Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 519-527
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154179

拓展邻冠的完美态传递

戴高乐

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2026年3月21日；录用日期：2026年4月16日；发布日期：2026年4月22日

摘 要

本文研究拓展邻冠图上的完美态传递问题。针对拓展邻冠图的构造，我们给出一个有关图参数的充分条件使得拓展邻冠图$G * H$ 上不存在完美态传递。通过具体实例，我们验证了这一条件的有效性，并展示了不存在完美态传递的图类。该结果为量子网络中基于冠图结构的节点间态传输可行性提供了理论判据。

关键词

完美态传递，邻接矩阵，拓展邻冠图

Perfect State Transfer on Extended Neighborhood Corona Graphs

Gaole Dai

College of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 21, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 22, 2026

Abstract

This paper investigates the problem of perfect state transfer on extended neighborhood

文章引用: 戴高乐. 拓展邻冠的完美态传递[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 519-527.
DOI: 10.12677/aam.2026.154179

corona graphs. For the construction of extended neighborhood corona graphs, we present a sufficient condition related to graph parameters such that there is no perfect state transfer on the extended neighborhood corona graph $G * H$. Through concrete examples, we verify the validity of this condition and demonstrate classes of graphs that do not admit perfect state transfer. This result provides a theoretical criterion for the feasibility of state transfer between nodes in quantum networks based on corona graph structures.

Keywords

Perfect State Transfer, Adjacency Matrix, Extended Neighborhood Corona Graph

1. 引言

量子通信作为量子信息科学的重要分支，其核心任务之一是实现量子态在远距离节点间的可靠传输。量子态传递在量子通信协议研究中占据核心地位，其关键在于如何确保信息在传输过程中能够完全保留或仅遭受最小损失。从图论视角出发，量子网络可以用图来刻画：图的顶点代表量子节点（如量子比特、自旋或谐振子），图的边代表节点之间的量子通道（如相互作用或光纤链路）。这种图论模型为研究量子网络的结构与动力学提供了自然的数学框架。

拓展邻冠图作为一种图构造方式，具有明确的物理背景：其顶点集可视为由主干网络节点（对应图G 的顶点）及其各自携带的局域量子模块（对应图H 的副本）构成，而边结构则描述了主干节点之间、主干与局域模块之间、以及不同局域模块之间的相互作用。这种结构在量子网络建模中具有自然对应，例如可用于描述由量子中继器连接的多个量子寄存器系统，其中G 表征中继器之间的连接拓扑，H 则刻画每个寄存器内部的耦合结构。因此，研究此类图上的完美态传递，有助于理解在分层量子网络架构中实现高保真度量子态传输的可能性。

连续时间量子游走是描述图上量子态演化的基本模型。1998年，Farhi 和Gutmann [1]首次提出使用酉矩阵来描述图上的连续时间量子游走。对于给定图G，记其邻接矩阵为A_G，则G 上的连续时间量子游走由以下酉矩阵表示：

$$U_{A_G}(t) := \exp(-\mathrm{i}tA_G),$$

其中$t \in \mathbb{R}$，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。图上的完美态传递概念由Christandl 等人 [2] 于2004年首次引入。称图G 在其两顶点u 和v 之间发生完美态传递，若存在时刻t 使得

$$\exp(-\mathrm{i}tA_G)\mathbf{e}_u = \gamma\mathbf{e}_v,$$

其中$|\gamma| = 1$，$\gamma \in \mathbb{C}$。然而，2012年Godsil [3] 指出图上完美态传递极为罕见。同年，Godsil [4] 提出了图上优态传递的概念，作为完美态传递的松弛形式。对于图G 及其两个不同顶点u 和v，若对任意$\varepsilon > 0$，存在某个时刻t 使得

$$|\exp(-\mathrm{i}tA_G)|_{uv} > 1 - \varepsilon,$$

则称G 在u 和v 之间存在优态传递。

本文旨在研究拓展邻冠图上的完美态传递问题。针对此类图的特殊构造，我们给出一个充分条件，确保在该条件下拓展邻冠图上不存在完美态传递，并通过具体实例验证该条件的有效性。这一工作有助于深入理解图的代数性质与量子信息传输之间的内在联系。

冠图操作是图论中一类重要的图构造方法，近年来被广泛应用于量子态传递的研究中。通过冠图及其各种变体，研究者可以系统地构造和分析具有特定态传递性质的图类。例如，Ackelsberg等 [5] 研究了冠图上的量子态传递，构造了支持完美态传递和优态传递的图类；Zhang 等 [6] 研究了邻冠图上的态传递，证明了在某些条件下邻冠图不存在完美态传递，并构造了避免完美态传递但存在优态传递的图族；Wang等 [7] 研究了顶点补冠图上的态传递，发现允许完美态传递的图极为罕见，但在一定谱条件下可以构造具有优态传递的图。这些研究表明，冠图操作不仅能够生成丰富的图结构，还为探索态传递的存在性与图的代数性质之间的关系提供了有效途径。此外，在拉普拉斯矩阵框架下，冠图变体上的态传递也得到了广泛研究，如边冠图 [8]、邻冠图 [9] 等，进一步丰富了量子态传递的理论。

受上述工作的启发，本文研究拓展邻冠图上的完美态传递问题。拓展邻冠图作为邻冠图的一种推广，具有更一般的构造形式，有望揭示更丰富的态传递现象。Li 等 [9] 于2021年研究了拓展邻冠图上关于拉普拉斯矩阵的完美态传递，本文则考虑拓展邻冠图上关于邻接矩阵的完美态传递。我们给出一个充分条件，确保在该条件下拓展邻冠图上不存在完美态传递，并通过具体实例验证该条件的有效性。

2. 预备知识

首先给出下文将用到的符号。记$\mathbf{J}_{m,n}$ 为所有元素均为1的$m \times n$ 矩阵；当$m = n$ 时简记为$\mathbf{J}_m$。I_n 表示n 阶单位矩阵，$\mathbf{j}_m$ 表示所有分量为1的m 维列向量。$A^\top$ 和$\|A\|$ 分别表示矩阵A 的转置和欧几里得范数。设图G 有n 个顶点，其邻接矩阵为A_G，用$\mathbf{e}_u^n$ 表示顶点u 的特征向量（标准基向量），在不致混淆时简记为$\mathbf{e}_u$。

图G 的谱Spec(G) 指A_G 的特征值的多重集，$\mathrm{Spec}_A(G)$ 表示所有互异特征值构成的集合。由谱定理，A_G 可分解为

$$A_G = \sum_{r=0}^{d} \lambda_r F_{\lambda_r},$$

其中λ_r 为特征值，F_{λ_r} 为对应λ_r 的特征投影。易知$\sum_{r=0}^{d} F_{\lambda_r} = I_n$，且$F_{\lambda_r}^2 = F_{\lambda_r}$。进而得到转移矩阵

$$U_{A_G}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k A_G^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k \left(\sum_{r=0}^{d} \lambda_r^k F_{\lambda_r}\right) t^k}{k!} = \sum_{r=0}^{d} \exp(-\mathrm{i}t\lambda_r) F_{\lambda_r}. \tag{1}$$

顶点u 的特征值支撑$\mathrm{supp}_G(u)$ 是指使得$F_\lambda \mathbf{e}_u \neq \mathbf{0}$ 的那些特征值λ 的集合。若对于G 的每个特征值λ，均有$F_\lambda \mathbf{e}_u = \pm F_\lambda \mathbf{e}_v$，则称顶点$u$ 与v 强共谱。记S^+（对应地S^-）为使$F_\lambda \mathbf{e}_u = F_\lambda \mathbf{e}_v$（对应地$F_\lambda \mathbf{e}_u = -F_\lambda \mathbf{e}_v$）的特征值集合。

定理2.1. (Coutinho [10]) 设G 是一个满足$|V(G)| \geq 2$ 的图，u, v 是G 的顶点。则G 中u 和v 之间发生完美态传递当且仅当以下条件成立：

(a) 顶点u 和v 是强共谱的，即对G 的每个特征值λ，相应的特征投影满足$F_\lambda \mathbf{e}_u = \pm F_\lambda \mathbf{e}_v$。

(b) 特征值支撑$\mathrm{supp}_G(u)$ 仅由整数或二次整数构成。具体地，对每个特征值$\lambda \in \mathrm{supp}_G(u)$，存在一个无平方因子整数$\Delta$ 以及整数a, b_λ 使得

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(a + b_\lambda \sqrt{\Delta}\right).$$

(c) 对任意特征值$\lambda \in \mathrm{supp}_G(u)$，

$$\lambda \in S^+ \iff \frac{\lambda_0 - \lambda}{g\sqrt{\Delta}} \in 2\mathbb{Z} \quad 且 \quad \lambda \in S^- \iff \frac{\lambda_0 - \lambda}{g\sqrt{\Delta}} \in 2\mathbb{Z} + 1,$$

其中λ_0 是G 的谱半径，且$g = \gcd\left(\left\{\frac{\lambda_0 - \lambda}{\sqrt{\Delta}} : \lambda \in \mathrm{supp}_G(u)\right\}\right)$。

此外，若上述条件成立，则有以下结论：

(i) 存在一个最小的正时间τ_0 使得u 和v 之间发生完美态传递，且

$$\tau_0 = \frac{\pi}{g\sqrt{\Delta}}.$$

(ii) 完美态传递发生的时间τ 是τ_0 的奇数倍，即存在某个整数$k \geq 0$ 使得$\tau = (2k+1)\tau_0$。

(iii) 完美态传递的相位为$\gamma = e^{-i\tau\lambda_0}$。

引理2.1. (Li 等 [8]) 设G 是n 个顶点上的连通r-正则图，且满足$r \geq 2$。令v 为G 的任意一个顶点。

(i) 若G 为非完全图，则特征值支撑的大小满足$|\mathrm{supp}_G(v)| \geq 3$；

(ii) 若G 为完全图，则特征值支撑的大小满足$|\mathrm{supp}_G(v)| = 2$。

3. 拓展邻冠图的完美态传递分析

3.1. 拓展邻冠图的谱分解

设G 和H 是两个图，其中$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$|V(H)| = m$。设图$G$ 有n 个顶点，其邻接

矩阵A_G 的互异特征值按递减顺序排列为

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{d_1},$$

对应的重数分别为$r_1, r_2, \ldots, r_{d_1}$。设图$H$ 有m 个顶点，其邻接矩阵A_H 的互异特征值按递减顺序排列为

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{d_2},$$

对应的重数分别为$s_1, s_2, \ldots, s_{d_2}$。图$G$ 与H 的**拓展邻冠图**，记为$G * H$，其顶点集和邻接关系定义如下：

顶点集：

$$V(G * H) = \{(v, 0) \mid v \in V(G)\} \cup \{(v_i, w) \mid v_i \in V(G),\ w \in V(H)\},$$

其中$(v, 0)$ 表示图G 的顶点v 本身，(v_i, w) 表示对应于G 的第i 个顶点v_i 的那一份H 中的顶点w。

邻接关系： 对于任意两个顶点(v_i, w) 和(v_j, u)（允许w 或u 为0），它们相邻关系如下

$$(v_i, w) \sim (v_j, u) \Longleftrightarrow \begin{cases} w = u = 0 \text{ 且} v_i \sim v_j \text{ 在} G, & \text{或} \\ i = j \text{ 且} w, u \in V(H) \text{ 且} w \sim u \text{ 在} H, & \text{或} \\ v_i \sim v_j \text{ 在} G, & \text{或} \\ v_i \sim v_j \text{ 在} G \text{ 且} w = 0,\ u \in V(H). & \end{cases}$$

特别地，当v_i 与v_j 相邻时，第i 份H 中的所有顶点与第j 份H 中的所有顶点两两相连，且第i 份H 中的所有顶点也与G 的顶点v_j 相连（对称地，第j 份H 中的所有顶点也与G 的顶点v_i 相连）。

定理3.1 (Chandrashekar等人 [11])**.** 设G 是n 个顶点的图，H 是m 个顶点的r-正则图。则拓展邻冠图$G * H$ 的邻接谱由以下两部分构成：

(a) 对于H 的每个特征值μ_i $(i = 2, 3, \ldots, m)$，μ_i 是$G * H$ 的特征值，且重数为n；

(b) 对于G 的每个特征值λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$，

$$\frac{\lambda_i(m+1) + r \pm \sqrt{(\lambda_i(m+1) + r)^2 - 4r\lambda_i}}{2}$$

是$G * H$ 的特征值。

定理3.2. 设G 是n 个顶点的图，H 是m 个顶点的r-正则连通图。则拓展邻冠图$G * H$ 的邻接矩阵的特征值及对应的特征投影如下：

(a) 对于H 的每个特征值$\mu \neq r$，数μ 是$G * H$ 的特征值,对应的特征投影为

$$F_\mu = \begin{pmatrix} I_n \otimes F_\mu(H) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathrm{Spec}(H) \setminus \{r\}$$

其中I_n 为n 阶单位矩阵。

(b) 对于G 的每个特征值λ，

$$\lambda_{\pm} = \frac{\lambda(m+1)+r \pm \sqrt{(\lambda(m+1)+r)^2 - 4r\lambda}}{2}$$

是$G*H$ 的特征值，对应的特征投影为

$$F_{\lambda_{\pm}} = \frac{1}{m + \left(\frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda}\right)^2} \begin{pmatrix} F_{\lambda}(G) \otimes J_m & \frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda} F_{\lambda}(G) \otimes j_m \\ \frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda} F_{\lambda}(G) \otimes j_m^{\top} & \frac{m^2\lambda^2}{(\lambda_{\pm}-\lambda)^2} F_{\lambda}(G) \end{pmatrix}$$

证明. 首先，对拓展邻冠图$G*H$ 的顶点进行适当标记，使其邻接矩阵具有如下分块形式 [11]：

$$A_{G*H} = \begin{pmatrix} I_n \otimes A_H + A_G \otimes \mathbf{J}_m & A_G \otimes \mathbf{j}_m \\ A_G \otimes \mathbf{j}_m^{\top} & A_G \end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{J}_m$ 为全1矩阵，$\mathbf{j}_m$ 为全1列向量。

由于H 是r-正则图，其邻接矩阵A_H 有特征值r 对应的特征向量$\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbf{j}_m$，其余特征值$\mu \neq r$ 对应的特征向量与$\mathbf{j}_m$ 正交。取H 的对应于μ 的标准化特征向量$\mathbf{y}$（满足$A_H\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ 且$\mathbf{y} \perp \mathbf{j}_m$）。对每个$i \in \{1, \ldots, n\}$，构造向量

$$\mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{e}_i$ 是$\mathbb{R}^n$ 的标准基向量。直接计算可得

$$A_{G*H}\mathbf{Y}_i = \mu\mathbf{Y}_i,$$

且这些向量彼此正交且规范。对应的特征投影为

$$F_{\mu} = \begin{pmatrix} I_n \otimes F_{\mu}(H) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathrm{Spec}(H) \setminus \{r\}$$

其中$F_{\mu}(H)$ 是H 对应于μ 的特征投影。

考虑如下形式的向量

$$\mathbf{X}_{\pm} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \otimes \mathbf{j}_m \\ \frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda}\mathbf{x} \end{pmatrix},$$

代入特征方程$A_{G*H}\mathbf{X}_{\pm} = \lambda_{\pm}\mathbf{X}_{\pm}$成立，再根据特征投影的定义可得

$$F_{\lambda_{\pm}} = \frac{1}{m + \left(\frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda}\right)^2} \begin{pmatrix} F_{\lambda}(G) \otimes J_m & \frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda} F_{\lambda}(G) \otimes j_m \\ \frac{m\lambda}{\lambda_{\pm}-\lambda} F_{\lambda}(G) \otimes j_m^{\top} & \frac{m^2\lambda^2}{(\lambda_{\pm}-\lambda)^2} F_{\lambda}(G) \end{pmatrix}$$

综上所述，定理得证。 □

3.2. 完美态传递的不存在性

引理3.1. 对任意$u \in V(G$，顶点$(u,0)$ 的特征支撑包含于顶点(u,v) 的拉普拉斯特征值支撑集，即$\mathrm{supp}(u,0) \subseteq \mathrm{supp}(u,v)$，其中$v$ 是$V(H)$ 中的任意顶点。

证明. 我们可以从定理3.2中的特征投影立刻得到。 □

定理3.3. 设G 是n 个顶点的k-正则连通整图，H 是m 个顶点的r-正则连通图。当

$$\sqrt{(k(m+1)+r)^2-4rk}$$

不为整数时，则拓展邻冠图$G*H$ 中不存在完美态传递。

证明. 我们现在利用反证法来说明特征支撑中的特征值不满足定理2.1所要求的都是整数或是二次整数的条件来否定完美态传递的发生。由引理3.1可知，我们只需要考虑$\mathrm{supp}(u,0)$的特征支撑。首先，我们考虑当$\mathrm{supp}(u,0)$中的特征值都为整数的情况，因为k 是G 的谱半径，所以一定在G 的所有点的特征支撑之中，因此$k_\pm$ 属于$\mathrm{supp}(u,0)$，那么$k_+ + k_- = \sqrt{(k(m+1)+r)^2-4rk}$ 为整数，矛盾。

现在考虑特征支撑中的值都为二次整数的情况，由引理2.1可知，在特征支撑中除了k之外，还至少存在一个特征值$\lambda \neq k$,那么$k_\pm$和$\lambda_\pm$ 都属于$\mathrm{supp}(u,0)$。注意到

$$(\lambda_+-\lambda)(\lambda_--\lambda) = -\lambda^2 m$$

不妨令λ_+为$\frac{a+b_+\sqrt{\Delta}}{2}$, 令$\lambda_-$为$\frac{a+b_-\sqrt{\Delta}}{2}$,代入上式可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+b_+\sqrt{\Delta}}{2}-\lambda\right)\left(\frac{a+b_-\sqrt{\Delta}}{2}-\lambda\right) &= \left(\frac{a}{2}-\lambda\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\lambda\right)(b_++b_-)\sqrt{\Delta}+\frac{1}{4}b_+b_-\Delta \\ &= -\lambda^2 m\end{aligned}$$

注意到$\sqrt{\Delta}$ 是无理数，而λ 为整数，所以上式想要成立则必须满足$\frac{a}{2}-\lambda=0$ 或者$b_++b_-=0$。当$\frac{a}{2}-\lambda=0$ 时，注意到$a=2\lambda$，则$|\mathrm{supp}_G(u)|=1$，矛盾。当$b_++b_-=0$ 时，可得$a=\lambda_++\lambda_-=\lambda(m+1)+r$，同理亦与$|\mathrm{supp}_G(u)|=1$ 矛盾。故证毕，不存在完美态传递。 □

例3.1. 令G 为3 圈C_3，为整图，此时$n=3$，$k=2$。令H 为两个点的完全图K_2，此时$m=2$，$r=1$。经计算可得

$$\sqrt{(k(m+1)+r)^2-4rk}=\sqrt{41},$$

不为整数，于是在C_3 与K_2 的邻冠图里不存在完美态传递。

4. 结论

本文研究了拓展邻冠图上的完美态传递问题，针对此类图的特殊构造，给出了一个确保完美态传递不发生的充分条件，即当基图G 为k-正则连通整图且$\sqrt{(k(m+1)+r)^2-4rk}$ 不为整数时，拓展邻冠图$G*H$ 中不存在完美态传递。该条件具有明确的代数形式，便于在实际构造中验证。通过具体实例验证了该条件的有效性，相关工作为理解冠图类结构上量子态传递的代数约束提供了新的视角。本文的主要局限性在于所给条件仅为充分而非必要，且研究仅聚焦于完美态传递的不存在性。未来工作可进一步探索：1）放宽对基图的正则性及整性要求，探讨更一般情形下完美态传递的存在性；2）在本文充分条件不成立的情形下，研究拓展邻冠图上是否存在优态传递，以弥补完美态传递缺失时的量子通信能力；3）结合具体物理系统（如自旋链、光量子网络）的参数约束，探讨本文图构造在实际系统中的可实现性。

参考文献

[1] Farhi, E. and Gutmann, S. (1998) Quantum Computation and Decision Trees. *Physical Review A*, **58**, 915-928. https://doi.org/10.1103/physreva.58.915

[2] Christandl, M., Datta, N., Ekert, A. and Landahl, A.J. (2004) Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks. *Physical Review Letters*, **92**, Article 187902. https://doi.org/10.1103/physrevlett.92.187902

[3] Godsil, C. (2012) When Can Perfect State Transfer Occur? *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **23**, 877-890. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1563

[4] Godsil, C. (2012) State Transfer on Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 129-147. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.06.032

[5] Ackelsberg, E., Brehm, Z., Chan, A., Mundinger, J. and Tamon, C. (2017) Quantum State Transfer in Coronas. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **24**, P2.24. https://doi.org/10.37236/6145

[6] Zhang, X., Xiong, Q., Tian, G. and Cui, S. (2023) Quantum State Transfer on Neighborhood Corona of Two Graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **46**, Article No. 11. https://doi.org/10.1007/s40840-022-01395-w

[7] Wang, J. and Liu, X. (2022) State Transfers in Vertex Complemented Coronas. *Discrete Applied Mathematics*, **321**, 165-178. https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.06.036

[8] Li, Y., Liu, X. and Zhang, S. (2020) Laplacian State Transfer in Edge Coronas. *Linear and Multilinear Algebra*, **70**, 1023-1046. https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1751034

[9] Li, Y.P., Liu, X.G. and Zhang, S.G. (2021) Laplacian Perfect State Transfer in Extended Neighborhood Coronas. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **37**, 1921-1932. https://doi.org/10.1007/s10114-021-0582-4

[10] Coutinho, G. (2014) Quantum State Transfer in Graphs. PhD Thesis, University of Waterloo.

[11] Adiga, C., Rakshith, B.R. and Krishna, K.N.S. (2016) Spectra of the Extended Neighborhood Corona and Extended Corona of Two Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, **4**, 101-110. https://doi.org/10.5614/ejgta.2016.4.1.9