图 6. 当 $a=1, b=-1.5, c=0.96$ 时, 系统(1) Poincaré 点: (a) 暂态混沌; (b) 周期轨道

这里暂态混沌的出现是由于系统有一个非吸引的混沌集。通过解对初值的连续依赖性, 从非吸引的混沌集附近出发的轨道在有限时间内会保持在混沌集的小邻域内运动。随着时间的推移, 轨道可能会远离这个混沌集, 也可能继续在混沌集的邻域内运动。对前者而言, 可以观察到一个暂态的混沌现象; 而对于后者, 就可以用轨道近似地描绘出混沌集的结构。系统的分岔图如图 7 所示。

3.3. 混沌与周期轨共存

在变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ 下, 系统(1)是形式不变的。这就意味着, 如果系统有一个非对称的不变集 $\mathcal{M}$, 那么一定存在另一个不变集 $\overline{\mathcal{M}}$, 它和 $\mathcal{M}$ 是关于原点 $(0, 0, 0)$ 对称的。

令 $a=1, b=-1.5, c=-0.5$ 。分别选择取 $(0.1, -0.3, 0.5)$ 和 $(-0.1, 0.3, -0.5)$ 为初始点, 得到两个共存的周期轨道(红色部分和黄色部分), 如图 8(a)所示。选取另一个初始点 $(0.3, 0.3, 0.3)$, 得到一个混沌轨道, 如图 8(b)所示。因此, 我们得到了系统(1)的混沌和两个周期轨共存, 如图 9 所示。

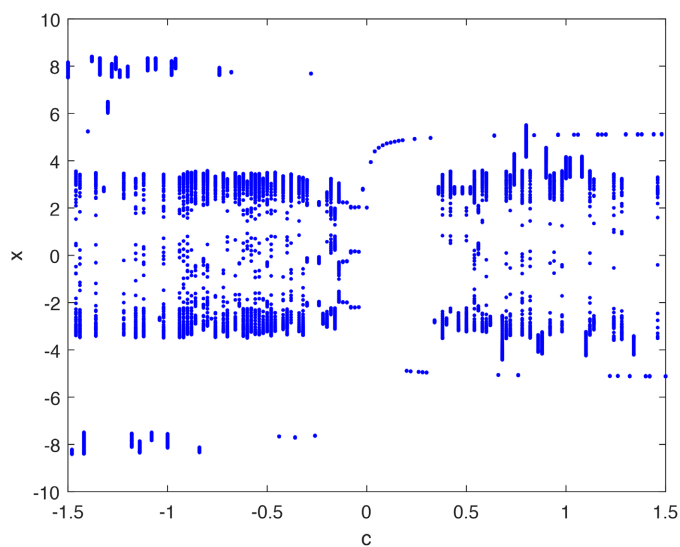


Figure 7. The bifurcation diagram of system (1) with $a=1, b=-1.5$

图 7. 当 $a=1, b=-1.5$ 时, 系统(1)的分岔图

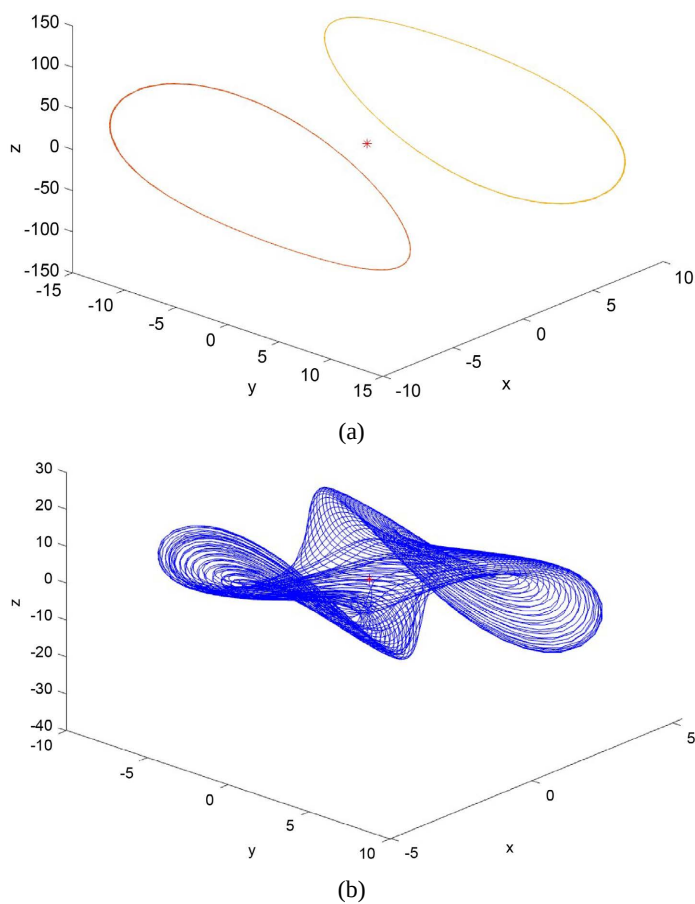


Figure 8. The coexisting orbits of system (1) with $a=1, b=-1.5, c=-0.5$:
(a) Two periodic orbits; (b) Chaos

图 8. 当 $a=1, b=-1.5, c=-0.5$ 时, 系统(1)的共存轨道: (a) 两个周期轨道; (b) 混沌

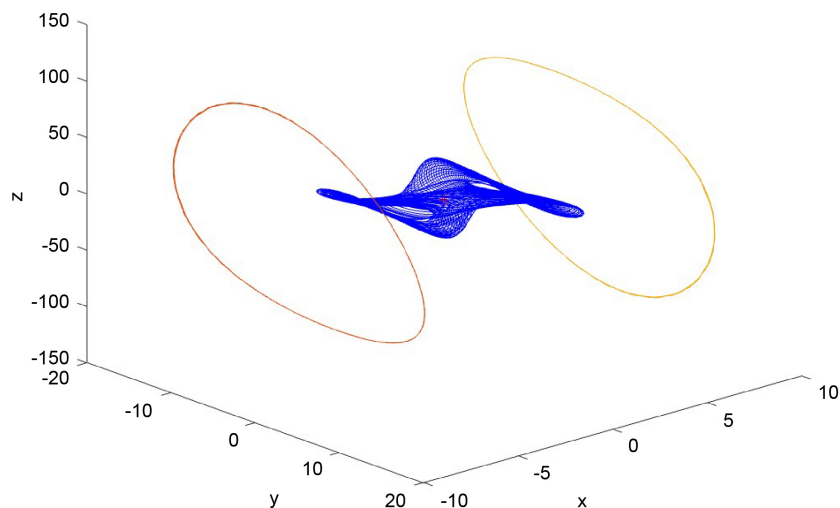


Figure 9. The coexistence of chaos and periodic orbits of system (1) with $a=1, b=-1.5, c=-0.5$
图 9. 当 $a=1, b=-1.5, c=-0.5$ 时, 系统(1)的混沌和周期轨的共存

3.4. 拟周期与周期轨共存

令 $a=1, b=-1.5, c=0.26$ 。分别选择取 $(0.3, 0.3, 0.3)$ 和 $(-0.3, -0.3, -0.3)$ 为初始点, 得到两个共存的拟周期轨道(蓝色部分和红色部分), 如图 10(a)所示。图 10(b)展示了这两个拟周期轨道在截面 $x=0$ 上的 Poincare 点。

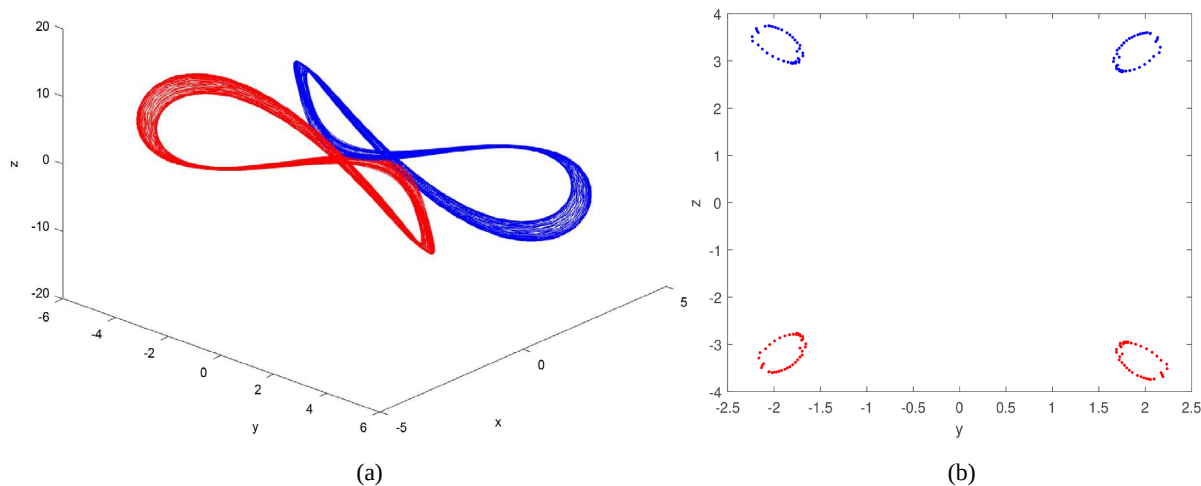


Figure 10. The coexisting orbits of system (1) with $a=1, b=-1.5, c=0.26$: (a) Two quasi-periodic orbits; (b) The Poincare points

图 10. 当 $a=1, b=-1.5, c=0.26$ 时, 系统(1)的共存轨道: (a) 两个拟周期轨道; (b) Poincare 点

选取另一对初始点 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 和 $(-0.1, -0.1, -0.1)$, 得到两个共存的周期轨道(绿色部分和黑色部分), 如图 11 所示。因此, 系统(1)有两个拟周期轨和两个周期轨共存, 如图 11 所示。

3.5. 混沌与拟周期轨共存

令 $a=1, b=-1.5, c=-1.46$ 。分别选择取 $(0.3, 0.3, 0.3)$ 和 $(-0.3, -0.3, -0.3)$ 为初始点, 得到两个共存的拟

周期轨道(绿色部分和蓝色部分), 如图 12(a)所示。图 12(b)展示了这两个拟周期轨道在截面 $z=0$ 上的 Poincare 点。

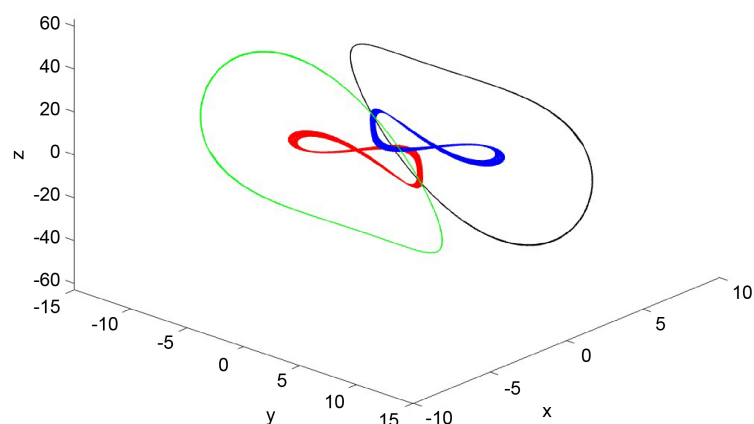
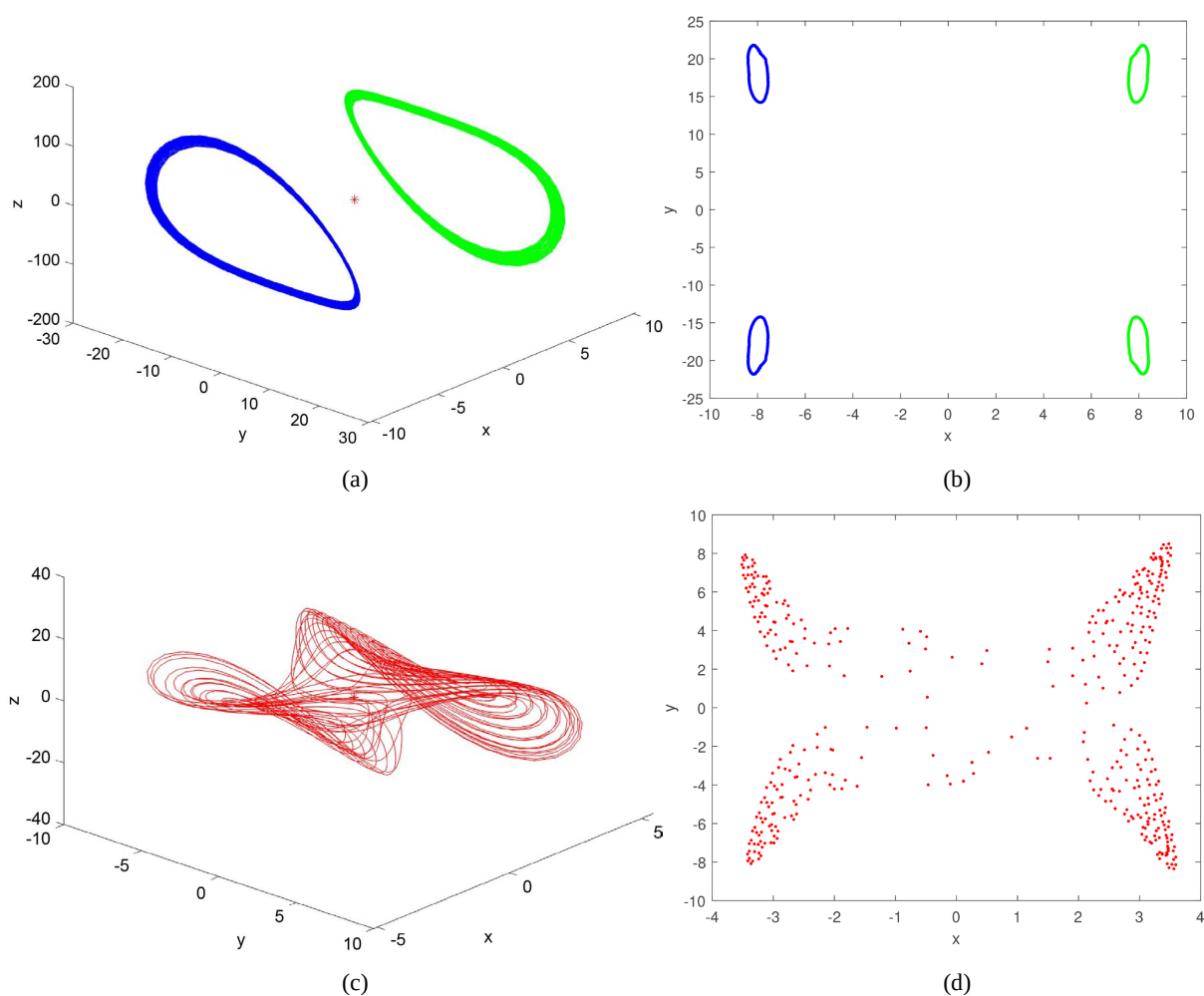


Figure 11. The coexistence of quasi-periodic orbits and periodic orbits of system (1) with $a=1, b=-1.5, c=0.26$

图 11. 当 $a=1, b=-1.5, c=0.26$ 时, 系统(1)的拟周期轨和周期轨的共存



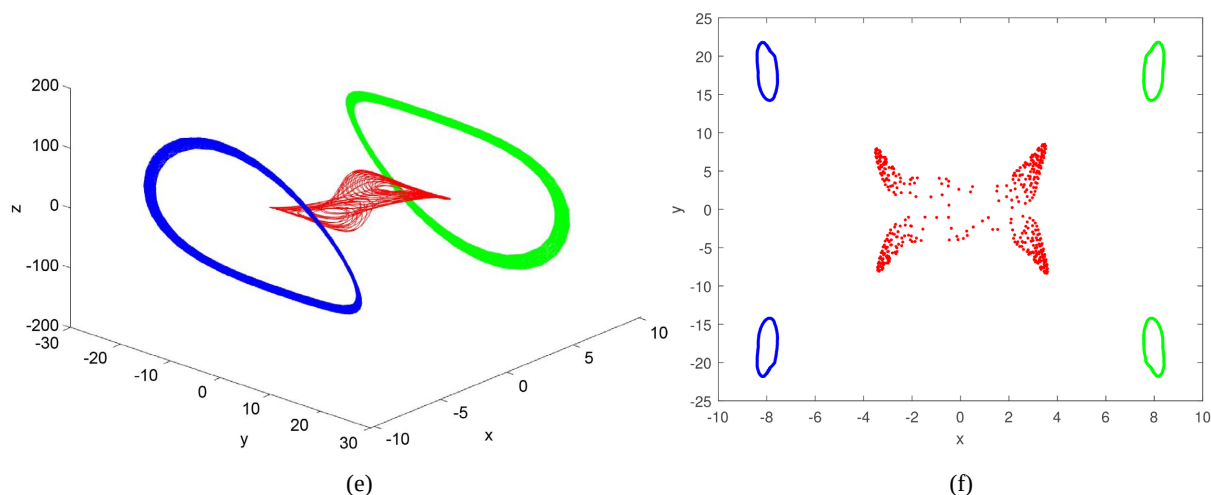


Figure 12. System (1) with $a=1, b=-1.5, c=-1.46$: (a) (b) Two quasi-periodic orbits and Poincare points; (c) (d) Chaos and Poincare points; (e) (f) The coexisting orbits and Poincare points

图 12. 当 $a=1, b=-1.5, c=-1.46$ 时系统(1)的: (a) (b) 两个拟周期轨道及 Poincare 点; (c) (d) 混沌及 Poincare 点; (e) (f) 共存轨道及 Poincare 点

选取另一个初始点 $(0.1, 0.1, 0.1)$, 得到一个混沌轨道(红色部分), 如图 12(c)所示。图 12(d)展示了这个混沌轨道在截面 $z=0$ 上的 Poincare 点。因此, 系统(1)有混沌与两个拟周期轨共存, 如图 12(e)所示。图 12(f)展示了这个混沌与拟周期轨在截面 $z=0$ 上的 Poincare 点。

4. 结论

本文研究了一类具有平衡点曲线的系统中的精确的同宿轨道、异宿环和混沌现象, 而现有的关于精确连接轨道的研究中平衡点都是孤立的。事实上, 这个系统具有两个奇异退化异宿环。而且, 这些连接轨道能够在大参数范围下持续存在。因此, 本文得到的同宿轨和异宿环对某些系统参数的小扰动是稳定。进一步, 系统展示了暂态混沌现象, 以及混沌、拟周期轨、周期轨之间的两两共存。本文的结果对于研究自治系统中其他类型的精确轨道和共存轨道也许会有一定帮助。

基金项目

国家自然科学基金项目(Nos. 12101271, 12101272, 12101078), 江西省自然科学基金项目(No. 2024BAB20005)。

参考文献

- [1] 王高雄, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [2] 杨廷. 三维非线性自治系统的复杂动力学研究[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2018.
- [3] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:dnf>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2)
- [4] Strogatz, S.H. (2018) *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press.
- [5] Zaher, A.A. and Abu-Rezq, A. (2011) On the Design of Chaos-Based Secure Communication Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 3721-3737. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.12.032>
- [6] Shil'nikov, L.P. (2001) *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*. World Scientific.
- [7] Yang, T. (2020) Dynamical Analysis on a Finance System with Nonconstant Elasticity of Demand. *International Journal*

- of *Bifurcation and Chaos*, **30**, Article ID: 2050148. <https://doi.org/10.1142/s0218127420501485>
- [8] Sahu, S.R. and Raw, S.N. (2023) Appearance of Chaos and Bi-Stability in a Fear Induced Delayed Predator-Prey System: A Mathematical Modeling Study. *Chaos, Solitons & Fractals*, **175**, Article ID: 114008. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114008>
 - [9] Dong, E., Yuan, M., Du, S. and Chen, Z. (2019) A New Class of Hamiltonian Conservative Chaotic Systems with Multistability and Design of Pseudo-Random Number Generator. *Applied Mathematical Modelling*, **73**, 40-71. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.037>
 - [10] Lai, Y.-C. and Tel, T. (2011) *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales*. Springer Science & Business Media.
 - [11] Wiggins, S. (2013) *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. Springer Science & Business Media, Berlin.
 - [12] Champneys, A.R., Kirk, V., Knobloch, E., Oldeman, B.E. and Rademacher, J.D.M. (2009) Unfolding a Tangent Equilibrium-to-Periodic Heteroclinic Cycle. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **8**, 1261-1304. <https://doi.org/10.1137/080734923>
 - [13] Hastings, S.P. and Troy, W.C. (1994) A Proof That the Lorenz Equations Have a Homoclinic Orbit. *Journal of Differential Equations*, **113**, 166-188. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1119>
 - [14] Kokubu, H. and Roussarie, R. (2004) Existence of a Singularly Degenerate Heteroclinic Cycle in the Lorenz System and Its Dynamical Consequences: Part I. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **16**, 513-557. <https://doi.org/10.1007/s10884-004-4290-4>
 - [15] Leonov, G.A. (2014) Fishing Principle for Homoclinic and Heteroclinic Trajectories. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 2751-2758. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1622-8>
 - [16] Coomes, B.A., Koçak, H. and Palmer, K.J. (2015) A Computable Criterion for the Existence of Connecting Orbits in Autonomous Dynamics. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **28**, 1081-1114. <https://doi.org/10.1007/s10884-015-9437-y>
 - [17] Yang, Q. and Yang, T. (2017) Complex Dynamics in a Generalized Langford System. *Nonlinear Dynamics*, **91**, 2241-2270. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-4012-1>
 - [18] Yang, T. (2020) Homoclinic Orbits and Chaos in the Generalized Lorenz System. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, **25**, 1097-1108. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019210>
 - [19] Lu, K., Yang, Q. and Chen, G. (2019) Singular Cycles and Chaos in a New Class of 3D Three-Zone Piecewise Affine Systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **29**, Article ID: 043124. <https://doi.org/10.1063/1.5089662>
 - [20] Lu, K. and Xu, W. (2022) Coexisting Singular Cycles in a Class of Three-Dimensional Three-Zone Piecewise Affine Systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, **27**, 7315-7349. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022045>
 - [21] Lu, K., Xu, W., Yang, T. and Xiang, Q. (2022) Chaos Emerges from Coexisting Homoclinic Cycles for a Class of 3D Piecewise Systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, **162**, Article ID: 112470. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112470>
 - [22] Vieira, R.S.S. and Mosna, R.A. (2022) Homoclinic Chaos in the Hamiltonian Dynamics of Extended Test Bodies. *Chaos, Solitons & Fractals*, **163**, Article ID: 112541. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112541>
 - [23] Ashtari, O. and Schneider, T.M. (2023) Jacobian-Free Variational Method for Computing Connecting Orbits in Nonlinear Dynamical Systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **33**, Article ID: 073134. <https://doi.org/10.1063/5.0143923>
 - [24] Hale, J.K., Peletier, L.A. and Troy, W.C. (2000) Exact Homoclinic and Heteroclinic Solutions of the Gray-Scott Model for Autocatalysis. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **61**, 102-130. <https://doi.org/10.1137/s0036139998334913>
 - [25] Bao, J. and Yang, Q. (2011) A New Method to Find Homoclinic and Heteroclinic Orbits. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 6526-6540. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.032>
 - [26] Li, J. and Zhao, X. (2011) Exact Heteroclinic Cycle Family and Quasi-Periodic Solutions for the Three-Dimensional Systems Determined by Chazy Class IX. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**, 1357-1367. <https://doi.org/10.1142/s0218127411029227>
 - [27] Li, J. and Chen, F. (2011) Exact Homoclinic Orbits and Heteroclinic Families for a Third-Order System in the Chazy Class XI ($N = 3$). *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**, 3305-3322. <https://doi.org/10.1142/s0218127411030544>
 - [28] Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. and Rodríguez-Luis, A.J. (2015) An Exact Homoclinic Orbit and Its Connection with the Rössler System. *Physics Letters A*, **379**, 1114-1121. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.02.017>
 - [29] Zhang, T. and Li, J. (2017) Exact Torus Knot Periodic Orbits and Homoclinic Orbits in a Class of Three-Dimensional Flows Generated by a Planar Cubic System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **27**, Article ID: 1750205. <https://doi.org/10.1142/s0218127417502054>