Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 981-994
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144221

Hans汉斯

加权多元Paley-Wiener空间在概率框架和平均框架下的Kolmogorov n-宽度

罗　莹

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2025年3月28日；录用日期：2025年4月23日；发布日期：2025年4月30日

摘　要

加权多元Paley-Wiener空间不仅在通讯、信息处理、数据压缩等方面有广泛应用，而且也是逼近定义在$\mathbb{R}$上的函数类的重要工具，因而得到广泛的深入研究。本文研究加权多元Paley-Wiener空间在概率框架和平均框架下的逼近特征，特别地，利用离散化的方法估计了在概率框架和平均框架下，加权多元Paley-Wiener空间的Kolmogorov n-宽度的精确渐进阶。

关键词

加权多元Paley-Wiener空间，概率框架，平均框架，渐近阶

Kolmogorov n-Width of Weighted Multivariate Paley-Wiener Spaces in Probability and Average Settings

Ying Luo

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 28th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 30th, 2025

Abstract

Weighted multivariate Paley-Wiener spaces have wide applications in communication, information processing, data compression, and other fields. They are also important tools for approximating classes of functions defined on $\mathbb{R}$, and thus have been extensively studied. This paper studies the approximation characteristics of weighted multivariate Paley-Wiener spaces in probability and average settings. In particular, by using discretization methods, the paper estimates the exact

文章引用: 罗莹. 加权多元 Paley-Wiener 空间在概率框架和平均框架下的 Kolmogorov n-宽度[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 981-994. DOI: 10.12677/aam.2025.144221

asymptotic order of the Kolmogorov n-width of weighted multivariate Paley-Wiener spaces in the probability and average settings.

Keywords

Weighted Multivariate Paley-Wiener Space, Probability Setting, Average Setting, Asymptotic Order

1. 引言

函数逼近论[1] [2]是函数论中的一个重要分支，涉及的基本问题是函数的近似表示问题，研究如何用更简单或更易处理的函数来逼近复杂的函数。

宽度的研究由来已久，它的概念最早由 Kolmogorov [3]提出并且他估计了 Sobolev 类 B_2^r 在经典勒贝格空间 L_2 上的 Kolmogorov 宽度，并且得到了其精确渐近阶。2022 年，Wang H [4]通过考虑加权 Sobolev 类 $BW_{p,\mu}^r$ 和加权 Sobolev 类 $BBW_\tau^r\left(L_{p,\mu}\right)$ 在随机情况下的数值积分，得到了精确渐进阶 $n^{-r/d-1/2+(1/p-1/2)_+}$ 。

带有限函数空间在数据拟合、通讯传输等方面有广泛的应用[5]-[9]，为许多问题提供了稳定性和可控性，能够有效地处理近似问题，找到最佳逼近方案。1934 年，Paley 和 Wiener [10]研究得到经典的 Paley-Wiener 空间。1994 年，Lyubarskii 和 Madych [10]证明当样条的阶数趋近于无穷时，Paley-Wiener 函数可以从它们在完整插值序列上的值中恢复。

李玥[11]研究了加权带有限函数空间在一致框架下的 Kolmogorov n-宽度和线性 n-宽度的精确渐近阶。因此本文将继续这一工作，研究加权多元 Paley-Wiener 空间在概率框架下和平均框架下的逼近特征，特别估计概率框架下和平均框架下加权多元 Paley-Wiener 空间 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 在 $B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中 Kolmogorov n-宽度的精确渐进阶。

2. 空间和主要结论

本节主要介绍本文研究的函数空间——加权多元 Paley-Wiener 空间及其主要性质，下面介绍一些预备知识。

用 $L_p\left(\mathbb{R}^d\right)(1<p<\infty)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的 p-次幂可积的经典 Lebesgue 空间，$\|\cdot\|_{L_p\left(\mathbb{R}^d\right)}$ 表示其范数；$l_p\left(\mathbb{Z}^d\right)\left(l_p\left(\mathbb{Z}_0^d\right)\right)(1\le p<\infty)$ 表示定义在 $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_0)$ 上 p-次幂可和的序列空间，$\|\cdot\|_{l_p\left(\mathbb{Z}^d\right)}\left(\|\cdot\|_{l_p\left(\mathbb{Z}_0^d\right)}\right)$ 表示其范数。

下面介绍指数型整函数的概念。

设 $\sigma>0$ ， $g_\sigma(z)$ 为定义在复数域 $\mathbb{C}^d$ 上的整函数。若 $\forall\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的正常数 $A:=A(\varepsilon)$，使得对所有 $z=\left(z_1,\cdots,z_d\right)\in\mathbb{C}$， $z_k=x_k+iy_k, k=1,\cdots,d$ 。不等式

$$\left|g_\sigma(z)\right|\le A\exp\left(\sum_{j=1}^d(\sigma+\varepsilon)\left|z_j\right|\right).$$

成立，则称函数 $g_\sigma(z)$ 为指数 σ -型整函数。以 E_σ 表示指数 σ 型整函数的全体， $B_\sigma\left(\mathbb{R}^d\right)$ 表示限制在 $\mathbb{R}^d$ 上有界的所有指数 σ -型整函数的全体之集。令

$$B_{\pi,p}\left(\mathbb{R}^d\right):=B_\pi\left(\mathbb{R}^d\right)\cap L_p\left(\mathbb{R}^d\right),1\le p<\infty .$$

赋予范数$\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$，显然在此范数下$B_{\pi,p}$为 Banach 空间，称该空间为$p$-Paley-Wiener 空间。当$p=2$时，$B_{\pi,p}(\mathbb{R})$为经典的 Paley-Wiener 空间。

对$1<p<\infty,\sigma>0$，记

$$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d):=\left\{f\in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d):f(k)=0,k\in Z^d\setminus Z_0^d\right\}.$$

易见，$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$关于$\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$为$B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$的闭子空间，即$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$关于范数$\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$为 Banach 空间。关于空间$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$，有如下性质，这些性质在本文中起到关键作用。

为结果的叙述，首先介绍本文所用的相关记号。

本文中用以下符号：$\mathbb{Z}$表示整数集，$\mathbb{Z}_0$表示非零整数集，$\mathbb{N}$表示自然数集，$\mathbb{N}_+$表示正整数集，$\mathbb{R}$表示实数域，$\mathbb{C}$表示复数域。若$a(x)$和与$b(x)$为定义在集合F上的两个正函数，用$a(x)\ll b(x)$表示存在与x无关的正常数c_1，使得对任意$x\in F$有$a(x)\le c_1b(x)$；而$a(x)\gg b(x)$表示存在与x无关正常数c_2，使得对任意$x\in F$，存在$a(x)\ge c_2b(x)$；$a(x)\asymp b(x)$表示$a(x)\ll b(x)$与$a(x)\gg b(x)$同时成立。

引理 2.1. [12] 设$1<p<\infty,f\in\mathring{B}_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)$，则

(1) $f(x)=\sum_{k\in Z_0^d}f(k)\sin c_d(\pi x-k\pi)$，$x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$。

上式右边称为d重 Whittaker 级数，此级数对$x\in\mathbb{R}^d$绝对一致收敛。

(2) 存在一个仅依赖于p的常数c_p，以及一个绝对正常数c，使得

$$c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_0^d}|f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\|f\|_{\sigma,p}\le c_p\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_0^d}|f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3) 对任意的$y=\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0^d}\in l_p(\mathbb{Z}_0^d)$，则存在唯一的$g\in\mathring{B}_{\pi,q}(\mathbb{R}^d),$，使得$g(k)=y_k,k\in\mathbb{Z}_0^d$，且$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_0^d}g(k)\sin c_n(\pi x-k\pi),x\in\mathbb{R}^d$。在$\mathbb{R}^d$上绝对一致收敛。其中

$$\sin c_dx=\prod_{j=1}^d\sin cx_j,\quad \sin cx_j=\begin{cases}\dfrac{\sin x_j}{x_j}, & x_i\in\mathbb{R},x_j\ne0,\\ 1, & x_j=0.\end{cases}$$

注 2.1. (1) 由引理 2.1 知，$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$可以表示为

$$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d):=\left\{f\in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d):f(k)=0,k\in\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}_0^d,\{f(k)\}\in l_p(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

且

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\asymp\left\|\{f(k)\}\right\|_{l_p(\mathbb{Z}_0^d)},f\in\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d).\tag{1}$$

(2) 对$k\in\mathbb{Z}_0^d$，记$e_k^d(\pi x):=\sin c_d(\pi x-k\pi),x\in\mathbb{R}^d$，则$\left\{e_k^d(\pi x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0^d}$为$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$的 Schauder 基。

为方便起见，以下行文中，若没有特殊说明，$B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$均表示$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$。

下面，继续引入一些概念。

设$1<p<\infty,r_1=r_2=\cdots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\cdots\le r_d,r_i\in\mathbb{R},j=1,\cdots,d$，对$f\in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$，记

$$f^{(r)}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_0^d}|k|^r f(k)e_k^d(\pi x),x\in\mathbb{R}^d.$$

由引理 2.1 知，若 $\left\{|k|^r f(k)\right\}\in l_p\left(\mathbb{Z}_0^d\right)$，则上式右边级数在 $\mathbb{R}^d$ 上绝对一致收敛于 $f^{(r)}$，且称 $f^{(r)}$ 为 f 的 r 阶导数。

对 $1<p<\infty,r=(r_1,\cdots,r_d)\in\mathbb{R}^d,0<r_1=\cdots=r_v<r_{v+1}\le\cdots\le r_d$，记

$$B_{\pi,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)=\left\{f\in B_{\pi,p}\left(\mathbb{R}^d\right):f^{(r)}\in B_{\pi,p}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}.$$

对 $f\in B_{\pi,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$，令

$$\|f\|_{r,p}:=\left\|f^{(r)}\right\|_{l_p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

由引理 2.1 知 $\|\cdot\|_{r,p}$ 为 $B_{\pi,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 上的范数，而且 $B_{\pi,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{r,p}$ 为 Banach 空间。且 $\left\{e_k^d(\pi x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0^d}$ 为其 Schauder 基，称 $B_{\pi,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 为多元加权 Paley-Wiener 空间。易见，对 $1<p,q<\infty$，当 $r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\}$ 时，$B_{\pi,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 可以连续的嵌入 $B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)$，李玥[11]等得到了一致框架下，当 $d=1$ 时，$B_{\sigma,p}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 在 $B_{\sigma,q}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中 Kolmogorov n-宽度与线性 n-宽度的精确渐进阶。本文将继续其研究，讨论概率框架和平均框架下多元加权 Paley-Wiener 空间 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 的宽度问题。为此，首先介绍 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 的相关性质。

对 $f,g\in B_{\pi,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$，令

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则易见 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $B_{\pi,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 上的内积，$B_{\pi,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 Hilbert 空间，$\left\{e_k^d(\pi x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0^d}$ 为 $B_{\pi,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 上的标准正交基，其内积诱导的范数为 $\|\cdot\|_{L_2\left(\mathbb{R}^d\right)}$。

对 $r=(r_1,\cdots,r_d)\in\mathbb{R}^d,f,g\in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$，令

$$\langle f,g\rangle_r:=\left\langle f^{(r)},g^{(r)}\right\rangle.$$

易见 $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$ 为 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 的内积，且 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$ 为Hilbert空间，$\left\{e_k^d(\pi\cdot)\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0^d}$ 为 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 上的正交基，其内积诱导的范数为 $\|\cdot\|_{r,2}$。

本文主要研究 Hilbert 空间 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 在概率框架和平均框架下的逼近特征。为此，在 Hilbert 空间 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 赋予满足如下条件的高斯测度 μ，其平均元为零元，协方差 C_μ 对应的特征函数为 $e_k^d(\pi\cdot),k\in\mathbb{Z}_0^d$，且相应的特征值为 $\lambda_k=|k|^{-\rho},\rho>1$，即

$$C_\mu e_k^d(\pi x)=\lambda_k e_k^d(\pi x),k\in\mathbb{Z}_0^d \tag{2}$$

由文献[13]知，$B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 上满足以上条件的高斯测度 μ 是唯一的，现考虑 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中柱集的高斯测度。

令 $y_1,\cdots,y_n$ 为 $B_{\pi,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中的 n 个正交向量，$\sigma_j=\left\langle C_\mu y_j,y_j\right\rangle,(j=1,\cdots,n)$。$B$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 子集，则 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中的柱集

$$G=\left\{f\in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right):\left(\left\langle f,y_1^{(-r)}\right\rangle_r,\cdots,\left\langle f,y_n^{(-r)}\right\rangle_r\right)\in B\right\}$$

的测度为

$$\mu(G)=\prod_{j=1}^{n}\left(2\pi\sigma_j\right)^{-\frac{1}{2}}\int_B \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|\mu_j\right|^2}{2\sigma_j}\right)\mathrm{d}\mu_1\cdots\mathrm{d}\mu_n .$$

关于 Hilbert 空间上高斯测度的详细信息可参考[13]。本文研究赋予高斯测度 u 的 Hilbert 空间 $B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 在概率框架的平均框架下的 Kolmogorov n-宽度与线性 n-宽度。

3. 离散化定理

由引理 2.1 知，当 $r_1>\frac{1}{2}$ 时，$B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 可以连续地嵌入 $B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)(1<q<\infty)$ 中，本节研究赋高斯测度 μ 下的 Hilbert 空间 $B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right)$，在概率框架和平均框架下的 Kolmogorov n-宽度和平均 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶。首先，介绍一致框架、概率框架和平均框架下 Kolmogorov n-宽度的概念。

定义 3.1. [14]设 W 为赋范线性空间 $(Z,\|\cdot\|)$ 中的非空子集，$n\in\mathbb{N}$，则

$$d_n(W,Z):=\inf_{L_n}\sup_{x\in B_Z}\inf_{y\in L_n}\|x-y\|$$

为一致框架下 W 在 Z 中的 Kolmogorov n-宽度。其中 L_n 取遍 Z 中所有维数不超过 n 的线性子空间，B_Z 为 Z 中的单位球。

由于 Kolmogorov n-宽度在计算复杂性等方面的重要应用，其在函数逼近论中的重要地位，因而得到广泛的研究，其详细信息可参阅 A. Pinkus 的专著[15]。1994 年，V. E. Maiorov 在[16]中引入了概率框架和平均框架下的 Kolmogorov n-宽度的概念。

定义 3.2. [17] 设 $(Z,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，W 是 Z 的非空子集，B 为 W 上的 Borel 域，μ 为定义在 B 上的概率测度，$n\in\mathbb{Z}$，$\delta\in[0,1)$，分别称

$$d_{n,\delta}(W,\mu,Z):=\inf_{G_\delta} d_n\left(W\setminus G_\delta,Z\right).$$

和

$$d_n^{(a)}(W,\mu,Z)_p:=\inf_{F_n}\left(\int_W \inf_{y\in F_n}\|x-y\|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}},0<p<\infty .$$

为概率框架下 W 在 Z 中的 Kolmogorov n-宽度和平均框架下 W 在 Z 中的 p-平均 Kolmogorov n-宽度，分别简称为 W 在 Z 中关于测度 μ 的 Kolmogorov-(n,δ)-宽度和平均 Kolmogorov n-宽度。其中 G_δ 取遍 B 中测度不超过 δ 的所有元素，F_n 取遍 Z 中的维数不超过 n 的线性子空间。

本节主要是估计 $r_1>\frac{1}{2}$ 时，$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 和 $d_n^{(a)}\left(B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)_p$ 的精确渐进阶。其中 $1<q<\infty,0<p<\infty$。其主要结果如下。

定理 3.1. 设 $1<q<\infty,r=\left(r_1,\cdots,r_d\right)\in\mathbb{R}^d,\frac{1}{2}<r_1=\cdots=r_v<r_{v+1}\le\cdots\le r_d,\rho>1$ 且 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right],n\in\mathbb{Z}$，则

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\asymp\left(n^{-1}\ln^{v-1}n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}}n^{\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}} .$$

通过定理 3.1 和文献[18]可得到如下结果，证明过程省略。

定理 3.2. 设 $1<q<\infty,0<p<\infty,r=\left(r_1,\cdots,r_d\right)\in\mathbb{R}^d,\frac{1}{2}<r_1=\cdots=r_v<r_{v+1}\le\cdots\le r_d$，且 $\rho>1$，则

$$d_n^{(a)}\left(B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\asymp\left(n^{-1}\ln^{v-1}n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}}n^{\frac{1}{q}} .$$

本文主要采用离散化的方法估计定理 3.1 的上、下界。为此，首先介绍有限维空间的相应结果。

设$1\le p\le\infty$，用l_p^m表示在$\mathbb{R}^m$上赋予范数$\|\cdot\|_{l_p^m}$的 Banach 空间，其中

$$\|x\|_{l_p^m}=\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty\\ \max\limits_{1\le k\le m}|x_k|,p=\infty\end{cases},x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m.$$

用B_p^m表示l_p^m中的单位球。

现在$\mathbb{R}^m$上赋予标准高斯测度$\nu:=\nu_m$

$$\nu(G)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int_G\exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_{l_m^2}^2\right)\mathrm{d}x.$$

其中G为$\mathbb{R}^m$中的 Borel 集，显然$\nu(\mathbb{R}^m)=1$。

下面的引理由 Mairorov [16]和徐[17]以及伪宽度和 Kolmolgorv 宽度的关系给出，具体细节见[17]。

引理 3.1. [19]设$1\le q\le\infty,m\ge 2n,\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，则

(1) $d_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m,\nu,l_q^m\right)\asymp m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{m+\ln\frac{1}{\delta}},1\le q\le 2$.

(2) $m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{m+\ln\frac{1}{\delta}}\ll d_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m,\nu,l_q^m\right)\ll m^{\frac{1}{q}}n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{m+\ln\frac{1}{\delta}},2\le q\le\infty$.

现建立估计定理 3.1 上、下界的离散化定理。

设$S=(S_1,\cdots,S_d)\in\mathbb{N}^d$，令

$$\rho_s=\left\{n=(n_1,\cdots,n_d)\in\mathbb{Z}_0^d:2^{s_{j-1}}<|n_j|\le 2^{s_j},j=1,\cdots,d\right\}.$$

则$|\rho_s|=2^{(s,1)},\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\rho_s=\mathbb{Z}_0^d$且$\rho_{s'}\cap\rho_s=\varnothing,s',s\in\mathbb{N}_+^d,s\ne s'$。

下面，对$\mathbb{N}_+^d$再进行分块，令$\rho=\left(1,\cdots,1,\frac{r_{v+1}+\frac{\rho}{2}}{r_1+\frac{\rho}{2}},\cdots,\frac{r_d+\frac{\rho}{2}}{r_1+\frac{\rho}{2}}\right)$，对$l\in\mathbb{N}_+$

令

$$S_l=\left\{s\in\mathbb{N}^d:l-1\le(s,\gamma)<l\right\}.\tag{3}$$

再设$\|S_l\|=\sum_{s\in S_l}|\rho_s|=\sum_{l-1\le(s,\gamma)<l}2^{(s,1)}$。由(3)知，$\|S_l\|\asymp 2^l l^{v-1}$。

设$l\in\mathbb{N}^+$，对$f\in B_{\pi,p}\left(\mathbb{R}^d\right)(1<p<\infty)$，令

$$(\Delta_l f)(x)=\sum_{s\in S_l}\sum_{n\in\rho_s}C_n e_{n,\pi}^d(\sigma x),x\in\mathbb{R}^d$$

其中$C_n:=f(n)$，易知

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\asymp\left(\sum_{l\ge 1}\|\Delta_l f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

令

$$F_l = span\left\{e_n^d(\pi\cdot): n\in\rho_s, s\in S_l\right\}$$

易见 $\dim F_l = \|S_l\|$。再令

$$I_l : F_l \to \mathbb{R}^{\|S_l\|}$$

$$f \to \left\{\left\langle f, \frac{e_n^d(\pi\cdot)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\rangle\right\}_{n\in\rho_s, s\in S_l} \tag{4}$$

易见 I_l 为 F_l 到 $l_q^{\|S_l\|}$ 的线性同构映射。由(4)可知，

$$\sigma_n = \left\langle C_\mu \frac{e_n^d(\pi t)}{\sqrt{\lambda_n}}, \frac{e_n^d(\pi t)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\rangle = 1, n\in\rho_s.$$

对 $n=(n_1,\cdots,n_d)\in\rho_s$，由于 $|n| = \prod_{j=1}^{d}|n_j| = 2^{(s,1)}$，所以对 $f\in F_l$，有

$$\begin{aligned}\|I_l f\|_{l_q^{\|S_l\|}} &= \left\|\left\{\left\langle f, \frac{e_n^d(\pi\cdot)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\rangle\right\}_{n\in\rho_s, s\in S_l}\right\|_{l_q^{\|S_l\|}} \\ &\asymp 2^{\frac{(s,1)}{2}\rho}\left\|\left\{f(n)\right\}_{n\in\rho_s, s\in S_l}\right\|_{l_q^{\|S_l\|}} \asymp 2^{\frac{(s,1)}{2}\rho}\|f\|_{\sigma,q}\end{aligned} \tag{5}$$

以及

$$\begin{aligned}\left\|f^{(r)}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} &\asymp \left(\sum_{s\in S_l}\sum_{n\in\rho_s}|n|^{rq}\left|f(n)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{s\in S_l}\sum_{n\in\rho_s}2^{(s,r)q}\left|f(n)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{s\in S_l}\sum_{n\in\rho_s}2^{(s,r)\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)q-(s,1)\frac{\rho}{2}}\left|f(n)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp 2^{\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l-(s,1)\frac{\rho}{2}}\left(\sum_{s\in S_l}\sum_{n\in\rho_s}\left|f(n)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp 2^{\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l-(s,1)\frac{\rho}{2}}\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\end{aligned} \tag{6}$$

所以，对于 $f\in F_l$，由(1)、(2)、(5)和(6)得

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} &\asymp 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l+(s,1)\frac{\rho}{2}}\left\|f^{(r)}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \\ &\asymp 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l}\left\|\left\{\left\langle D^r f, \frac{e_n^d(\pi x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\rangle\right\}_{n\in\rho_s, s\in S_l}\right\|_{l_q^{\|S_l\|}}\end{aligned} \tag{7}$$

通过(7)的等价关系，现在建立估计定理 3.1 上界的离散化定理。

定理 3.3. 设 $1<q<\infty, \frac{1}{2}<r_1=\cdots=r_v<r_{v+1}\le\cdots\le r_d, r_i\in\mathbb{R}^d, i=1,\cdots,d, n\in\mathbb{N}$，且 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right], l\in\mathbb{N}^+$，取整

数序列 $\{n_l\}$ 以及正序列 $\{\delta_l\}$，满足 $0 \le n_l \le \|S_l\|$ 且 $\sum_l n_l \le n, \sum_l \delta_l \le \delta$，则

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right), \mu, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \ll \sum_l 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} d_{n_l,\delta_l}\left(\mathbb{R}^{\|S_l\|}, \upsilon, l_q^{\|S_l\|}\right).$$

证明：由概率框架下 Kolmogorov 宽度的定义，存在 $l_q^{\|S_l\|}$ 的子空间 L_l 满足 $\dim L_l \le n_l$，且

$$\nu\left\{y \in \mathbb{R}^{\|S_l\|} : e\left(y, L_l, l_q^{\|S_l\|}\right) > d_{n_l,\delta_l}\right\} \le \delta_l. \tag{8}$$

其中

$$d_{n_l,\delta_l} := d_{n_l,\delta_l}\left(\mathbb{R}^{\|S_l\|}, \upsilon, l_q^{\|S_l\|}\right), e\left(y, L_l, l_q^{\|S_l\|}\right) := \inf_{x \in L_l} \|y - x\|_{l_q^{\|S_l\|}}.$$

对于 $\forall f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$，由(8)式知，存在正常数 C_0，使得

$$e\left(\Delta_l f, D^{-r} I_l^{-1} L_l, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \le C_0 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} e\left(\left\{\left\langle D^r f, \frac{e_n^d(\pi x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\rangle\right\}_{n \in S_l}, L_l, l_q^{\|S_l\|}\right). \tag{9}$$

考虑集合

$$G_l = \left\{f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) : e\left(\Delta_l f, D^{-r} I_l^{-1} L_l, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) > C_0 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} d_{n_l,\delta_l}\right\}.$$

由(8)和(9)式以及测度 μ, ν 定义知

$$\begin{aligned}\mu(G_l) &\le \mu\left(\left\{f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) : e\left(\Delta_l f, L_l, l_q^{\|S_l\|}\right)\right\} > d_{n_l,\delta_l}\right) \\ &= \nu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^{\|S_l\|} : e\left(y, L_l, l_q^{\|S_l\|}\right)\right\} > d_{n_l,\delta_l}\right) \le \delta_l\end{aligned} \tag{10}$$

设 $G = \bigcup_l G_l, F = \sum_l D^{-r} I^{-1} L_l$，其中 F 是 $D^{-r} I^{-1} L_l$ 的直和，由(10)可知

$$\mu(G) \le \sum_l \mu(G_l) \le \sum_l \delta_l \le \delta,$$

$$\dim F \le \sum_l \dim D^{-r} I^{-1} L_l \le \sum_l n_l \le n.$$

所以，由 $G, F, \{G_l\}, \{L_l\}$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right), \mu, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) &\le e\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \setminus G, F, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ &= \sup_{f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \setminus G} e\left(f, F, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ &\le \sup_{f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \setminus G} \sum_l e\left(\Delta_l f, D^{-r} I_l L_l, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ &\ll \sum_l 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} d_{n_l,\delta_l}\end{aligned}$$

因此

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right), \mu, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \ll \sum_l 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} d_{n_l,\delta_l}\left(\mathbb{R}^{\|S_l\|}, \nu, l_q^{\|S_l\|}\right).$$

定理 3.3 得证。

下面介绍估计定理 3.1 的下界的离散化定理。

设

$$S = S_{k_0} = \left\{ s = \left(s_1, \cdots, s_v, 1, \cdots, 1\right) \in \mathbb{N}^d : \left(s, 1\right) = k = \left[k_0\right] \right\} \tag{11}$$

其中 k_0 稍后选取。$\left[k_0\right]$ 表示不超过 k_0 的最大整数，不难验证 $|s| \asymp k^{\upsilon-1}$，现在选取 $k_0, C_0 \geq 0$，使得

$$\|S\| := \sum_{s \in S} |\square_s| = \sum_{s \in S} 2^{(s,1)} = |s| 2^k \geq C_{k_0} k_0^{\upsilon-1} 2^{k_0} = 2n.$$

因此，$2^k k^{\upsilon-1} \asymp n \asymp |s| 2^k$。

现在考虑空间 $F_s := span\left\{ e_n^d\left(\pi \cdot\right) : n \in \square_s, s \in S \right\}$。

令

$$I_s : F_s \to l_q^{\|S\|}, f \to \left\{ \left\langle D^r f, \frac{e_n^d\left(\pi \cdot\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\}_{n \in \square_s, s \in S}.$$

易见 I_s 为 F_s 到 $l_q^{\|S_l\|}$ 的线性同构映射，类似(8)、(9)的方法可得

$$\left\| \left\{ \left\langle D^r f, \frac{e_n^d\left(\pi \cdot\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\}_{n \in \square_s, s \in S} \right\|_{l_q^{\|S_l\|}} \asymp 2^{r_1 + \frac{\rho}{2}} \|f\|_{B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)}, f \in F_s. \tag{12}$$

通过(12)建立估计定理 3.1 下界的离散化定理。

定理 3.4. 设 $1 < q < \infty, \frac{1}{2} < r_1 = \cdots = r_v < r_{v+1} \leq \cdots \leq r_d, r_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \cdots, d, n \in \mathbb{N}$，且 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$，则

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right), \mu, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \geq 2^{-\left(r_1 + \frac{\rho}{2}\right)k} d_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^{\|S\|}, \upsilon, l_q^{\|S\|}\right)$$

其中 S 定义见(10)。

证明：

令 F 是 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \cap F_s$ 的子空间，使得 $\dim F \leq n$，且

$$\mu\left(\left\{ f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \cap F_s : e\left(f, F, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right) \cap F_s\right) > d_{n,\delta} \right\}\right) \leq \delta.$$

其中

$$d_{n,\delta} = d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right), \mu, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right).$$

考虑集合

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^{\|S\|} : e\left(y, I_s D^r F, l_q^{\|S\|}\right) > C_0^{-1} 2^{\left(r_1 + \frac{\rho}{2}\right)k} d_{n,\delta} \right\}.$$

则

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \mu\left\{ f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \cap F_s : e\left(\left\{ \left\langle D^r f, \frac{e_n^d\left(\pi \cdot\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\}_{n \in \square_s, s \in S}, I_s D^r F, l_q^{\|S\|}\right) > C_0^{-1} 2^{\left(r_1 + \frac{\rho}{2}\right)k} d_{n,\delta} \right\} \\ &\leq \mu\left\{ f \in B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \cap F_s : e\left(f, F, B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) > d_{n,\delta} \right\} \leq \delta \end{aligned} \tag{13}$$

显然 $\dim I_s D^r F \leq n$，因此，由(13)可得

$$
\begin{aligned}
d_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^{\|S\|},\upsilon,l_q^{\|S\|}\right) &\le e\left(\mathbb{R}^{\|S\|}\setminus G, I_sD^rF, l_q^{\|S\|}\right)\\
&= \sup_{f\in\mathbb{R}^{\|S\|}\setminus G} e\left(y, I_sD^rF, l_q^{\|S\|}\right)\\
&\ll 2^{\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)k} d_{n,\delta}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\ge 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)k} d_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^{\|S\|},\nu,l_q^{\|S\|}\right).
$$

定理得证。

4. 主要结果的证明

为了证明定理 3.1 还需要如下引理。

引理 4.1. 设 $0<\beta<1$，S_l 的定义见(3)，定义序列 $\{n_l\}$ 如下：

$$
n_l := \begin{cases} \|S_l\|, & l\le u \\ \|S_l\| 2^{(1+\beta)(u-l)}, & l>u \end{cases} \tag{14}
$$

则 $\sum_l n_l \ll n$，正整数 $u:=u(n)$，满足 $n\asymp 2^u u^{\nu-1}$。

定理 3.1 的证明：

首先估计 $d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 的上界。

令

$$
\delta_l = \begin{cases} \dfrac{\delta n_l}{n}, & l>u \\ 0, & l\le u \end{cases} \tag{15}
$$

则 $\sum_l \delta_l \ll \delta$。并且由 $\{n_l\}$ 以及 $\{\delta_l\}$ 的定义，显然有

$$
d_{n_l,\delta_l}\left(\mathbb{R}^{\|S\|},\nu,l_q^{\|S\|}\right)=0, l\le u.
$$

(1) $1<q\le 2$

由定理 3.3 和引理 3.1 的(1)得到

$$
\begin{aligned}
&d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\\
&\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l}\|s_l\|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{\|s_l\|+\ln\frac{n}{\delta n_l}}\\
&\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l}\|s_l\|^{\frac{1}{q}}+\sum_{l} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l}\|s_l\|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n_l^{-\frac{1}{2}}+\sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l}\|s_l\|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\\
&\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{\frac{l}{q}} l^{(\nu-1)/q}+\sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} n^{\frac{1}{2}} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\\
&\quad+\sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\ln\frac{1}{\delta}}\\
&:= I_1+I_2+I_3
\end{aligned}
$$

首先估计 I_1，注意 $n\asymp 2^u u^{\nu-1}$，

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{\frac{l}{q}} l^{(v-1)/q} \\
&\ll 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)u} 2^{\frac{u}{q}} u^{(v-1)/q} \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}\right)(l-u)} \left(\frac{l}{u}\right)^{(v-1)/q} \\
&\ll 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)u} \left(2^u u^{v-1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\asymp \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

再估计 I_2，取 $0<\beta<\min\{1,2r_1+\rho-2\}$，则

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} n^{\frac{1}{2}} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\
&\ll n^{\frac{1}{2}} \sum_{l>u} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)l} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\
&\ll n^{\frac{1}{2}} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)u} u^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{l>u} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}+\frac{\beta}{2}\right)(l-u)} \left(\frac{l}{u}\right)^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\
&\ll n^{\frac{1}{2}} \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \\
&= \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

最后，对于 I_3，有

$$
\begin{aligned}
I_3 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}} \\
&\ll \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}}\, 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)u} u^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{l>u} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}+\frac{\beta}{2}\right)(l-u)} \left(\frac{l}{u}\right)^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\
&\ll \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}}
\end{aligned}
$$

所以，当 $1<q\le 2$ 时，有

$$
d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \ll \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}
$$

(2) $2<q<\infty$

由定理 3.3 和引理 3.1 的(2)得到

$$
\begin{aligned}
& d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\
&\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}} n_l^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\|s_l\|+\ln\frac{n}{\delta n_l}} \\
&\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} n_l^{-\frac{1}{2}} + \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{2}} n_l^{-1} \\
&\quad + \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}} n_l^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}} \\
&:= K_1+K_2+K_3
\end{aligned}
$$

DOI: 10.12677/aam.2025.144221

类似之前的证法，首先估计 K_1，取 $0<\beta<\min\{1,2r_1+\rho-2\}$，则

$$\begin{aligned}K_1 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} n_l^{-\frac{1}{2}} \\ &\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)} 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{v-1}{q}} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} \\ &\ll 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}+\frac{l}{q}\right)u} u^{(v-1)/q} \sum_{l>u} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right)(l-u)} \left(\frac{l}{u}\right)^{(v-1)/q} \\ &\overset{s:=l-u}{=} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}\right)u} u^{(v-1)/q} \sum_{s>0} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right)s} \left(\frac{s+u}{u}\right)^{(v-1)/q}\end{aligned}$$

由于上述级数收敛，则有

$$\begin{aligned}K_1 &\ll 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}\right)u} u^{\frac{v-1}{q}} \\ &= 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)u} \left(2^u u^{v-1}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

又由于 $n \asymp 2^u u^{v-1}$，则有

$$K_1 \ll \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}$$

再估计 K_2，取 $0<\beta<\min\{1,r_1+\rho-1\}$，则

$$\begin{aligned}K_2 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{2}} n_l^{-1} \\ &\ll n^{\frac{1}{2}} \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} 2^{(1+\beta)(l-u)} \\ &\ll n^{\frac{1}{2}} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)u} u^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{l>u} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}+1+\beta\right)(l-u)} \left(\frac{l}{u}\right)^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\ &\overset{s:=l-u}{=} n^{\frac{1}{2}} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)u} u^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{s>0} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}+1+\beta\right)s} \left(\frac{s+u}{u}\right)^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

同样地，由于上述级数收敛，则有

$$K_2 \ll n^{\frac{1}{2}} 2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)u} u^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}$$

又由于 $n \asymp 2^u u^{v-1}$，则有

$$K_2 \ll \left(n^{-1}\ln^{v-1} n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}$$

最后对于 K_3，有

$$\begin{aligned}K_3 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} \|s_l\|^{\frac{1}{q}} n_l^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}} \\ &\ll \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}} \sum_{l>u} 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} 2^{(1+\beta)(l-u)/2}\end{aligned}$$

$$\ll \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}}2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)u}u^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\sum_{l>u}2^{\left(-r_1-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{q}+\frac{\beta}{2}\right)(l-u)}\left(\frac{l}{u}\right)^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\ll \left(n^{-1}\ln^{v-1}n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}}n^{\frac{1}{q}}\sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$$

所以，当 $2<q<\infty$ 时，有

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\ll K_1+K_2+K_3$$

$$\ll \left(n^{-1}\ln^{v-1}n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}}n^{\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$$

综上，当 $1<q<\infty$ 时

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\ll \left(n^{-1}\ln^{v-1}n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}}n^{\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$$

再估计 $d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 的下界，当 $1<q<\infty$ 时，由定理 3.4 以及引理 3.1 可得

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\gg 2^{-\left(r_1+\frac{\rho}{2}\right)k}\|S\|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{\|S\|+\ln\frac{1}{\delta}}$$

由 $\|S\|\asymp n\asymp 2^k k^{v-1}$，知

$$d_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right),\mu,B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\gg \left(n^{-1}\ln^{v-1}n\right)^{r_1+\frac{\rho}{2}}n^{\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$$

下界得证。

综上所述，定理 3.1 得证。

5. 总结与展望

本论文主要研究了加权多元 Paley-Wiener 空间在概率框架下和平均框架下的逼近特征，特别估计概率框架下和平均框架下加权多元 Paley-Wiener 空间 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 在 $B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中 Kolmogorov n-宽度的精确渐进阶。特别地，利用离散化思想，将无穷维空间下的问题先转化为有限维空间问题，从而通过有限维的结论间接地解决无穷维问题。基于此，接下来的工作，一方面，基于本文的研究结果，之后还可以对加权多元 Paley-Wiener 空间在概率框架下和平均框架下的逼近特征进行深入的研究，例如研究概率框架下和平均框架下加权多元 Paley-Wiener 空间 $B_{\pi,2}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ 在 $B_{\pi,q}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中的线性 n-宽度的精确渐进阶。

参考文献

[1] Cheney, E.W. and Light, W.A. (2009) A Course in Approximation Theory. American Mathematical Soc.

[2] Hyman, C.J. (1956) Theory of Approximation. 1-7.

[3] Kolmogoroff, A. (1936) Über Die Beste Annaherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse. *The Annals of Mathematics*, **37**, 107-110. https://doi.org/10.2307/1968691

[4] Li, J. and Wang, H. (2022) Optimal Randomized Quadrature for Weighted Sobolev and Besov Classes with the Jacobi Weight on the Ball. *Journal of Complexity*, **73**, Article 101691. https://doi.org/10.1016/j.jco.2022.101691

[5] Zayed, A.I. (1994) A Sampling Theorem for Signals Bandlimited to a General Domain in Several Dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **187**, 196-211. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1352

[6] Seip, K. (1987) An Irregular Sampling Theorem for Functions Bandlimited in a Generalized Sense. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **47**, 1112-1116. https://doi.org/10.1137/0147073

[7] Weston, J.D. (1949) XL. A Note on the Theory of Communication. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **40**, 449-453. https://doi.org/10.1080/14786444908521732

[8] Butzer, P.L. (1983) A Survey of the Whittaker-Shannon Sampling Theorem and Some of Its Extensions. *Mathematical Research and Exposition*, **3**, 185-212.

[9] Zayed, A.I. (1992) Kramer's Sampling Theorem for Multidimensional Signals and Its Relationship with Lagrange-Type Interpolations. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, **3**, 323-340. https://doi.org/10.1007/bf01940228

[10] Wiener, N. and Paley, R.C. (1934) Fourier Transforms in the Complex Domain. *American Mathematical Society*, **19**, 179-183. https://doi.org/10.1090/coll/019

[11] Li, Y., Chen, G., Xu, Y. and Pan, X. (2024) The Approximation Characteristics of Weighted Band-Limited Function Space. *Mathematics*, **12**, Article 1348. https://doi.org/10.3390/math12091348

[12] Gensun, F. (1996) Whittaker-Kotelnikov-Shannon Sampling Theorem and Aliasing Error. *Journal of Approximation Theory*, **85**, 115-131. https://doi.org/10.1006/jath.1996.0033

[13] Bogachev, V. (1998) Gaussian Measures. *American Mathematical Society*, **62**, 361-433. https://doi.org/10.1090/surv/062

[14] Kolmogoroff, A. (1936) Über Die Beste Annaherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse. *The Annals of Mathematics*, **37**, 107-110. https://doi.org/10.2307/1968691

[15] Pinkus, A. (1985) N-Widths in Approximation Theory. Springer.

[16] Maĭorov, V.E. (1994) Kolmogorov's (n, δ)-Widths of Spaces of Smooth Functions. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, **79**, 265-279. https://doi.org/10.1070/sm1994v079n02abeh003499

[17] Xu, Y., Chen, G. and Lu, W. (2023) Nonlinear Approximation of Functions by Sets of Finite Pseudo-Dimension in the Probabilistic and Average Case Settings. *Analysis and Applications*, **21**, 1517-1532. https://doi.org/10.1142/s0219530523500227

[18] Fang, G. (2001) Recovery of Band Limited Functions via Cardinal Splines. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **44**, 1126-1131. https://doi.org/10.1007/bf02877429

[19] Liu, Y., Li, H. and Li, X. (2023) Approximation Characteristics of Gel'Fand Type in Multivariate Sobolev Spaces with Mixed Derivative Equipped with Gaussian Measure. *Axioms*, **12**, Article 804. https://doi.org/10.3390/axioms12090804