

一类带有对数非线性项的热方程的梯度爆破问题

王俊伟, 张玲玲*

太原理工大学数学学院, 山西 晋中

收稿日期: 2025年3月28日; 录用日期: 2025年4月23日; 发布日期: 2025年4月30日

摘要

我们考虑了具有一般对数非线性项的一维半线性热方程的梯度爆破问题, 也就是方程解本身有界, 但解的梯度会趋于无穷。通过尺度变换和抛物估计, 得到了解梯度的一个上界和下界。最后给出了一个特殊例子来验证。

关键词

热方程, 对数非线性项, 梯度爆破, 上下界

Gradient Blow Up Problem for a Class of Heat Equations with Logarithmic Nonlinear Terms

Junwei Wang, Lingling Zhang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Mar. 28th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 30th, 2025

Abstract

We considered the gradient blow up problem of the one-dimensional semi-linear heat equation with general logarithmic nonlinear term, which the solution of the equation is bounded but the gradient of the solution becomes unbounded. By the rescaling method and parabolic estimates, the upper and lower bounds of gradient blow up rate are established. Furthermore, an example is given to illustrate.

*通讯作者。

文章引用: 王俊伟, 张玲玲. 一类带有对数非线性项的热方程的梯度爆破问题[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 968-980.
DOI: 10.12677/aam.2025.144220

Keywords

Heat Equation, Logarithmic Nonlinear Terms, Gradient Blow Up, Upper and Lower Bounds

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自热方程被提出以来, 众多学者对其进行了广泛研究, 并取得了大量成果[1]-[10]。随着研究的深入, 问题变得愈发复杂, 导致方程类型发生变化。因此, 求得精确解变得极其困难, 促使研究人员对解的某些性质进行探究, 比如解在有限时间内趋于无穷大的爆破行为。在这一研究过程中, 发现了一种新的现象, 即梯度爆破。起初发现, 对于如下形式的方程[11]:

$$u_t = u_{xx} + F(u, \nabla u), \quad (1)$$

众所周知, 如果该方程满足下列条件

$$F(u, \nabla u) \leq C(u)(1 + |\nabla u|^2),$$

那么该方程任意有界解的梯度也是有界的。

随后, 文献[12]研究了如下的半线性抛物方程,

$$u_t = u_{xx} + e^{u_x},$$

并且证明了: 对于任意的初值 $u_0 \in C^1[0, 1]$, 都存在有限时间 $T \in (0, \infty)$ 使得 $\limsup_{t \rightarrow T} |u_x(0, t)| = \infty$ 。这样的一种现象叫做梯度爆破, 它不同于一般的爆破现象也就是 L^∞ 范数的爆破, 即当时间 $t \rightarrow T^-$ 时解本身趋于无穷。在最近这些年, 有限时间爆破的现象已经吸引了广泛的注意, 许多研究都关心解本身的爆破现象, 包括爆破准则, 爆破的位置, 爆破速率和爆破集。尤其是对于经典的半线性热传导方程: $u_t = \Delta u + u^p$, 研究者们已经取得了丰富的成果[13]-[16]。而关于梯度爆破的研究, 大部分的重点是放在爆破准则上, 也就是梯度爆破什么情况下会发生。例如, 看[17]-[18], 他们研究了一类特殊方程的梯度爆破条件。至于如下方程

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^p,$$

当 $p > 2$, 梯度爆破会发生, 并且这是唯一的情况。之后, 文献[19]证明了梯度爆破会发生在何处, 也就是, 梯度爆破仅仅会发生在边界。在文献[20]中, 设定合适的初值条件, 一维情况下的梯度爆破下界被计算为 $(T-t)^{-1/(p-2)}$ 。

有趣的是, 不同于其他情况, 文献[21]研究了带有指数非线性项的问题, 也就是 $u_t = u_{xx} + e^{u_x}$, 他们通过抛物估计, 得到了梯度爆破的上界和下界, 梯度爆破的速率约为 $-\ln(T-t)$ 。近几十年来, 带有对数形式非线性项的热传导方程受到了研究者的广泛关注, 如文献[22]和文献[23]研究了如下形式的热传导问题: $u_t = u_{xx} + u \ln|u|$, 他们通过索伯列夫不等式和势井方法, 得到了全局解的存在性和特定情况下爆破解的发生。据我们所知, 当非线性项 $f(u)$ 是一个对数梯度项的时候, 关于这方面的研究并不多, 因为在一般情况下比起单项式和指数项的情况, 对数项的积分和处理是更复杂困难的。而文献[24]通过抛物估计计算出了对数情况的梯度爆破上下界, 我们发现这种方法可以应用在对数非线性项中。

基于此, 我们考虑了如下带有对数非线性项的方程:

$$u_t = \Delta u + (|\nabla u| + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (|\nabla u| + p_2),$$

其中 $p_1 > 0, p_2 > 1$, 且有 2 种情况

情况 1: $q_1 > 2, q_2 > 0$;

情况 2: $q_1 = 2, q_2 > 1$ 。

由于技术上的问题, 我们仅仅考虑一维的情况, 也就是

$$u_t = u_{xx} + (|u_x| + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (|u_x| + p_2)$$

2. 边界梯度爆破

对于我们的问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (|u_x| + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (|u_x| + p_2) & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = A, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $A > 0$ 且足够大, p_1, p_2, q_1, q_2 有如下情况

情况 1: $p_1 > 0, p_2 > 1, q_1 > 2, q_2 > 0$,

情况 2: $p_1 > 0, p_2 > 1, q_1 = 2, q_2 > 1$,

并且我们假设下面情况成立:

$$u_0 \in C^2[0, 1], \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = A, \quad (3)$$

$$0 < u_0(x) < A, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u_{0'}(x) + (|u_{0'}(x)| + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (|u_{0'}(x)| + p_2) \geq 0, \quad u_{0'}(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

基于以上假设, 通过极值原理我们可以得到,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \|u_0\|_{L^\infty}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ 0 < u_t(x, t) &< \sup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ u_{0'}(x) + (|u_{0'}(x)| + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (|u_{0'}(x)| + p_2) \right\}, \quad 0 < x < 1, t > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

引理 1. 基于强极值原理, 我们可以进一步得到:

$$u_x(x, t) > 0, \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

那么(2)可以被改写为:

$$u_t = u_{xx} + (u_x + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (u_x + p_2), \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

引理 2. 如果条件(3)~(4)成立, 且 $u(x, t)$ 是问题(2)的一个解, 那么对于合适的初值 $u_0(x)$ 和 A , 存在有限时间 T 使得

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} u_x(x, t) \right\} = \infty, \quad \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| < \infty$$

证明: 广为人知的是(见[16]): 若(1)的 $F(u, \nabla u)$ 满足

$$F(u, \nabla u) \geq |\nabla u|^2 g(|\nabla u|), \quad \int_{+\infty}^{\infty} \frac{ds}{sg(s)} < \infty,$$

那么问题(1)的解将会发生梯度爆破现象。显然, 对于我们的问题,

$$F(u, \nabla u) = (|\nabla u| + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (|\nabla u| + p_2),$$

$$g(s) = \frac{(s + p_1)^{q_1}}{s^2} \ln^{q_2} (s + p_2),$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{sg(s)} &= \int_0^{+\infty} \frac{sds}{(s + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (s + p_2)} \\ &< \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2} (s + p_2)} \\ &= \left\{ \int_0^e + \int_e^{+\infty} \right\} \frac{ds}{(s + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2} (s + p_2)} \\ &\leq \frac{e}{p_1^{q_1-1} \ln^{q_2} p_2} + \int_e^{+\infty} \frac{ds}{(s + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2} (s + p_2)}, \end{aligned}$$

并且如果 $p_1 > 0$, $p_2 > 1$, $q_1 > 2$, $q_2 > 1$ 或者 $p_1 > 0$, $p_2 > 1$, $q_1 = 2$, $q_2 > 1$, 那么有

$$\begin{aligned} &\int_e^{+\infty} \frac{1}{(s + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2} (s + p_2)} ds \\ &\leq \int_e^{+\infty} \left\{ \frac{1}{(s + p_1) \ln^{q_2} (s + p_1)} + \frac{1}{(s + p_2) \ln^{q_2} (s + p_2)} \right\} ds \\ &\leq \frac{\ln^{1-q_2} (p_1 + 1)}{q_2 - 1} + \frac{\ln^{1-q_2} (p_2 + 1)}{q_2 - 1} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

此外, 若 $p_1 > 0$, $p_2 > 1$, $q_1 > 2$, $0 \leq q_2 \leq 1$, 那么

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{(s + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2} (s + p_2)} ds \leq \int_e^{+\infty} \frac{1}{(s + p_1)^{q_1-1}} ds = \frac{(e + p_1)^{2-q_1}}{q_1 - 2} < +\infty,$$

这样对于情况 1 和情况 2, 都有 $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{sg(s)} < +\infty$ 。

引理 3. 基于假设(3)~(5), 我们可以计算出对于 $0 < t < T, 0 < x < 1$,

$$\left\{ (q_1 + q_2 - 1)x + a \right\}^{-\frac{1}{q_1 + q_2 - 1}} - p_1 - p_2 \leq u_x(x, t) \leq e^{(q_2 x + b)^{-\frac{1}{q_2}}} + C_0 x, \quad (7)$$

其中 $a = \{u_x(0, t) + p_1 + p_2\}^{-(q_1 + q_2 - 1)}$, $b = \ln^{-q_2} u_x(0, t)$ 。

证明: 由(6), 对于任意给定的 $t \in (0, T)$,

$$0 < u_{xx}(x, t) + (u_x(x, t) + p_1)^{q_1} \ln^{q_2} (u_x(x, t) + p_2) < C_0$$

我们可以定义,

$$g(x) := \left\{ (q_1 + q_2 - 1)x + a \right\}^{-\frac{1}{q_1 + q_2 - 1}} - p_1 - p_2,$$

其中 $a = \{u_x(0, t) + p_1 + p_2\}^{-(q_1 + q_2 - 1)}$, 显然, $g(x)$ 满足:

$$\begin{aligned} & g_x(x) + (g(x) + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(g(x) + p_2) \\ & \leq g_x(x) + (g(x) + p_1 + p_2)^{q_1 + q_2} \\ & = -\left\{ (q_1 + q_2 - 1)x + a \right\}^{\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 - 1}} + \left\{ (q_1 + q_2 - 1)x + a \right\}^{\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 - 1}} \\ & = 0. \end{aligned}$$

也因为 $g(0) = a^{\frac{1}{q_1 + q_2 - 1}} - p_1 - p_2 \leq u_x(0, t)$, 通过比较原理, 我们可以得到 $u_x(x, t) > g(x)$ 。并且, 我们计算得到:

$$h(x) = e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} + C_0 x, b = \ln^{-q_2} u_x(0, t)$$

从而:

$$\begin{aligned} & h_x(x) + (h(x) + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(h(x) + p_2) \\ & \geq h_x(x) + h^{q_1}(x) \ln^{q_2} h(x) \\ & = -e^{(3x+b)^{\frac{1}{3}}} (3x+b)^{\frac{3}{4}} + C_0 + \left(e^{(3x+b)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \ln^3 \left(e^{(3x+b)^{\frac{1}{3}}} + C_0 x \right) \\ & \geq C_0 - e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} (q_2 x + b)^{\frac{1+q_2}{q_2}} + \left(e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} \right)^{q_1} \ln^{q_2} \left(e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} \right) \\ & = C_0 + e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} (q_2 x + b)^{-1} \left\{ \left(e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} \right)^{q_1 - 1} - (q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}} \right\} \\ & \geq C_0. \end{aligned}$$

通过比较原理, 也因为 $h(0) = e^{b^{\frac{1}{q_2}}} \geq u_x(0, t)$, 我们得到: $u_x(x, t) \leq h(x)$, 也就是

$$\left\{ (q_1 + q_2 - 1)x + a \right\}^{\frac{1}{q_1 + q_2 - 1}} - p_1 - p_2 \leq u_x(x, t) \leq e^{(q_2 x + b)^{\frac{1}{q_2}}} + C_0 x,$$

其中 $a = \{u_x(0, t) + p_1 + p_2\}^{-(q_1 + q_2 - 1)}$, $b = \ln^{-q_2} u_x(0, t)$ 。

注 1. 在假设(3)~(5)下, 得到

$$u(1, t) = A, \quad t \geq 0,$$

也就是 $u(1, t) = u_0(1)$, 即

$$0 < u_x(1, t) \leq u_{0'}(1).$$

所以我们知道 $x=1$ 不能是一个梯度爆破点。此外, 从(7)可知, $x=0$ 是唯一的梯度爆破点, 那么也就是

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u_x(0, t) = +\infty.$$

3. 梯度爆破下界

引理 4. 在假设(3)~(5)下, 如果梯度爆破发生在有限时间 $t=T$ 时, 那么存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$u_x(0, t) = M(t) \geq G(C_1(T-t)),$$

其中 G 是 $\int_x^{+\infty} \frac{ds}{F'(s)}$ 的逆函数。

证明: 我们定义 $C_0 = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ u_{0'}(x) + (u_{0'}(x) + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(u_{0'}(x) + p_2) \right\}$ 。令

$$M(t) = \sup_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq t} u_x(x, \tau), \quad 0 < T - t \ll 1.$$

能够计算出 $w = \frac{u_x^2}{2}$ 满足方程

$$w_t - w_{xx} = w_x \left\{ q_1 (u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_1)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} - u_{xx}^2,$$

因此, 通过极值原理, 我们有

$$\sup_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq t} u_x(x, \tau) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} u_x(0, \tau), \quad 0 < T - t \ll 1.$$

此外, 参考文献[21]中的引理 3.2, $M(t)$ 是单调递增的, 也就是

$$M(t) = u_x(0, t). \quad (8)$$

通过对式子(2)两边同时对 t 求导, 我们发现 $v := u_t$ 满足方程

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + F'(u_x) v_x \\ &= v_{xx} + \left\{ q_1 (u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_1)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} v_x \end{aligned}$$

对于任意给定的 $t \in (0, T)$ 。令

$$\varphi(a, b) := v(\theta a, \theta^2 b + t), \quad \theta := \frac{1}{F'(M)}$$

那么 φ 满足

$$\varphi_b - \varphi_{aa} = \theta \left\{ q_1 (u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_1)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} \varphi_a,$$

我们定义

$$\begin{aligned} \psi(a, b) &= \theta \left\{ q_1 (u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_1)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} \\ &= \frac{F'(u_x)}{F'(M)} \\ &= \frac{q_1 (u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_1)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2)}{q_1 (M + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(M + p_2) + q_2 \frac{(M + p_1)^{q_1}}{M + p_2} \ln^{q_2-1}(M + p_2)}, \end{aligned}$$

显然, $\psi(a, b)$ 是有界的, 并且通过(6),

$$0 \leq \varphi \leq C_0, a \in \left(0, \frac{1}{\theta}\right), \quad 0 < \theta^2 s + t \leq t, \varphi(0, b) = 0, 0 < \theta^2 s + t \leq t.$$

因此通过 $W_p^{2,1}$ 内边界估计(见[15]), 对于任意 $1 < p < \infty$,

$$\|\varphi\|_{W_p^{2,1}} \leq C_1.$$

通过索伯列夫嵌入定理, 如果 $p > 3$, 那么

$$\varphi_a(0, 0) \leq C_1,$$

其中常数 C_1 独立于 t 和 θ , 这也就意味着

$$\theta u_{xt} \leq C_1,$$

也就是

$$\frac{M'(t)}{F'(M)} \leq C_1,$$

通过对方程两边同时对 t 在 $[t, T)$ 上积分, 我们有

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{M'(t)}{F'(M)} dt &= \int_t^T \frac{M'(t)}{q_1(M+p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(M+p_2) + q_2 \frac{(M+p_1)^{q_1}}{M+p_2} \ln^{q_2-1}(M+p_2)} dt \\ &= \int_{M(t)}^{+\infty} \frac{ds}{q_1(s+p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(s+p_2) + q_2 \frac{(s+p_1)^{q_1}}{s+p_2} \ln^{q_2-1}(s+p_2)} \\ &\leq C_1(T-t), \end{aligned}$$

显然, $\int_{M(t)}^{+\infty} \frac{ds}{q_1(s+p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(s+p_2) + q_2 \frac{(s+p_1)^{q_1}}{s+p_2} \ln^{q_2-1}(s+p_2)} < \infty$, 所以我们有

$$M(t) \geq G(C_1(T-t)),$$

其中 G 是 $\int_x^{+\infty} \frac{ds}{F'(s)}$ 的逆函数。

现在, 我们采用另一种方法, 也就是抛物估计方法来重新得到它的下界。

定理 1. 在假设(3)~(5)下, 如果 $0 < T-t \ll 1$ 那么存在常数 $C_2 > 0$ 使得:

$$M'(t) \leq C_2 \frac{F(M)}{M},$$

其中 M 由(8)定义, 那么我们有

$$u_x(0, t) \geq H(C_2(T-t)),$$

其中 H 是 $\int_x^{+\infty} \frac{s ds}{F(s)}$ 的逆函数。

证明: 为了方便, 我们定义

$$\mathcal{L}[\omega] := \omega_t - \omega_{xx} - \left\{ q_1(u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_1)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} \omega_x.$$

取 $\eta(x, t) := 1 - \frac{u_x(x, t)}{u_x(0, t)} = 1 - \frac{u_x(x, t)}{M(t)}$ 。因为 M 独立于 x , 所以可以直接计算得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\eta] &= \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}\left[\frac{u_x}{M}\right] \\ &= -\frac{1}{M} \mathcal{L}[u_x] - u_x \mathcal{L}\left[\frac{1}{M}\right] \\ &= -u_x \left(-\frac{M'}{M^2}\right) \\ &= \frac{u_x}{M^2} \geq 0,\end{aligned}$$

因为 $M' > 0$ 几乎处处成立。

我们取 t_0 使得 $0 < T - t_0 \ll 1$ 成立对于 $t \in [t_0, T)$ 。显然对于任意常数 $C > 0$,

$C\eta(0, t) = C\left[1 - \frac{u_x(0, t)}{M(t)}\right] = 0$ 和 $u(0, t) = 0$, 我们可以得到 $u_t(0, t) = 0$, 也就是

$$C\eta(0, t) = 0 = u_t(0, t).$$

基于抛物估计, 我们可以得到 u 和 u_x 在 Ω 上都是一致有界的, 其中

$$\Omega := \{t = t_0, 0 \leq x \leq x_0\} \cup \{t_0 < t < T, x = x_0\}, 0 < T - t_0 \ll 1, 0 < x_0 \ll 1.$$

确定地, 存在常数 C_2 使得 $u_t(x, t) \leq C_2\eta(x, t)$ 在 Ω 上。于是, 对于任意的 $x_0 \in (0, \hat{x})$, 其中 $0 < \hat{x} \ll 1$, 我们对 $u_t - C_2\eta$ 在区域 $(0, x_0) \times (t_0, T)$ 上应用极值原理得到 $u_t \leq C_2\eta$, 所以

$$\begin{aligned}u_{xt}(0, t) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u_t(x, t)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} C_2 \frac{\eta(x, t)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} C_2 \frac{\eta(x, t) - \eta(0, t)}{x} \\ &= C_2 \eta_x(0, t) = -C_2 \frac{u_{xx}(0, t)}{M(t)} = C_2 \frac{F(M)}{M(t)}.\end{aligned}\tag{9}$$

这样(9)意味着

$$M'(t) \leq C_2 \frac{F(M)}{M}, \quad t_0 < t < T.\tag{10}$$

也就是

$$\frac{MM'(t)}{F(M)} \leq C_2,\tag{11}$$

因此, 通过对方程两边同时在 $[t, T)$ 上对 t 积分得到

$$\begin{aligned}\int_t^T \frac{MM'(s)}{F(M)} ds &= \int_{M(t)}^{+\infty} \frac{s ds}{F(s)} \\ &= \int_{M(t)}^{+\infty} \frac{s ds}{(s + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(s + p_2)} \\ &\leq C_2(T - t),\end{aligned}$$

显然, $\int_{M(t)}^{+\infty} \frac{s ds}{(s + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(s + p_2)} < \infty$, 也就是

$$u_x(0, t) = M(t) \geq H(C_2(T-t)),$$

其中 H 是 $\int_x^{+\infty} \frac{sds}{F(s)}$ 的逆函数。

4. 梯度爆破上界

定理 2: 在假设(3)~(5), 如果 $0 < T-t \ll 1$ 那么存在常数 $C_3 > 0$ 使得:

$$M'(t) \geq C_5 \frac{F(M)}{M}, \quad 0 < T-t \ll 1,$$

其中 M 由(8)定义, 那么我们有

$$u_x(0, t) = M(t) \leq H(C_5(T-t)),$$

其中 H 是 $\int_x^{+\infty} \frac{sds}{F(s)}$ 的逆函数。

证明: 从先前的定义, 可以看出

$$\mathcal{L}[\omega] := \omega_t - \omega_{xx} - \left\{ q_1(u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_2)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} \omega_x,$$

于是 $\mathcal{L}[u_x] \equiv 0$, $\mathcal{L}[u_t] \equiv 0$ 。

令 $\eta(x, t) := \left(1 + \frac{1}{M^\alpha(t)}\right) \left(1 - \frac{u_x(x, t)}{M(t)}\right) = \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \left(1 - \frac{u_x}{M}\right)$, 其中 $\alpha > 0$ 之后给出取值。

那么:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\eta] &= \mathcal{L}\left[1 + \frac{1}{M^\alpha}\right] \left(1 - \frac{u_x}{M}\right) + \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \mathcal{L}\left[1 - \frac{u_x}{M}\right] \\ &= -\frac{\alpha M'}{M^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{u_x}{M}\right) - \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \left\{ \mathcal{L}[u_x] \frac{1}{M} + u_x \mathcal{L}\left[\frac{1}{M}\right] \right\} \\ &= -\frac{\alpha M'}{M^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{u_x}{M}\right) - \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \left\{ u_x \mathcal{L}\left[\frac{1}{M}\right] \right\} \\ &= M' \left\{ -\frac{\alpha}{M^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{u_x}{M}\right) + \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \frac{u_x}{M^2} \right\}. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u] &= u_t - u_{xx} - \left\{ q_1(u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2}(u_x + p_2) + q_2 \frac{(u_x + p_2)^{q_1}}{u_x + p_2} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \right\} u_x \\ &= -(u_x + p_1)^{q_1-1} \ln^{q_2-1}(u_x + p_2) \left\{ [(q_1-1)u_x - p_1] \ln(u_x + p_2) + q_2 u_x \frac{u_x + p_1}{u_x + p_1} \right\} \\ &\leq -(u_x + p_1)^{q_1-1} [(q_1-1)u_x - p_1] \ln^{q_2}(u_x + p_2) \\ &\leq -(u_x + p_1)^{q_1-1} (u_x - p_1) \ln^{q_2}(u_x + p_2). \end{aligned}$$

1) 若 $u_x \leq \frac{\alpha}{\alpha+2} M^{1-\alpha}$, 我们有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\eta] &= \frac{M'}{M^{\alpha+1}} \left\{ -\alpha + \frac{u_x}{M^{1-\alpha}} + (\alpha+1) \frac{u_x}{M} \right\} \\
 &\leq \frac{M'}{M^{\alpha+1}} \left\{ -\alpha + \frac{\alpha}{\alpha+2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} \frac{1}{M^\alpha} \right\} \\
 &= \frac{\alpha(\alpha+1)M'}{(\alpha+2)M^{\alpha+1}} \left\{ -1 + \frac{1}{M^\alpha} \right\} \\
 &\leq 0,
 \end{aligned}$$

2) 若 $u_x > \frac{\alpha}{\alpha+2} M^{1-\alpha}$, 通过(11)我们有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\eta] &\leq M' \left(1 + \frac{1}{M^\alpha} \right) \frac{u_x}{M^2} \\
 &\leq 2C_2 \frac{\ln^{q_2}(M+p_2)}{M} \frac{u_x (M+p_1)^{q_1}}{M^2} \\
 &\leq 8C_2 B u_x (M+p_1)^{q_1-2} \\
 &\leq 8C_2 B u_x \left(\frac{\alpha+2}{\alpha} u_x^{\frac{1}{1-\alpha}} + p_1 \right)^{q_1-2} \\
 &\leq 8C_2 B u_x \left(2 \frac{\alpha+2}{\alpha} u_x^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{q_1-2},
 \end{aligned}$$

我们有如下两种情况:

1) 若 $q_1 = 2$, 那么 $\mathcal{L}[\eta] \leq 8C_2 B u_x$, 我们定义 $C_4^* := 8C_2 B \left(2 \frac{\alpha+2}{\alpha} \right)^{q_1-2} = 8C_2 B > 0$, 于是

$$\mathcal{L}[\eta + C_4^* u] \leq C_4^* \left\{ u_x - (u_x^2 - p_1^2) \ln^{q_2}(u_x + p_2) \right\} \leq 0,$$

2) 若 $q_1 > 2$, 那么因为当 $t \rightarrow T$ 时, $M \rightarrow +\infty$, 所以存在一个足够大的常数 B 使得 $\frac{\ln^{q_2}(M+p_2)}{M} \leq B$,

现在我们选择 $\alpha = \frac{1}{q_1-1} \in (0,1)$ 使得

$$\frac{q_1-2}{1-\alpha} = q_1-1,$$

我们定义 $C_4^{**} := 8C_2 B \left(2 \frac{\alpha+2}{\alpha} \right)^{q_1-2} > 0$, 那么 $\mathcal{L}[\eta] \leq C_4^{**} u_x^{q_1} \leq C_4^{**} u_x (u_x + p_1)^{q_1-1}$, 因此,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\eta + C_4^{**} u] &\leq C_4^{**} (u_x + p_1)^{q_1-1} \left\{ u_x - (u_x - p_1) \ln^{q_2}(u_x + p_2) \right\} \\
 &= C_4^{**} u_x (u_x + p_1)^{q_1-1} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{p_1}{u_x} \right) \ln^{q_2}(u_x + p_2) \right\} \\
 &\leq 0,
 \end{aligned}$$

我们取 $C_4 = \max\{C_4^*, C_4^{**}\}$, 结合情况 1) 和 2), 得到:

$$\mathcal{L}[\eta + C_4 u] \leq 0,$$

于是, 对于情况 1, 显然:

$$\mathcal{L}[\eta + C_4 u] \leq 0.$$

最终, 结合情况 1 和 2 我们得到:

$$\mathcal{L}[\eta + C_4 u] \leq 0.$$

存在 t_0 使得 $0 < T - t_0 \ll 1$ 成立对于 $t \in [t_0, T)$ 。显然对于任意常数 $C > 0$,

$$C(\eta(0, t) + C_4 u(0, t)) = 0 = u_t(0, t), t_0 < t < T.$$

基于强极值原理, 有 $\inf_{t_0 < t < T} u_t(x_0, t) > 0, u_{xt}(0, t_0) > 0$ 。

通过抛物估计, 知 u 和 u_x 在区域 Ω 上是一致有界的, 其中

$$\Omega := \{t = t_0, 0 \leq x \leq x_0\} \cup \{t_0 < t < T, x = x_0\}, 0 < T - t_0 \ll 1, 0 < x_0 \ll 1.$$

存在一个常数 $C_5 > 0$ 使得 $u_t(x, t) \geq C_5 \{\eta(x, t) + C_4 u(x, t)\}$ 在区域 Ω 上。这样, 对于任意的 $x_0 \in (0, \hat{x})$, 其中 $0 < \hat{x} \ll 1$, 并且, 我们可以在区域 $(0, x_0) \times (t_0, T)$ 上对 $u_t - C_5(\eta + C_4 u)$ 应用强极值原理, 从而得到

$$u_t \geq C_5(\eta + C_4 u),$$

也就是

$$\begin{aligned} u_{xt}(0, t) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u_t(x, t)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} C_5 \frac{\eta(x, t) + C_4 u}{x} \\ &\geq \lim_{x \rightarrow 0^+} C_5 \frac{\eta(x, t)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} C_3 \frac{u(x, t) u_x(x, t)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} C_5 \frac{\eta(x, t) - \eta(0, t)}{x} \\ &= C_5 \eta_x(0, t) = -C_5 \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \frac{u_{xx}(0, t)}{M(t)} = C_5 \left(1 + \frac{1}{M^\alpha}\right) \frac{F(M)}{M} \\ &\geq C_5 \frac{F(M)}{M}, \end{aligned} \quad (12)$$

即:

$$M'(t) \geq C_5 \frac{F(M)}{M},$$

那么,

$$\frac{MM'}{F(M)} \geq C_5, \quad (13)$$

在 $[t, T)$ 上积分, 我们有

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{MM'}{F(M)} dt &= \int_{M(t)}^{+\infty} \frac{s ds}{F(s)} \\ &= \int_{M(t)}^{+\infty} \frac{s ds}{(s + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(s + p_2)} \\ &\geq C_5(T - t), \end{aligned}$$

显然, $\int_{M(t)}^{+\infty} \frac{s ds}{(s + p_1)^{q_1} \ln^{q_2}(s + p_2)} < \infty$, 也就是

$$u_x(0, t) = M(t) \leq H(C_5(T - t)),$$

其中 H 是 $\int_x^{+\infty} \frac{s ds}{F(s)}$ 的逆函数。

5. 应用举例

在大多数情况下, 函数 $\frac{s}{F(s)}$ 没有原函数故而没有精确值的表达式, 但是对于一些特殊的情况, 我们可以采用不等式来放缩处理。如:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (|u_x| + 2)^2 |\ln^3(|u_x| + 2)|, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = A, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $0 < A < \infty$ 足够大, 且我们假设下面的条件成立:

$$\begin{aligned} u_0 &\in C^2[0, 1], \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = A, \\ 0 &< u_0(x) < A, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_{0'}(x) + (|u_{0'}(x)| + 2)^2 |\ln^3(|u_{0'}(x)| + 2)| &\geq 0, \quad u_{0'}(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

通过以上假设, 且通过(11)和(13)我们知道 $x=0$ 是唯一的梯度爆破点, 并且有

$$C_5 \leq \frac{MM'}{(M+2)^2 \ln^3(M+2)} \leq C_2,$$

这里 M 的定义见(8), 也就是 $M = u_x(0, t)$, 且 $0 < T-t \ll 1$, 显然,

$$\frac{C_5}{2} \leq \frac{M'}{(M+2) \ln^3(M+2)} \leq C_2,$$

在 $[t, T)$ 上积分, 我们有对于 $0 < T-t \ll 1$

$$e^{\frac{1}{\sqrt{C_5(T-t)}}} - 2 \leq u_x(0, t) = M(t) \leq e^{\frac{1}{\sqrt{2C_2(T-t)}}} - 2,$$

这也就是问题(14)梯度爆破的上下界。

6. 小结

本文研究了带有不定指数的对数非线性项的热传导方程的梯度爆破问题, 在假设初值条件下, 通过已知定理得出研究方程会发生梯度爆破的条件, 对各个指数进行了分类讨论。然后构造函数, 运用比较原理得出方程发生梯度爆破的位置, 也就是只在边界处发生梯度爆破。通过尺度变换和抛物方程的正则估计得到方程梯度爆破的上下界。最后通过一个例子来验证本章的结论。

本文研究了较为一般的带有对数形式的热方程的梯度爆破问题, 即各个指数和底数是不定的, 但是这种情况还是比较特殊, 更为一般的形式是今后研究的目标, 此外, 更精确的梯度爆破上下界也是一个值得考虑的问题。

基金项目

山西省基础研究计划, 项目编号 202403021221030。

参考文献

- [1] Cannon, J.R. and Browder, F.E. (1984) The One-Dimensional Heat Equation. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/cbo9781139086967>

- [2] Baras, P. and Goldstein, J.A. (1984) The Heat Equation with a Singular Potential. *Transactions of the American Mathematical Society*, **284**, 121-139. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1984-0742415-3>
- [3] Hahn, D.W. and Özişik, M.N. (2012) Heat Conduction. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118411285>
- [4] Gilkey, P.B. (2018) Invariance Theory: The Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem. CRC Press.
- [5] Lutz, D.A., Miyake, M. and Schäfke, R. (1999) On the Borel Summability of Divergent Solutions of the Heat Equation. *Nagoya Mathematical Journal*, **154**, 1-29. <https://doi.org/10.1017/s0027763000025289>
- [6] Nellis, G. and Klein, S. (2008) Heat Transfer. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511841606>
- [7] N’Gohisse, F.K. and Boni, T.K. (2011) Numerical Blow-Up for a Nonlinear Heat Equation. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **27**, 845-862. <https://doi.org/10.1007/s10114-011-8464-9>
- [8] Samarskii, A.A. and Mikhailov, A.P. (2011) Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Walter de Gruyter.
- [9] Seki, Y. (2018) Type II Blow-Up Mechanisms in a Semilinear Heat Equation with Critical Joseph-Lundgren Exponent. *Journal of Functional Analysis*, **275**, 3380-3456. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.05.008>
- [10] Nguyen, V.T. and Zaag, H. (2016) Blow-Up Results for a Strongly Perturbed Semilinear Heat Equation: Theoretical Analysis and Numerical Method. *Analysis & PDE*, **9**, 229-257. <https://doi.org/10.2140/apde.2016.9.229>
- [11] Chlebik, M. and Fila, M. (1999) From Critical Exponents to Blow-Up Rates for Parabolic Problems. *Rendiconti di Matematica e Delle sue Applicazioni*, **19**, 449-470.
- [12] Fila, M. and Souplet, P. (2001) The Blow-Up Rate for Semilinear Parabolic Problems on General Domains. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **8**, 473-480. <https://doi.org/10.1007/pl00001459>
- [13] Herrero, M.A. and Velázquez, J.J.L. (1992) Flat Blow-Up in One-Dimensional Semilinear Heat Equations. *Differential and Integral Equations*, **5**, 973-997. <https://doi.org/10.57262/die/1370870936>
- [14] Ladyženskaja, O., Solonnikov, V. and Ural’ceva, N. (1968) Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/mmono/023>
- [15] Lieberman, G.M. (1996) Second Order Parabolic Differential Equations. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3302>
- [16] Souplet, P. (2002) Gradient Blow-Up for Multidimensional Nonlinear Parabolic Equations with General Boundary Conditions. *Differential and Integral Equations*, **15**, 237-256. <https://doi.org/10.57262/die/1356060874>
- [17] Alikakos, N.D., Bates, P.W. and Grant, C.P. (1989) Blow Up for a Diffusion-Advection Equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **113**, 181-190. <https://doi.org/10.1017/s0308210500024057>
- [18] Fila, M., Taskinen, J. and Winkler, M. (2007) Convergence to a Singular Steady State of a Parabolic Equation with Gradient Blow-Up. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 578-582. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.07.004>
- [19] Souplet, P. and Zhang, Q.S. (2006) Global Solutions of Inhomogeneous Hamilton-Jacobi Equations. *Journal d’Analyse Mathématique*, **99**, 355-396. <https://doi.org/10.1007/bf02789452>
- [20] Conner, G.R. and Grant, C.P. (1996) Asymptotics of Blowup for a Convection-Diffusion Equation with Conservation. *Differential and Integral Equations*, **9**, 719-728. <https://doi.org/10.57262/die/1367969883>
- [21] Guo, J. and Hu, B. (2008) Blowup Rate Estimates for the Heat Equation with a Nonlinear Gradient Source Term. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **20**, 927-937. <https://doi.org/10.3934/dcds.2008.20.927>
- [22] Chen, H., Luo, P. and Liu, G. (2015) Global Solution and Blow-Up of a Semilinear Heat Equation with Logarithmic Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **422**, 84-98. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.030>
- [23] Han, Y. (2019) Blow-Up at Infinity of Solutions to a Semilinear Heat Equation with Logarithmic Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **474**, 513-517. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.01.059>
- [24] Zhang, Z. and Hu, B. (2010) Rate Estimates of Gradient Blowup for a Heat Equation with Exponential Nonlinearity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **72**, 4594-4601. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.036>