Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 29-39
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145230

具有时空卷积的Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony方程孤立波和周期波的不存在性

周笑笑

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2025年4月8日；录用日期：2025年5月2日；发布日期：2025年5月9日

摘　要

本文研究具有时空卷积的Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM)方程孤立波和周期波的存在性。根据几何奇异摄动理论，将一个非线性偏微分方程转化为平面二维动力系统。基于Melnikov方法，可以判断出扰动WBBM方程的孤立波和周期波是不存在的。

关键词

Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony方程，几何奇异摄动，孤立波解，周期波解，Melnikov积分

Non-Existence of Solitary Wave and Periodic Wave for Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony Equation with Spatiotemporal Convolution

Xiaoxiao Zhou

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 8th, 2025; accepted: May 2nd, 2025; published: May 9th, 2025

Abstract

This paper discusses the existence of solitary waves and periodic waves for Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) equation with spatiotemporal convolution. According to the theory of geometric singular perturbations, a nonlinear partial differential equation is transformed into a two-dimensional planar dynamical system. Based on the Melnikov method, it can be determined that solitary waves and periodic waves of perturbed WBBM equation do not exist.

文章引用：周笑笑. 具有时空卷积的 Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony 方程孤立波和周期波的不存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 29-39. DOI: 10.12677/aam.2025.145230

Keywords

Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony Equation, Geometric Singular Perturbation, Solitary Wave Solution, Periodic Wave Solution, Melnikov Integral

1. 引言

在 1972 年，Benjamin 等人[1]建立了 Benjamin-Bona-Mahony (BBM)方程。由下式给出：

$$u_t + u_x + u^n u_x - u_{xxt} = 0. \tag{1}$$

它是 KdV 方程(Amick 等人[2]，Benjamin [3])的正则化形式。BBM 方程和 KdV 方程被用来研究水中的表面波(长波)和非线性色散中的长波系统、等离子体中的表面波等。它们是描述水波中非线性传播的重要方程。许多学者对它们的动态特性进行了广泛的研究，包括稳定性、振荡模式和演化(Tso [4]，Johnspillai 等人[5])。从可控性的角度来看，处理 BBM 方程比处理 KdV 方程简便得多。有许多论文考虑了 BBM 方程的精确解(例如参见[6]-[11])。当 $n=2$ 时，方程(1)变成修正的 BBM 方程式。Wazwaz [12]得到了一种新的(3 + 1)维修正 BBM 方程，成为 Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM)方程。形式如下：

$$u_t + u_x + u^2 u_x - u_{xzt} = 0, \tag{2}$$

$$u_t + u_z + u^2 u_x - u_{xyt} = 0, \tag{3}$$

$$u_t + u_y + u^2 u_z - u_{xxt} = 0. \tag{4}$$

从 WBBM 方程中获得的解的波动现象通常用于水波动力学、流体动力学等研究领域。也有一些学者对 WBBM 方程进行了研究。Mamun 等人[13]采用改进的拓展 tanh 函数方法研究了 WBBM 方程的孤立波。Abbs 等人[14]使用新的拓展直接代数方法来获得 WBBM 方程的行波剖面。Shakeel 等人[15]使用改进的 exp 函数方法，研究了 WBBM 方程的精确行波。

Britton [16]首次将空间和时间上的卷积引入扩散模型中，他推导出了一个模型如下：

$$u_t = u\left(1 + \alpha u - (1+\alpha)(f * u)\right) + \Delta u, \tag{5}$$

这里，$f * u$ 是时空中的局部卷积，形式为：

$$(f*u)(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-s)\, u(x,y,z,s)\, \mathrm{d}s. \tag{6}$$

我们取核 $f(t)$ 如下：

$$f(t) = \frac{4t}{\tau^2} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}, \tag{7}$$

带有平均延迟 $\tau = \int_0^\infty t f(t)\,\mathrm{d}t$，这里 $\int_0^\infty t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ 以及 $tf(t) \in L^1((0,\infty), R), f:[0,\infty) \to [0,\infty)$。引入时滞卷积使模型更接近实际情况。

几何奇异摄动(GSP)理论是探索行波的重要工具。Chen 等人[17]专注于研究扰动的广义 BBM 方程孤立波和周期波的存在性问题。Cheng 和 Li [18]证明了 Degasperis-Procesi 方程中具有时滞项的孤立波的存

在性。Qiao 和 Zhang [19]利用 GSP 定理研究了 Keller-Segel 系统的动力学行为。Shen 和 Zhang [20]证明了 FitzHugh-Nagumo 方程行波脉冲的存在性。Yan 等人[21]应用 GSP 理论和正则摄动分析来研究扰动广义 KdV 方程。Wen [22]研究了扰动加德纳方程扭结波和反扭结波的存在性。Fan 和 Wei [23]探索了五次方波 BBM 方程的周期波和孤立波的存在性。Zhang 等人[24]利用 GSP 定理研究了扰动 mKdV 方程。

受上述结果的启发，本文主要讨论了带有时滞的 WBBM 方程孤立波和周期波的存在性。方程形式如下：

$$u_t + u_x + \frac{1}{3}\left(\left(f*u\right)u^2\right)_y - u_{xzt} + \tau u_{xx} = 0, \tag{8}$$

$$u_t + u_z + \frac{1}{3}\left(\left(f*u\right)u^2\right)_x - u_{xyt} + \tau u_{xx} = 0, \tag{9}$$

$$u_t + u_y + \frac{1}{3}\left(\left(f*u\right)u^2\right)_z - u_{xxt} + \tau u_{xx} = 0, \tag{10}$$

其中，$0 < \tau \ll 1$。

文章的布局如下。在第 2 节中，利用行波变换和几何奇异摄动理论对 WBBM 方程降维。在第 3 节，由反证法知，摄动系统的孤立波解不存在。在第 4 节中，同样发现摄动系统的周期波解不存在。最后，对文章内容做了一个总结。

2. 模型的降维

在本节中，我们利用行波变换和 GSP 理论对模型进行简化，得到了一个二维系统。

首先，引入变换：

$$\phi(\xi) = u(x,y,z,t), \xi = x + y + z - ct, \tag{11}$$

令 $t - s = \varpi$，则局部卷积可化成如下形式：

$$\begin{aligned}
\left(f*u\right)(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{4(t-s)}{\tau^2} \mathrm{e}^{-\frac{2(t-s)}{\tau}} u(x,y,z,s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{+\infty}^{0} \frac{4\varpi}{\tau^2} \mathrm{e}^{-\frac{2\varpi}{\tau}} u(x,y,z,t-\varpi)\,\mathrm{d}(t-\varpi) \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{4\varpi}{\tau^2} \mathrm{e}^{-\frac{2\varpi}{\tau}} \phi(\xi + c\varpi)\,\mathrm{d}\varpi \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{4t}{\tau^2} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}} \phi(\xi + ct)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{12}$$

那么，方程(8)变成了一个常微分方程，形式如下：

$$(1-c)\phi' + \frac{1}{3}\left(\psi\phi^2\right)' + c\phi''' + \tau\phi'' = 0, \tag{13}$$

这里，$\psi(\xi) = \int_{0}^{+\infty} \frac{4t}{\tau^2} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}} \phi(\xi + ct)\,\mathrm{d}t$。考虑现实意义，我们只分析 $c > 0$ 的情况。因为方程(8)~(10)化为常微分方程时有相同的形式，为了方便起见，我们只考虑方程(8)。

对方程(13)积分一次得：

$$(1-c)\phi + \frac{1}{3}\psi\phi^2 + c\phi'' + \tau\phi' = g, \tag{14}$$

这里，g 是积分常数。我们以 1 为临界点对波速 c 进行分类。当 $c>1$ 时，令 $\kappa=\frac{\phi}{(c-1)^{\frac{1}{2}}}, G=\frac{g}{(c-1)^{\frac{3}{2}}}$，方程(14)转化为：

$$-\kappa+\frac{1}{3}\tilde{\psi}\kappa^2+\frac{c}{c-1}\kappa''+\frac{\tau}{c-1}\kappa'=G, \tag{15}$$

这里，$\tilde{\psi}(\xi)=\int_0^{+\infty}\frac{4t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\kappa(\xi+ct)\mathrm{d}t$。

对 x 求导，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\psi}}{\mathrm{d}\xi}&=\int_0^{+\infty}\frac{4t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\kappa_\xi(\xi+ct)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{4t}{c\tau^2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\kappa_t(\xi+ct)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{c\tau}\left[2\int_0^{+\infty}\frac{4t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\kappa(\xi+ct)\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{4}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\kappa(\xi+ct)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{c\tau}(2\tilde{\psi}-\tilde{\omega})\end{aligned} \tag{16}$$

这里，$\tilde{\omega}=\int_0^{+\infty}\frac{4}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\kappa(\xi+ct)\mathrm{d}t$。

按照同样的方法，可以推出：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2}{c\tau}(\tilde{\omega}-2\kappa). \tag{17}$$

因此，方程(15)被重写为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\xi}=\nu,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{c-1}{c}\left(G+\kappa-\dfrac{1}{3}\tilde{\psi}\kappa^2-\dfrac{\tau}{c-1}\nu\right),\\[2mm]\tau\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\psi}}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{1}{c}(2\tilde{\psi}-\tilde{\omega}),\\[2mm]\tau\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{2}{c}(\tilde{\omega}-2\kappa).\end{cases} \tag{18}$$

通过变换 $\xi=\tau\eta$，我们得到：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\eta}=\tau\nu,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\eta}=\dfrac{\tau(c-1)}{c}\left(G+\kappa-\dfrac{1}{3}\tilde{\psi}\kappa^2-\dfrac{\tau}{c-1}\nu\right),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\psi}}{\mathrm{d}\eta}=\dfrac{1}{c}(2\tilde{\psi}-\tilde{\omega}),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\eta}=\dfrac{2}{c}(\tilde{\omega}-2\kappa).\end{cases} \tag{19}$$

对于 $0 \ll \tau < 1$，为了获得一个不变流形，结合 GSP 理论，我们先验证 M_0 是否是法向双曲的。系统(19)在 $\tau = 0$ 处的线性化矩阵是：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{4}{c} & 0 & 0 & \frac{2}{c} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

矩阵 A 有四个特征值，分别是 $0, 0, \frac{2}{c}, \frac{2}{c}$。因此，$M_0$ 是法向双曲的(见文献[25]-[27])。结合 Fenichel [28]第一个不变流形理论，存在一个与 M_0 微分同胚的子流形 M_τ。M_τ 可表示为：

$$M_\tau = \left\{ (\kappa, \nu, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \in R^4 \mid \tilde{\psi} = \kappa + \alpha(\kappa, \nu, \tau), \tilde{\omega} = 2\kappa + \beta(\kappa, \nu, \tau) \right\}. \tag{21}$$

其中，α 和 β 关于 τ 足够光滑，且满足 $\alpha(\kappa, \nu, \tau) = 0, \beta(\kappa, \nu, \tau) = 0$。根据 τ 的泰勒展开，我们有 $\tilde{\psi} = \kappa + \tau\alpha_1 + O(\tau^2), \tilde{\omega} = 2\kappa + \tau\beta_1 + O(\tau^2)$。将其代入到方程(18)中，得：

$$\tau \frac{\mathrm{d}\tilde{\psi}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{c}(2\tilde{\psi} - \tilde{\omega}) = \frac{\tau}{c}(2\alpha_1 - \beta_1) + O(\tau^2) = \tau\left[\nu + \tau\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \kappa}\nu + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} \times \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi}\right) + O(\tau^2)\right]. \tag{22}$$

$$\tau \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{2}{c}(\tilde{\omega} - 2\kappa) = \frac{2\tau\beta_1}{c} + O(\tau^2) = \tau\left[2\nu + \tau\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \kappa}\nu + \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu} \times \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi}\right) + O(\tau^2)\right]. \tag{23}$$

比较 τ 的一次项系数，可得：

$$\alpha_1 = \beta_1 = c\nu. \tag{24}$$

同样地，有：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{c-1}{c}\left(G + \kappa - \frac{1}{3}\tilde{\psi}\kappa^2 - \frac{\tau}{c-1}\nu\right) + O(\tau^2) \\ &= \frac{c-1}{c}\left[G + \kappa - \frac{1}{3}(\kappa + \tau c\nu)\kappa^2 - \frac{\tau}{c-1}\nu\right] + O(\tau^2) \\ &= \frac{c-1}{c}\left(-\frac{1}{3}\kappa^3 + \kappa + G\right) + \tau\left(\frac{1-c}{3}\nu\kappa^2 - \frac{1}{c}\nu\right) + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{25}$$

因此，限制在 M_τ 上的慢系统是：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\xi} = \nu, \\ \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi} = \dfrac{c-1}{c}\left(-\dfrac{1}{3}\kappa^3 + \kappa + G\right) + \tau\left(\dfrac{1-c}{3}\nu\kappa^2 - \dfrac{1}{c}\nu\right) + O(\tau^2). \end{cases} \tag{26}$$

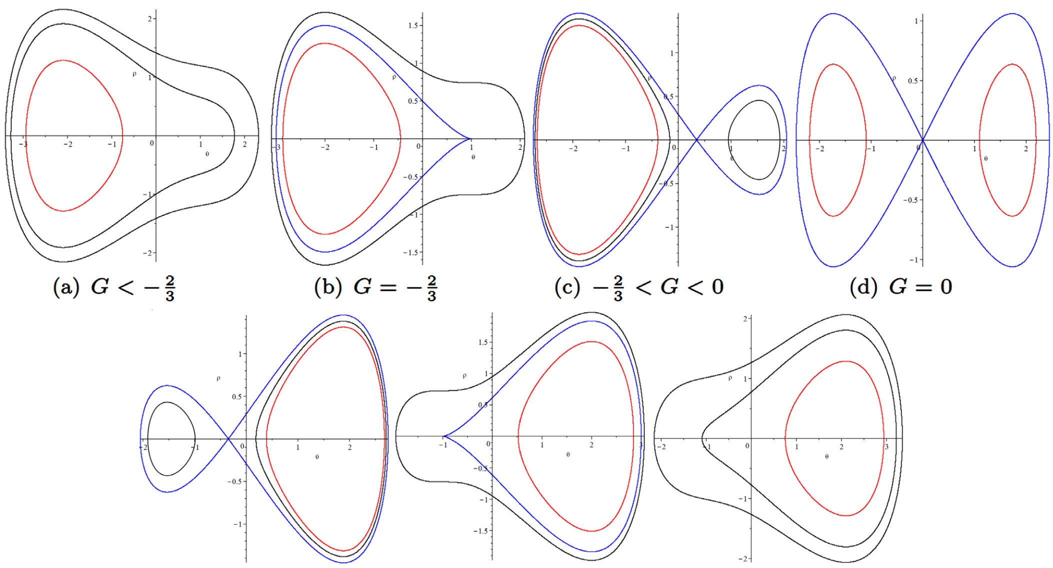
考虑到由方程 $(26)|_{\tau=0}$ 定义的未扰系统，容易看出当参数 G 取不同的值时，系统包含同宿轨道和周期轨道。根据平面动力系统理论[29]，我们有以下关于系统 $(26)|_{\tau=0}$ 的结论，并画出了每种情况对应的图(见图 1)。

1) 当 $|G| > \frac{2}{3}$ 时，系统 $(26)|_{\tau=0}$ 只有一个中心；

2) 当 $|G| = \frac{2}{3}$ 时，系统 $(26)|_{\tau=0}$ 有一个尖点和一个中心；

3) 当 $G=0$ 时，系统 $(26)|_{\tau=0}$ 有一个鞍点 $(0,0)$，两个中心 $(\sqrt{3},0)$ 和 $(-\sqrt{3},0)$；

4) 当 $0<|G|<\dfrac{2}{3}$ 时，系统 $(26)|_{\tau=0}$ 有一个鞍点和两个中心。



(a) $G<-\frac{2}{3}$ (b) $G=-\frac{2}{3}$ (c) $-\frac{2}{3}<G<0$ (d) $G=0$

(e) $0<G<\frac{2}{3}$ (f) $G=\frac{2}{3}$ (g) $G>\frac{2}{3}$

Figure 1. Phase plane of the unperturbed system $(26)|_{\tau=0}$ when $c>1$

图 1. 当 $c>1$ 时，未扰系统 $(26)|_{\tau=0}$ 的相平面

当 $0<c<1$ 时，令 $\kappa=\dfrac{\phi}{(1-c)^{\frac{1}{2}}}, G=\dfrac{g}{(1-c)^{\frac{3}{2}}}$，我们获得对应的二维正则系统如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\xi}=\nu,\\ \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{1-c}{c}\left(-\dfrac{1}{3}\kappa^3-\kappa+G\right)+\tau\left(\dfrac{c-1}{3}\nu\kappa^2-\dfrac{1}{c}\nu\right)+O\left(\tau^2\right).\end{cases} \tag{27}$$

对应的未扰系统是：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\xi}=\nu,\\ \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{1-c}{c}\left(-\dfrac{1}{3}\kappa^3-\kappa+G\right).\end{cases} \tag{28}$$

通过分析未扰系统(28)，我们知道未扰系统(28)有一个平衡点且是中心。系统(28)的轨迹是一簇围绕着中心的轨道，而且没有同宿轨道，这不在我们的考虑范围内。类似地，当 $c=1$ 时，我们可以推出它的情况与 $0<c<1$ 时相似。

3. WBBM 方程孤立波解的存在性

当 $\tau=0$ 时，我们已经在文献[30]中讨论过随着参数取值的不同，未扰系统存在四种孤立波。因此，在这一章节中，我们结合 Melnikov 方法，主要讨论扰动系统(8)孤立波解的存在性。

在[31] [32]中，通过 Poincare 映射来度量鞍点(或中心)的稳定与不稳定流形之间的距离。

$$d: h \to P(h,c,\tau).$$

扰动后，鞍点的稳定和不稳定流形的横截相交性由下述积分的零点所确定：

$$\begin{aligned} d(h,c,\tau) &= \int_h^{P(h,c,\tau)} \mathrm{d}H \\ &= \int_{t_h}^{t_{P(h,c,\tau)}} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} \right)\Bigg|_{\gamma(h,c,\tau)} \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{29}$$

其中，$t_{P(h,c,\tau)}$ 和 t_h 分别表示初始点和映射点的时间，$\gamma(h,c,\tau)$ 是扰动后的轨道。并且当 $\tau \to 0$ 时，它趋向于未扰轨道 $\gamma(h,c)$。把 $d(h,c,\tau)$ 关于 τ 泰勒展开，可得：

$$d(h,c,\tau) = \tau M(h,c) + O(\tau^2) \tag{30}$$

其中，$M(h,c)$ 被称为 Melnikov 函数。

未扰系统 $(26)\big|_{\tau=0}$ 有一个鞍点 $(\kappa_0,0)$，这里 $(\kappa_0,0)$ 满足 $\kappa_0 - \frac{\kappa_0^3}{3} + G = 0,\ -1 \le \kappa_0 \le 1$。对此，鞍点的稳定和不稳定流形之间的距离函数由下式确定：

$$\begin{aligned} d(h,c,\tau) &= \int_0^{\xi(\tau)} H_\kappa \mathrm{d}\kappa + H_\nu \mathrm{d}\nu \\ &= \int_0^{\xi(\tau)} \frac{c-1}{c}\left(\frac{1}{3}\kappa^3 - \kappa - G\right)\mathrm{d}\kappa + \nu \mathrm{d}\nu \\ &= \int_0^{\xi(\tau)} \frac{c-1}{c}\left(\frac{1}{3}\kappa^3 - \kappa - G\right)\mathrm{d}\kappa + \nu\left[\frac{c-1}{c}\left(-\frac{1}{3}\kappa^3 + \kappa + G\right) + \tau\left(\frac{1-c}{3}\nu\kappa^2 - \frac{1}{c}\nu\right) + O(\tau^2)\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^{\xi(\tau)} \left[\tau\nu^2\left(\frac{1-c}{3}\kappa^2 - \frac{1}{c}\right) + O(\tau^2)\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \oint_{L_0^{\pm}(\kappa_0)} \tau\nu^2\left(\frac{1-c}{3}\kappa^2 - \frac{1}{c}\right)\mathrm{d}\xi + O(\tau^2) \\ &= \tau M_{\pm}(c,\kappa_0) + O(\tau^2) \end{aligned} \tag{31}$$

这里，H 为哈密顿函数 $H(\kappa,\nu) = \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{c-1}{c}\left(\frac{1}{12}\kappa^4 - \frac{1}{2}\kappa^2 - G\kappa\right)$。

由此可知，我们定义系统(26)沿着左或右同宿轨道的 Melnikov 函数为：

$$M_{\pm}(c,\kappa_0) = \oint_{L_0^{\pm}(\kappa_0)} \nu^2\left(\frac{1-c}{3}\kappa^2 - \frac{1}{c}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{32}$$

根据定义，未扰系统 $(26)\big|_{\tau=0}$ 的双同宿轨道由如下的代数曲线确定：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{c-1}{c}\left(\frac{1}{12}\kappa^4 - \frac{1}{2}\kappa^2 - G\kappa\right) &= \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{c-1}{c}\left[\frac{1}{12}\kappa^4 - \frac{1}{2}\kappa^2 + \left(\kappa_0 - \frac{\kappa_0^3}{3}\right)\kappa\right] \\ &= \frac{c-1}{c}\left(\frac{1}{2}\kappa_0^2 - \frac{1}{4}\kappa_0^4\right). \end{aligned} \tag{33}$$

另外，双同宿轨道包括右同宿轨道 $L_0^+(\kappa_0)$ 和左同宿轨道 $L_0^-(\kappa_0)$，其范围分别是 $\kappa_0 < \kappa \le m_+$ 和 $m_- \le \kappa < \kappa_0$，这里 $m_{\pm} = -\kappa_0 \pm \sqrt{6 - 2\kappa_0^2}$。同时，我们定义双同宿轨道 $L_0^+(\kappa_0) \cup L_0^-(\kappa_0)$ 的 Melnikov 函数如下：

$$M(c,\kappa_0)=M_+(c,\kappa_0)+M_-(c,\kappa_0)$$
$$=\oint_{L_0^+(\kappa_0)\cup L_0^-(\kappa_0)}\nu^2\left(\frac{1-c}{3}\kappa^2-\frac{1}{c}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{34}$$

为了探究 Melnikov 函数的零点，我们把 $M_\pm(c,\kappa_0)$ 的表达式分成两部分。设

$$I_\pm(c,\kappa_0)=\oint_{L_0^\pm(\kappa_0)}\nu^2\mathrm{d}\xi, \tag{35}$$

$$J_\pm(c,\kappa_0)=\oint_{L_0^\pm(\kappa_0)}\nu^2\kappa^2\mathrm{d}\xi, \tag{36}$$

那么，$M_\pm(c,\kappa_0)$ 变成了

$$M_\pm(c,\kappa_0)=-\frac{1}{c}I_\pm(c,\kappa_0)+\frac{1-c}{3}J_\pm(c,\kappa_0). \tag{37}$$

不难得知 $I_\pm(c,\kappa_0)>0, J_\pm(c,\kappa_0)>0$。我们用反证法来证明 Melnikov 函数零点的存在性。如果 $M_\pm(c,\kappa_0)=0$，有 $c=\dfrac{J\pm\sqrt{J^2-12IJ}}{2J}$。分情况讨论。

1) 当 $c=\dfrac{J+\sqrt{J^2-12IJ}}{2J}$， $c<\dfrac{2J}{2J}=1$；2) 当 $c=\dfrac{J-\sqrt{J^2-12IJ}}{2J}$， $c<\dfrac{J}{2J}=\dfrac{1}{2}$。

综上所述，这与 $c>1$ 相矛盾。因此，$M_\pm(c,\kappa_0)$ 的零点不存在。类似地，$M(c,\kappa_0)$ 的零点也不存在。这表明扰动系统(26)的同宿轨道破裂，也意味着方程(8)的孤立波解不存在。

4. WBBM 方程周期波解的存在性

在这一节中，我们分别考虑未扰系统和摄动系统周期波解的存在唯一性。

在之前的讨论中，我们获得了正则摄动系统(26)。当 $\tau=0$ 时，未扰系统和对应的哈密顿函数如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\xi}=\nu,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{c-1}{c}\left(-\dfrac{1}{3}\kappa^3+\kappa+G\right),\end{cases} \tag{38}$$

和

$$H(\kappa,\nu)=\frac{1}{2}\nu^2+\frac{c-1}{c}\left(\frac{1}{12}\kappa^4-\frac{1}{2}\kappa^2-G\kappa\right). \tag{39}$$

根据 Cardano 公式系统(38)有三个平衡点分别是：$E_0\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)+\frac{4}{3}\pi\right),0\right)$，$E_1\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)\right),0\right)$，$E_2\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)+\frac{2}{3}\pi\right),0\right)$。其中，这三个平衡点对应的哈密顿函数是 $h_0:=H\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)+\frac{4}{3}\pi\right),0\right)$，$h_1:=H\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)\right),0\right)$ 以及 $h_2:=H\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)+\frac{2}{3}\pi\right),0\right)$。为了比较这三个平衡点横坐标的大小，结合三角函数的性质，不妨令 $-\frac{2}{3}<G<0$，我们获得了如下估计：$x_{E_0}\in(0,1), x_{E_1}\in\left(1,\sqrt{3}\right), x_{E_2}\in\left(-2,-\sqrt{3}\right)$。这里 x_{E_0},x_{E_1},x_{E_2} 代表着

每个点的横坐标。如图 1(c)所示，不难看出 E_0 是鞍点，E_1 和 E_2 是中心。同样地，当 $0 \le G \le \frac{2}{3}$ 或 $G = -\frac{2}{3}$ 时的情况也可被同样推导出来，这里不再赘述。

接下来，我们将计算未扰系统(38)的周期波解的表达式。为了方便起见，我们计算在鞍点右边的闭合周期轨道，这对应于图 1(c)中的黑色曲线。我们得到了下述定理：

定理 1：针对 $c>1$ 以及 $-\frac{2}{3}<G<0$ 的情况，方程(8)有一簇周期波解如下：

$$\phi(\xi)=(c-1)^{\frac{1}{2}}\left[\mu_2-\frac{(\mu_2-\mu_3)(\mu_4-\mu_2)}{(\mu_4-\mu_2)+(\mu_3-\mu_4)sn^2\left(\sqrt{\frac{(c-1)(\mu_4-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)}{24c}}|\xi|,\sqrt{\frac{(\mu_4-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_4-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)}}\right)}\right].$$

其中，$\xi=x+y+z-ct$，$\mu_i(i=1,2,3,4)$ 是方程 $\kappa^4-6\kappa^2-12G\kappa-\frac{12ch}{c-1}=0$ 在 $h\in(h_2,h_0)$ 上的实根，$\mu_1<\mu_2<2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}G\right)+\frac{4}{3}\pi\right)<\mu_3<\mu_4$。

注：定理 1 的证明基本类似于文献[30] (推论 6.1)，因此本文省略。

当 $-\frac{2}{3}<G<0$，系统(38)的相平面如图 1(c)所示，可以看出存在一簇周期轨道 Γ_h 围绕着中心 E_1。为了探索扰动 WBBM 系统周期轨道的存在性，参考文献[33]，我们定义 Melnikov 函数如下：

$$\begin{aligned}M(h)&=\oint_{\Gamma_h}\left(\frac{1-c}{3}\nu\kappa^2-\frac{1}{c}\nu\right)\mathrm{d}\kappa\\&=\frac{1-c}{3}I_2(h)-\frac{1}{c}I_0(h)\\&=\frac{1-c}{3}I_0(h)\left(\frac{I_2(h)}{I_0(h)}-\frac{3}{c(1-c)}\right).\end{aligned} \tag{40}$$

其中，$I_0(h)=\oint_{\Gamma_h}\nu\mathrm{d}\kappa$，$I_2(h)=\oint_{\Gamma_h}\nu\kappa^2\mathrm{d}\kappa$。周期轨道 Γ_h 关于 κ 轴对称，故有 $I_0(h)=2\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\nu\mathrm{d}\kappa>0$，$I_2(h)=2\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\nu\kappa^2\mathrm{d}\kappa>0$。这里 κ_1,κ_2 代表周期轨道和 κ 轴交点的横坐标。因为当 $c>1$ 时，有 $\frac{I_2(h)}{I_0(h)}>0$，$\frac{3}{c(1-c)}<0$，所以 $M(h)>0$，即 $M(h)$ 没有零点。这意味着受到扰动后，系统的周期轨道破裂，周期波不存在。

5. 总结

本文对具有卷积的 WBBM 方程的孤立波和周期波解的存在性问题进行了讨论。主要讨论在未扰系统存在孤立波和周期波的情况下，利用 Melnikov 方法，发现受到扰动后 WBBM 方程的孤立波和周期波是不存在的。

参考文献

[1] Benjamin, T., Bona, J. and Mahony, J. (1972) Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **272**, 47-78.

[2] Amick, C.J., Bona, J.L. and Schonbek, M.E. (1989) Decay of Solutions of Some Nonlinear Wave Equations. *Journal of*

Differential Equations, **81**, 1-49. https://doi.org/10.1016/0022-0396(89)90176-9

[3] Benjamin, T. (1974) Lectures on Nonlinear Wave Motion. *Lecture Notes in Applied Mathematics*, **15**, 3-47.

[4] Tso, T. (1996) Exixtence of Solutions of the Modified Benjamin-Bona-Mahony-Equaton. *Chinese Journal of Mathematics*, **24**, 327-336.

[5] Johnpillai, A.G., Kara, A.H. and Biswas, A. (2013) Symmetry Reduction, Exact Group-Invariant Solutions and Conservation Laws of the Benjamin-Bona-Mahoney Equation. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 376-381. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.10.012

[6] Belobo, D.B. and Das, T. (2017) Solitary and Jacobi Elliptic Wave Solutions of the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **48**, 270-277. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.01.001

[7] Omrani, K. (2006) The Convergence of Fully Discrete Galerkin Approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **180**, 614-621. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.12.046

[8] Rosenau, P. (1997) On Nonanalytic Solitary Waves Formed by a Nonlinear Dispersion. *Physics Letters A*, **230**, 305-318. https://doi.org/10.1016/s0375-9601(97)00241-7

[9] Wazwaz, A. (2005) Exact Solutions with Compact and Noncompact Structures for the One-Dimensional Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **10**, 855-867. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2004.06.002

[10] Zhao, X., Xu, W., Li, S. and Shen, J. (2006) Bifurcations of Traveling Wave Solutions for a Class of the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **175**, 1760-1774. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.019

[11] Zhao, X., Jia, H., Zhou, H. and Tang, Y. (2008) Bifurcations of Travelling Wave Solutions in a Non-Linear Dispersive Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **37**, 525-531. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.09.028

[12] Wazwaz, A. (2017) Exact Soliton and Kink Solutions for New (3 + 1)-Dimensional Nonlinear Modified Equations of Wave Propagation. *Open Engineering*, **7**, 169-174. https://doi.org/10.1515/eng-2017-0023

[13] Mamun, A.A., Ananna, S.N., Gharami, P.P., An, T. and Asaduzzaman, M. (2022) The Improved Modified Extended Tanh-Function Method to Develop the Exact Travelling Wave Solutions of a Family of 3D Fractional WBBM Equations. *Results in Physics*, **41**, Article ID: 105969. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105969

[14] Abbas, N., Bibi, F., Hussain, A., Ibrahim, T.F., Dawood, A.A., Osman Birkea, F.M., *et al*. (2024) Optimal System, Invariant Solutions and Dynamics of the Solitons for the Wazwaz Benjamin Bona Mahony Equation. *Alexandria Engineering Journal*, **91**, 429-441. https://doi.org/10.1016/j.aej.2024.02.021

[15] Shakeel, M., Attaullah, Bin Turki, N., Ali Shah, N. and Tag, S.M. (2023) Diversity of Soliton Solutions to the (3 + 1)-Dimensional Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony Equations Arising in Mathematical Physics. *Results in Physics*, **51**, Article ID: 106624. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106624

[16] Britton, N.F. (1989) Aggregation and the Competitive Exclusion Principle. *Journal of Theoretical Biology*, **136**, 57-66. https://doi.org/10.1016/s0022-5193(89)80189-4

[17] Chen, A., Guo, L. and Deng, X. (2016) Existence of Solitary Waves and Periodic Waves for a Perturbed Generalized BBM Equation. *Journal of Differential Equations*, **261**, 5324-5349. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.08.003

[18] Cheng, F. and Li, J. (2021) Geometric Singular Perturbation Analysis of Degasperis-Procesi Equation with Distributed Delay. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **41**, 967-985. https://doi.org/10.3934/dcds.2020305

[19] Qiao, Q. and Zhang, X. (2023) Traveling Waves and Their Spectral Stability in Keller-Segel System with Large Cell Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **344**, 807-845. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.11.003

[20] Shen, J. and Zhang, X. (2021) Traveling Pulses in a Coupled Fitzhugh-Nagumo Equation. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **418**, Article ID: 132848. https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132848

[21] Yan, W., Liu, Z. and Liang, Y. (2014) Existence of Solitary Waves and Periodic Waves to a Perturbed Generalized KdV Equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, **19**, 537-555. https://doi.org/10.3846/13926292.2014.960016

[22] Wen, Z. (2020) On Existence of Kink and Antikink Wave Solutions of Singularly Perturbed Gardner Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 4422-4427. https://doi.org/10.1002/mma.6204

[23] Fan, F. and Wei, M. (2024) Traveling Waves in a Quintic BBM Equation under Both Distributed Delay and Weak Backward Diffusion. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **458**, Article ID: 133995. https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133995

[24] Zhang, L., Han, M., Zhang, M. and Khalique, C.M. (2020) A New Type of Solitary Wave Solution of the mKdV Equation under Singular Perturbations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**, Article ID: 2050162. https://doi.org/10.1142/s021812742050162x

[25] Du, Z. and Li, J. (2022) Geometric Singular Perturbation Analysis to Camassa-Holm Kuramoto-Sivashinsky Equation.

Journal of Differential Equations, **306**, 418-438. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.033

[26] Zheng, H. and Xia, Y. (2023) The Solitary Wave, Kink and Anti-Kink Solutions Coexist at the Same Speed in a Perturbed Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, **56**, Article ID: 155701. https://doi.org/10.1088/1751-8121/acc2fc

[27] Zheng, H. and Xia, Y. (2024) Bifurcation of the Travelling Wave Solutions in a Perturbed (1 + 1)-Dimensional Dispersive Long Wave Equation via a Geometric Approach. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*: *Section A Mathematics*, 1-28. https://doi.org/10.1017/prm.2024.45

[28] Fenichel, N. (1979) Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **31**, 53-98. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9

[29] Li, J. (2013) Singular Nonlinear Travelling Wave Equations: Bifurcations and Exact Solutions. Science Press.

[30] Xia, Y., Xiao, H. and Zhou, X. (2025) Solitary and Periodic Waves for the Perturbed Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony Equation. Preprint.

[31] Wiggins, S. (1990) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag.

[32] Wiggins, S. (1998) Global Bifurcations and Chaos. Springer-Verlag.

[33] Liu, C. and Xiao, D. (2013) The Monotonicity of the Ratio of Two Abelian Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, **365**, 5525-5544. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2013-05934-x