

判别噪声条件下星型网络非 n 局域关联

韩玥冉, 贺 衍*

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2025年4月6日; 录用日期: 2025年4月28日; 发布日期: 2025年5月6日

摘 要

现实情况下, 理想的量子网络并不存在, 更多的是含噪声的量子网络, 在噪声情况下的量子网络会随着资源数量 n 的增加, 其非 n 局域性会逐渐降低。而不同量子网络中的非多局域关联在抗噪声干扰方面表现不同。所以在本文中, 单独研究了噪声星型网络的非局域性情况, 计算出其不等式判据, 并推导出在不同噪声情况下星型网络的非局域判断标准, 由此可以判断出在给定噪声参数的情况下, 不同资源数的星型网络的非局域性情况。

关键词

量子非局域性, 星型网络, 量子噪声

Discriminating the Non- n -Locality Correlations in Noisy Star Network

Yueran Han, Kan He*

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 6th, 2025; accepted: Apr. 28th, 2025; published: May 6th, 2025

Abstract

In reality, the ideal quantum network does not exist. Instead, what we have more often are quantum networks with noise. In a quantum network under noisy conditions, as the number n of resources increases, its non- n -locality will gradually decrease. Moreover, the non-multi-locality correlations in different quantum networks exhibit different performances in terms of resistance to noise interference. Therefore, in this paper, the non-locality situation of the noisy star-shaped quantum network is studied separately. The inequality criterion is calculated, and the non-locality judgment criteria for the star-shaped network under different noisy conditions are derived. Thus, it is possible to determine the non-locality situation of star-shaped networks with different numbers of resources under the given noise parameters.

*通讯作者。

文章引用: 韩玥冉, 贺衍. 判别噪声条件下星型网络非 n 局域关联[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 1-8.
DOI: 10.12677/aam.2025.145227

Keywords

Quantum Nonlocality, Star Network, Quantum Noise

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 序言

贝尔定理可以说是量子理论基础中最重要的成果之一[1]。它对量子信息科学的发展也产生了重大影响[2]，他证明了两个相距遥远的观察者，对共享的纠缠态进行局域测量时，能够建立起强烈的相关性。而纠缠系统中相距遥远部分之间的量子关联可以违反贝尔不等式，从而排除了用任何局域隐变量(LHV)模型来解释它的可能性，这种现象被称为量子非局域性。近年来，量子非局域性的应用在各个方面的崭露头角[3]-[5]，是一个值得深挖的研究方向。

量子网络[6]是量子信息[7][8]发展的必然条件，它广泛应用于很多场景[7]-[9]，现在科研者逐步探寻在不同量子网络中的量子非局域性[10]-[13]，然而现实生活中完美的量子网络是不存在的，任何网络都会存在其他因素的干扰，其非局域关联会随着网络的扩展而衰减。而这些干扰我们统称为量子噪声。现在主流的噪声源于量子纠缠产生、噪声量子信道以及测量中的不完美。近几年，Mukherjee 等人发现了噪声情况下线性网络中非 n 局域关联[14]，而对噪声星型网络的探究却不充分，因此本文力求探寻星型网络下，噪声对网络非局域性的影响，通过数学推导发现噪声星型网络非 n 局域关联的判据，并推导出其衍生判据。

2. 预备知识

2.1. 两量子比特态的密度矩阵表示

一个任意两量子比特态 ϱ 具有以下密度矩阵表示：

$$\varrho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sum_{j_1, j_2=1}^3 \omega_{j_1 j_2} \sigma_{j_1} \otimes \sigma_{j_2} \right),$$

其中， $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ， σ_{j_k} 是 Pauli 矩阵， $(j_k = 1, 2, 3)$ 。 $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $\mathbf{b} = (y_1, y_2, y_3)$ 是 Bloch 实向量，其中 $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}| \leq 1$ 并且 $T_{\varrho} = (\omega_{j_1, j_2})_{3 \times 3}$ 表示实相关张量 $\omega_{j_1, j_2} = \text{Tr}[\rho \sigma_{j_1} \otimes \sigma_{j_2}]$ 由于 T_{ϱ} 可对角化，因此 ϱ 的简化表达式为：

$$\varrho' = \frac{1}{4} \left(\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sum_{j=1}^3 t_{jj} \sigma_j \otimes \sigma_j \right),$$

其中， $T = \text{diag}(t_{11}, t_{22}, t_{33})$ 是相关矩阵， t_{11}, t_{22}, t_{33} 是 $\sqrt{T_{\varrho}^T T_{\varrho}}$ 的特征值，即为 T_{ϱ} 的奇异值。在局域酉变换下，量子态的纠缠保持不变。因此， ϱ 和 ϱ' 的方向性保持不变。

2.2. 星型网络的非 n 局域关联性

星型网络由 $n+1$ 个方(n 个资源)组成，见图 1，其中中心节点(称为 Bob)与每 n 个节点(称为 Alice)共享一个两体态。两体态由 n 个独立资源提供。这里假设每 n 个 Alice 都执行具有两个输出的二分测量。输入由第 i 个 Alice 的 $x_i \in \{0, 1\}$ 表示，结果由 $a_i \in \{0, 1\}$ 表示。Bob 可以选择两个可能的测量，其两个输出由 $b_j \in \{0, 1\}$ 表示。我们现在可以定义星型网络配置中 n 局域性的概念。我们说，如果概率分布可以表示如

下情况[15], 则星型网络场景中的概率分布是 n 局域的[15]

$$p\left(\{a_i\}_{i=1,\dots,n}, b \mid \{x_i\}_{i=1}^n, y\right) = \int \left(\prod_{i=1}^n d\lambda_i p(\lambda_i) p(a_i \mid x_i, \lambda_i)\right) p(b \mid y, \{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}).$$

这意味着以下 n 局域不等式判据成立:

$$\mathcal{S}_{\text{star}} = |I|^{1/n} + |J|^{1/n} \leq 1, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^n} \sum_{x_1 \cdots x_n} \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_0 \rangle \\ J &= \frac{1}{2^n} \sum_{x_1 \cdots x_n} (-1)^{\sum_i x_i} \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_1 \rangle \\ \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_y \rangle &= \sum_{a_1 \cdots a_n, b} (-1)^{b + \sum_i a_i} p\left(\{a_i\}_{i=1,\dots,n}, b \mid \{x_i\}_{i=1,\dots,n}, y\right) \end{aligned}$$

违反等式(1)表明星型网络的非 n 局域关联。当 $\mathcal{S}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 生成任意两量子比特态 $\varrho_i = \varrho_{A_i B}$ 时, 每个 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 接收一个 ϱ_i 的量子比特。Bob 接收 n 个量子比特。让每个 Alice 方执行投影在贝尔基下, 称为贝尔态测量。不等式判据(1)变为:

$$\mathcal{S}_{\text{star}} = \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n t_1^{A_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n t_2^{A_i}\right)^{1/n}} \leq 1, \quad (2)$$

其中, $t_1^{A_i}$ 和 $t_2^{A_i}$ 是矩阵的 $T_{\varrho_{A_i B}}^T T_{\varrho_{A_i B}}$ 的两个最大特征值, 其中 $t_1^{A_i} \geq t_2^{A_i}$ 。

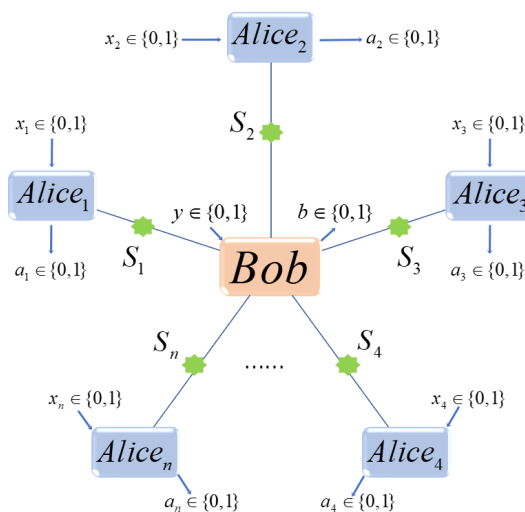


Figure 1. Star network scenario with $n + 1$ parties
图 1. $n + 1$ 方星型网络图示

2.3. 噪声的生成

2.3.1. 测量中的不完美

在无噪声条件下, Bob 有两种可能的测量结果 $\{B_{k_i}\}, k_i = 0, 1$ 。Bob 对第 i 个 Alice 的测量 B_{k_i} 的分解为 $B_{k_i}^i$, 测量算子 M_{k_i} 的结果是 $M_{k_i,0}, M_{k_i,1}$ 的正算子值测量(POVM)。同样的情况, $\{M_{ik_i,0}, M_{ik_i,1}\}$ 表示 $B_{k_i}^i$ 的 POVM, 测量 B_{k_i} 可以描述如下:

$$\begin{aligned} B_{k_i} &= \bigotimes_{i=0}^n B_{k_i}^i \\ B_{k_i} &= M_{k_i 0} - M_{k_i 1} \\ B_{k_i}^i &= M_{ik_i 0} - M_{ik_i 1}, \forall i = 1, 2, \dots, n; k_i = 0, 1. \end{aligned}$$

设 $\beta_i \in [0, 1]$ 表示测量算子 $M_{ik_i h} = M_{ik_i h}^{\text{ideal}}, h = 0, 1$ 的不完美性, 表示该算子有 $1 - \beta_i$ 的概率无法检测到。相应的噪声测量算子记为 $M_{ik_i h}^{\text{noisy}}$, 因此

$$\begin{aligned} M_{ik_i 0}^{\text{noisy}} &= \beta_i Q_i^+ + \frac{1 - \beta_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ M_{ik_i 1}^{\text{noisy}} &= \beta_i Q_i^- + \frac{1 - \beta_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}, \forall i = 1, 2, \dots, n; k_i = 0, 1. \end{aligned}$$

其中, Q_i^+ (Q_i^-) 表示与 +1 (-1) 特征值对应的投影算子, 与完美投影测量对应的投影。我们得到:

$$M_{ik_i 0}^{\text{noisy}} = \beta_i M_{ik_i 0}^{\text{ideal}} + \frac{1 - \beta_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}, \quad (3)$$

$$M_{ik_i 1}^{\text{noisy}} = \beta_i M_{ik_i 1}^{\text{ideal}} + \frac{1 - \beta_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}. \quad (4)$$

类似地, 对于 A_i 方, 用 $\mu_i \in [0, 1]$ 表示测量设备缺陷的参数。这意味着对于单量子比特投影, 这种设备以概率 $1 - \mu_i$ 未能检测到任何输出。因此, 由于 $A_{x_i}^i$ 的不完美性导致的 POVM 具有两个元素 $\{P_{ix_i 0}^{\text{noisy}}, P_{ix_i 1}^{\text{noisy}}\}$, 由下式给出:

$$\begin{aligned} P_{ix_i 0}^{\text{noisy}} &= \mu_i Q_i^+ + \frac{1 - \mu_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}, \\ P_{ix_i 1}^{\text{noisy}} &= \mu_i Q_i^- + \frac{1 - \mu_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}, \forall i = 1, 2, \dots, n; x_i = 0, 1. \end{aligned}$$

类似可写为:

$$P_{ix_i 0}^{\text{noisy}} = \mu_i P_{ix_i 0}^{\text{ideal}} + \frac{1 - \mu_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}, \quad (5)$$

$$P_{ix_i 1}^{\text{noisy}} = \mu_i P_{ix_i 1}^{\text{ideal}} + \frac{1 - \mu_i}{2} \mathbb{I}_{2 \times 2}. \quad (6)$$

2.3.2. 纠缠生成中的错误

一个理想的纠缠纯态是通过用 Hadamard 和 CNOT 门操作 $|10\rangle$ 生成的。然而, 在实际情况下, 制备设备的缺陷会导致生成混合纠缠态。这些错误是由应用 Hadamard 和 CNOT 门引起的。在每个资源 S_i 中, 设 α_i 和 δ_i 分别表示表征 $\mathcal{H}$ 和 CNOT 门的缺陷参数。对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 从 $\varrho_i = |10\rangle\langle 10|$ 开始, 有噪声的 Hadamard 门生成

$$\begin{aligned} \varrho'_i &= \alpha_i (\mathcal{H} \otimes \mathbb{I}_2 \varrho_i \mathcal{H}^\dagger \otimes \mathbb{I}_2) + \frac{1 - \alpha_i}{2} \mathbb{I}_2 \otimes \varrho_{2i}, (\varrho_{2i} = \text{Tr}_1(\varrho_i)) \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10|) - \frac{\alpha_i}{2} (|00\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 00|). \end{aligned}$$

将 ϱ'_i 带入噪声 CNOT 中

$$\begin{aligned} \varrho''_i &= \delta_i (\text{CNOT} \varrho'_i (\text{CNOT})^\dagger) + \frac{1 - \delta_i}{4} \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k, j=0}^1 [1 + (-1)^{k+j} \delta_i |kj\rangle\langle kj|] - 2\alpha_i \delta_i (|11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, ϱ_i^n 的相关张量是 $\text{diag}(-\alpha_i \delta_i, \alpha_i \delta_i, \delta_i)$ 。

2.3.3. 振幅阻尼(AD)和相位阻尼(PD)信道

对于 $i=1, 2, \dots, n$, 设 γ_i^{amp} 和 ξ_i^{amp} 分别表示源 S_i 连接 A_i 和 B 的振幅阻尼信道噪声参数。其中, 振幅阻尼信道(例如, 由 γ_i^{amp} 表示噪声参数)由 Krauss 算子 $|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma^{amp}}|1\rangle\langle 1|$ 和 $\sqrt{\gamma^{amp}}|0\rangle\langle 1|$ 表示。当 $\gamma^{amp} = 0$ 时, 噪声消失。类似地, 让 $\gamma_i^{ph}, \xi_i^{ph}$ 分别表征源 S_i 连接 A_i 和 B 的信道噪声参数。任何振幅阻尼通道(例如, 由 γ_i^{ph} 表示噪声参数)都由 Krauss 算子 $|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma^{ph}}|1\rangle\langle 1|$ 和 $\sqrt{\gamma^{ph}}|1\rangle\langle 1|$ 表示。

3. 噪声星型网络非 n 局域关联的判据

3.1. 不等式判据

在以下定理中, 我们考虑了每个源都体现任意两量子比特状态且测量不完美的主要情况。

定理 1 假设每个源 S_i 生成任意两量子比特态, 并且所有参与方分别执行不完美的测量(3)~(6)。则如果满足以下条件, 则证明了噪声星型网络非 n 局域关联

$$\mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{noisy}} = \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \right)^{1/n} \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n t_1^{A_i} \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n t_2^{A_i} \right)^{1/n}} > 1, \quad (8)$$

其中, $t_1^{A_i}$ 和 $t_2^{A_i}$ 是矩阵 $T_{\varrho_{A_i B}}^T T_{\varrho_{A_i B}}$ 的两个最大正特征值, 并且 $t_1^{A_i} \geq t_2^{A_i}$ 。

证明如下:

让我们首先考虑噪声网络中 n 局域不等式(1)

$$|I_{\text{noisy}}|^{1/n} + |J_{\text{noisy}}|^{1/n} \leq 1$$

其中

$$\begin{aligned} I^{\text{noisy}} &= \frac{1}{2^n} \sum_{x_1 \cdots x_n} \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_0 \rangle^{\text{noisy}}, \\ J^{\text{noisy}} &= \frac{1}{2^n} \sum_{x_1 \cdots x_n} (-1)^{\sum_i x_i} \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_1 \rangle^{\text{noisy}} \\ \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_y \rangle^{\text{noisy}} &= \sum_{a_1 \cdots a_n, b} (-1)^{b + \sum_i a_i} p'(\{a_i\}_{i=1, \dots, n}, b | \{x_i\}_{i=1, \dots, n}, y) \end{aligned}$$

与理想情况不同, 将 $p'()$ 定义为噪声条件下的概率项。我们要求星型网络中的所有的态 $\varrho = \otimes_{i=0}^n \varrho_i$, 接下来我们考虑根据等式(1)给出的期望值。由于测量算子 $B_y = \otimes_{i=1}^n B_y^i$ [16] 的分解, 我们固定 $B_y^i = B_0^i$ 并考虑相应的期望项 $\langle A_{x_i}^i \otimes B_0^i \rangle_{\varrho_i}^{\text{noisy}}$

$$\begin{aligned} \langle A_{x_i}^i \otimes B_0^i \rangle_{\varrho_i}^{\text{noisy}} &= \sum_{j=0}^1 \sum_{h=0}^1 (-1)^{j+h} \text{Tr} \left[\left(P_{i, x_i, j}^{\text{noisy}} \otimes M_{i, 0, h}^{\text{noisy}} \right) \varrho_i \right] \\ &= \sum_{h=0}^1 (-1)^h \text{Tr} \left\{ \left[\left(P_{i, x_i, 0}^{\text{noisy}} - P_{i, x_i, 1}^{\text{noisy}} \right) \otimes M_{i, 0, h}^{\text{noisy}} \right] \varrho_i \right\} \\ &= \mu_i \sum_{h=0}^1 (-1)^h \text{Tr} \left\{ \left[\left(P_{i, x_i, 0}^{\text{ideal}} - P_{i, x_i, 1}^{\text{ideal}} \right) \otimes M_{i, 0, h}^{\text{noisy}} \right] \varrho_i \right\} \\ &= \mu_i \sum_{j=0}^1 \sum_{h=0}^1 (-1)^{j+h} \text{Tr} \left[\left(P_{i, x_i, j}^{\text{ideal}} \otimes M_{i, 0, h}^{\text{noisy}} \right) \varrho_i \right] \\ &= \mu_i \beta_i \sum_{j=0}^1 \sum_{h=0}^1 (-1)^{j+h} \text{Tr} \left[\left(P_{i, x_i, j}^{\text{ideal}} \otimes M_{i, 0, h}^{\text{ideal}} \right) \varrho_i \right] \\ &= \mu_i \beta_i \langle A_{x_i}^i \otimes B_0^i \rangle_{\varrho_i}^{\text{ideal}} \end{aligned}$$

根据假设, 计算表明:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{noisy}} &= |I|^{1/n} + |J|^{1/n} \\
 &= \left| \frac{1}{2} \sum_{x_1 \cdots x_n} \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_0 \rangle^{\text{noisy}} \right|^{1/n} + \left| \frac{1}{2} \sum_{x_1 \cdots x_n} (-1)^{\sum_i x_i} \langle A_{x_1}^1 \cdots A_{x_n}^n B_1 \rangle^{\text{noisy}} \right|^{1/n} \\
 &= \left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\langle A_0^i B_0^i \rangle^{\text{ideal}} + \langle A_1^i B_0^i \rangle^{\text{ideal}} \right) \right|^{1/n} + \left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\langle A_0^i B_1^i \rangle^{\text{ideal}} - \langle A_1^i B_1^i \rangle^{\text{ideal}} \right) \right|^{1/n} \\
 &= \left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu_i \beta_i \left(\langle A_0^i B_0^i \rangle^{\text{ideal}} + \langle A_1^i B_0^i \rangle^{\text{ideal}} \right) \right|^{1/n} + \left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu_i \beta_i \left(\langle A_0^i B_1^i \rangle^{\text{ideal}} - \langle A_1^i B_1^i \rangle^{\text{ideal}} \right) \right|^{1/n} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \right)^{1/n} \times \left(\left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\langle A_0^i B_0^i \rangle^{\text{ideal}} + \langle A_1^i B_0^i \rangle^{\text{ideal}} \right) \right|^{1/n} + \left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\langle A_0^i B_1^i \rangle^{\text{ideal}} - \langle A_1^i B_1^i \rangle^{\text{ideal}} \right) \right|^{1/n} \right) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \right)^{1/n} \mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{ideal}}
 \end{aligned}$$

与[16]中的证明定理 3 类似, 我们得到 $\mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{noisy}}$ 等于

$$\left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \right)^{1/n} \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n t_1^{A_i} \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n t_2^{A_i} \right)^{1/n}}$$

其中, $t_1^{A_i}$ 和 $t_2^{A_i}$ 是矩阵 $T_{\varrho_{A_i B}}^T T_{\varrho_{A_i B}}$ 的两个最大特征值, 其中 $t_1^{A_i} \geq t_2^{A_i}$ 。

3.2. 不等式判据推论

当纠缠生成的错误如(7)所示时, 第 i 个资源会生成噪声态 ϱ_i'' 且 $T_{\varrho_i''}^* T_{\varrho_i''} = \text{diag}(\alpha_i^2 \delta_i^2, \alpha_i^2 \delta_i^2, \delta_i^2)$ 。因此, 我们从定理 1 中得到以下推论。

推论 1 假设每个源 $\mathcal{S}_i$ 在等式(7)中生成有噪声的两量子比特态 ϱ_i'' , 并且所有参与方分别执行不完美的测量(3)~(6)。那么, 噪声的星型网络非 n 局域关联得到证明, 如果

$$\mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{noisy}} = \left(\prod_{i=1}^n \beta_i \mu_i \delta_i \right)^{1/n} \sqrt{\prod_{i=1}^n \alpha_i^{2/n} + 1} > 1.$$

证明: 把 $T_{\varrho_i''}^* T_{\varrho_i''} = \text{diag}(\alpha_i^2 \delta_i^2, \alpha_i^2 \delta_i^2, \delta_i^2)$ 带入判据(8)中, 由于 α_i 大于 0 小于 1, 则矩阵的两个最大特征值为 $\alpha_i^2 \delta_i^2$ 和 δ_i^2 , 那么判据(8)可推导为如下:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}^{\text{noisy}} &= \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \right)^{1/n} \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta_i^2 \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \delta_i^2 \right)^{1/n}} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \right)^{1/n} \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n \delta_i \right)^{2/n} \left[\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^{2/n} + 1 \right]} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \beta_i \delta_i \right)^{1/n} \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^{2/n} + 1} > 1
 \end{aligned}$$

当每个含噪声的量子比特态由含参量 γ_i^{amp} 和 ξ_i^{amp} 的振幅阻尼信道发送时, 则输出态为 ϱ_i'' 且满足 $T_{\varrho_i''}^* T_{\varrho_i''} = \text{diag}(\alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{\text{amp}}, \alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{\text{amp}}, (\delta_i D_i^{\text{amp}} + \gamma_i^{\text{amp}} \xi_i^{\text{amp}})^2)$, 其中 $D_i^{\text{amp}} = (1 - \gamma_i^{\text{amp}})(1 - \xi_i^{\text{amp}})$ [17]。

推论 2 假设每个资源 $\mathcal{S}_i$ 产生有噪声的两量子比特态 ϱ_i'' , γ_i^{amp} 和 ξ_i^{amp} 分别表征资源 $\mathcal{S}_i$ 连接 $\mathcal{A}_i$ 和 B 的振幅阻尼信道参数, 并且所有的方执行不完美测量(3)~(6)。那么, 含噪声的星型网络非 n 局域关联得到证明, 如果满足

$$\mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{noisy}} = \left(\prod_{i=1}^n \beta_i \mu_i \right)^{1/n} \sqrt{\text{Max}(F_1, F_2)} > 1,$$

其中

$$F_1 = 2 \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{amp} \right)^{1/n},$$

$$F_2 = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{amp} \right)^{1/n} + \prod_{i=1}^n \left(\delta_i D_i^{amp} + \gamma_i^{amp} \xi_i^{amp} \right)^{2/n}$$

证明方式如推论 1。

类似于振幅阻尼通道, 我们也考虑了由参数 γ_i^{ph} 和 ξ_i^{ph} 表示的相位阻尼信道。这里, 输出态为 ϱ_i^m , 满足 $T_{\varrho_i^m}^* T_{\varrho_i^m} = \text{diag}(\alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{ph}, \alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{ph}, \delta_i^2)$, 其中 $D_i^{ph} = (1 - \gamma_i^{ph})(1 - \xi_i^{ph})$ 。

推论 3 假设每个资源 S_i 产生有噪声的两量子比特态 ϱ_i^m , γ_i^{ph} 和 ξ_i^{ph} 分别表征资源 S_i 连接 A_i 和 B 的相位阻尼信道噪声参数, 并且所有的方执行不完美测量(3)~(6)。那么, 含噪声的星型网络非 n 局域关联得到证明, 如果满足

$$\mathcal{S}_{\text{star}}^{\text{noisy}} = \left(\prod_{i=1}^n \beta_i \mu_i \right)^{1/n} \sqrt{\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta_i^2 D_i^{ph} \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \delta_i \right)^{2/n}} > 1.$$

证明方式类似。

4. 总结

在这项研究中, 回顾了星型网络中非多局域关联的基本知识, 并探讨了噪声生成现象。计算出不同噪声星型网络的局域不等式标准判据, 并由此可以判断出在给定噪声参数的情况下, 不同资源数的星型网络的非局域性情况。从而对网络的非局域性判别作了进一步的推广, 但对其噪声星型网络非局域情况还需进一步研究, 以便更深层次符合实际应用现实。

基金项目

这项工作得到了中国国家自然科学基金(项目编号: 12271394)以及山西省重点研发计划(项目编号: 202102010101004)的资助。

参考文献

- [1] Scarani, V. (2019) Bell Nonlocality. Oxford University Press.
- [2] Wiseman, H.M., Jones, S.J. and Doherty, A.C. (2007) Steering, Entanglement, Nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Physical Review Letters*, **98**, Article ID: 140402. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.98.140402>
- [3] Pironio, S., Acín, A., Massar, S., de la Giroday, A.B., Matsukevich, D.N., Maunz, P., et al. (2010) Random Numbers Certified by Bell's Theorem. *Nature*, **464**, 1021-1024. <https://doi.org/10.1038/nature09008>
- [4] Colbeck, R. and Kent, A. (2011) Private Randomness Expansion with Untrusted Devices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44**, Article ID: 095305. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/9/095305>
- [5] Raussendorf, R. and Briegel, H.J. (2001) A One-Way Quantum Computer. *Physical Review Letters*, **86**, 5188-5191. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.5188>
- [6] Wehner, S., Elkouss, D. and Hanson, R. (2018) Quantum Internet: A Vision for the Road Ahead. *Science*, **362**, aam9288. <https://doi.org/10.1126/science.aam9288>
- [7] Sangouard, N., Simon, C., de Riedmatten, H. and Gisin, N. (2011) Quantum Repeaters Based on Atomic Ensembles and Linear Optics. *Reviews of Modern Physics*, **83**, 33-80. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.83.33>
- [8] Hammerer, K., Sørensen, A.S. and Polzik, E.S. (2010) Quantum Interface between Light and Atomic Ensembles. *Reviews of Modern Physics*, **82**, 1041-1093. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.1041>
- [9] Wang, M., Xiang, Y., Kang, H., Han, D., Liu, Y., He, Q., et al. (2020) Deterministic Distribution of Multipartite Entanglement and Steering in a Quantum Network by Separable States. *Physical Review Letters*, **125**, Article ID: 260506. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.125.260506>
- [10] Mukherjee, K., Paul, B. and Sarkar, D. (2015) Correlations in n -Local Scenario. *Quantum Information Processing*, **14**, 2025-2042. <https://doi.org/10.1007/s11128-015-0971-7>

-
- [11] Renou, M., Bäumer, E., Boreiri, S., Brunner, N., Gisin, N. and Beigi, S. (2019) Genuine Quantum Nonlocality in the Triangle Network. *Physical Review Letters*, **123**, Article ID: 140401. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.123.140401>
 - [12] Yang, L., Qi, X. and Hou, J. (2021) Nonlocal Correlations in the Tree-Tensor-Network Configuration. *Physical Review A*, **104**, Article ID: 042405. <https://doi.org/10.1103/physreva.104.042405>
 - [13] Yang, L., Qi, X. and Hou, J. (2022) Multi-nonlocality and Detection of Multipartite Entanglements by Special Quantum Networks. *Quantum Information Processing*, **21**, Article No. 305. <https://doi.org/10.1007/s11128-022-03637-z>
 - [14] Mukherjee, K. (2022) Detecting Nontrilocal Correlations in a Triangle Network. *Physical Review A*, **106**, Article ID: 042206. <https://doi.org/10.1103/physreva.106.042206>
 - [15] Tavakoli, A., Skrzypczyk, P., Cavalcanti, D. and Acín, A. (2014) Nonlocal Correlations in the Star-Network Configuration. *Physical Review A*, **90**, Article ID: 062109. <https://doi.org/10.1103/physreva.90.062109>
 - [16] Andreoli, F., Carvacho, G., Santodonato, L., Chaves, R. and Sciarrino, F. (2017) Maximal Qubit Violation of N-Local Inequalities in a Star-Shaped Quantum Network. *New Journal of Physics*, **19**, Article ID: 113020. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8b9b>
 - [17] Mukherjee, K., Chakrabarty, I. and Mylavarapu, G. (2023) Persistency of Non- n -Local Correlations in Noisy Linear Networks. *Physical Review A*, **107**, Article ID: 032404. <https://doi.org/10.1103/physreva.107.032404>