Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 585-595
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154185

三维KP-II-Burgers方程的全局适定性研究

刘砾泽

华北电力大学数理学院，北京

收稿日期：2026年3月21日；录用日期：2026年4月16日；发布日期：2026年4月22日

摘 要

本文研究三维Kadomtsev-Petviashvili-II-Burgers（KP-II-Burgers）方程的全局适定性与长时间行为。该方程描述了等离子体中尘埃声波以及浅水波在同时存在耗散、色散和非线性效应时的演化过程，其显著特点是耗散仅沿x 方向作用，而y 与z 方向仅由非局部色散项耦合，导致系统具有各向异性结构。本文的结果将二维KP-II-Burgers方程的相关结论推广至三维情形，进行了新的各向异性估计，并为后续研究解的渐近行为、散射理论以及含外力扰动下的动力学行为提供了理论基础。

关键词

KP-II-Burgers 方程，线性算子半群，先验估计，耗散-色散

Research on Global Well-Posedness of 3D KP-II-Burgers Equation

Lize Liu

School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing

Received: March 21, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 22, 2026

文章引用: 刘砾泽. 三维KP-II-Burgers方程的全局适定性研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 585-595.
DOI: 10.12677/aam.2026.154185

Abstract

In this paper we research the global well-posedness and long-time behavior of the three-dimensional Kadomtsev-Petviashvili-II-Burgers (KP-II-Burgers) equation. This equation describes the evolution of dust acoustic waves in plasma and shallow water waves in the presence of simultaneous dissipation, dispersion, and nonlinear effects. Its distinctive feature is that dissipation acts only in the x-direction, while the y and z directions are coupled solely by nonlocal dispersive terms, resulting in an anisotropic structure. The results of this paper extend relevant conclusions from the two-dimensional KP-II-Burgers equation to the three-dimensional case, perform new anisotropic estimates, and provide a theoretical foundation for subsequent studies on the asymptotic behavior of solutions, scattering theory, and dynamical behavior under external forcing perturbations.

Keywords

KP-II-Burgers Equation, Linear Operator Semigroup, A-Priori Estimates, Dissipation-Dispersion

1. 研究背景与意义

三维Kadomtsev-Petviashvili-II-Burgers (KP-II-Burgers) 方程是一类重要的非线性发展方程，其一般形式可写为

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} + u_{xxx} + \varepsilon\partial_x^{-1}(u_{yy} + u_{zz}) = uu_x, \quad t > 0, \\
&u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中∂_x^{-1}表示x的负导数。$u(x, y, z, t)$为实值未知函数，$u_0(x, y, z)$ 是给定的初值函数，$\varepsilon = \pm 1$决定色散项的正定或负定，当$\varepsilon = 1$ 时方程(1) 为II型KP-Burgers 方程。方程(1)源于对等离子体中尘埃声波、浅水波等物理现象的建模，它同时包含了非线性对流效应(uu_x)，耗散效应($-u_{xx}$)与二维色散效应($\partial_x^{-1}(u_{yy} + u_{zz})$)。相比于经典KP方程(仅含色散项)和Burger 方程(仅含耗散)，

KP-Burgers方程同时体现了色散、耗散与非线性的竞争机制,具有更加丰富的长时间行为。方程中的算子∂_x^{-1}为一维反导数，在频率空间中对应乘子$\frac{1}{i\xi_1}$，其在$\xi_1=0$处具有奇性。为使该算子具有良好定义，通常要求未知函数u 在x 方向上具有零均值，即满足

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,y,z,t)dx = 0, \quad \forall (y,z)\in\mathbb{R}^2, t\geq 0. \tag{2}$$

这一条件在物理上对应于系统的质量守恒或电荷守恒，在数学上则是确保反导数算子∂_x^{-1}在分布意义下良定的自然前提。对于KP-II-Burgers 方程的初值问题，若初值u_0 本身不满足零均值条件，可通过引入新变量$v=\partial_x^{-1}u$将其转化为满足零均值的函数，此时v 满足的方程中不再显含反导数，且初值$v_0=\partial_x^{-1}u_0$ 直接属于适当的函数空间。这一处理在KP 型方程的研究中是标准技巧，详见文献 [1]- [3]。特别地，对于KP-II-Burgers 方程在等离子体物理中的建模，零均值条件对应于扰动密度的空间平均为零，与等离子体中声波扰动的物理背景一致 [4] [5]。

在二维情况下，Molinet 于 [1]中证明了二维KPB方程的解u 满足

$$t^{\frac{i}{2}+\frac{3}{4}}\|\partial^{(i,j)}u\|_{L^2}\leq C_1, \qquad t^{\frac{i}{2}+\frac{1}{4}}\|\partial^{(i,j)}\partial_x^{-1}u\|_{L^2}\leq C_2. \tag{3}$$

$$t^{\frac{i}{2}+\frac{3}{2}}\|\partial^{(i,j)}u\|_{L^\infty}\leq C_3, \qquad t^{\frac{i}{2}+1}\|\partial^{(i,j)}\partial_x^{-1}u\|_{L^\infty}\leq C_4. \tag{4}$$

其中$\|\partial_x^{-1}u\|_{L^\infty}$ 的衰减正好为t^{-1}, 对于某些带有$\partial_x^{-1}u$线性余项的方程而言(如 [6]中利用KP-II-Burgers方程逼近NSP 系统时，$n_j^{(k)}$满足的KPB方程都会耦合一个仅与$(n_j^{(1)},\cdots,n_j^{(k-1)})$ 有关的余项，且其中含有线性项)，如果其半群$L^2\to L^\infty$估计没有衰减结果，则此项在Duhamel积分与能量积分中会出现lnt的增长，这本质上是因为二维情况下，方程的衰减由y 方向的色散效应与x方向的耗散效应产生。前者产生$t^{-\frac{3}{4}}$ 的衰减，即使与后者产生的$t^{-\frac{1}{4}}$衰减结合也恰好是t^{-1}。因此，我们需要在三维空间中对$u,v=\partial_x^{-1}u$的衰减结果进行改进，使其能产生比t^{-1} 更好的衰减。三维空间中其y,z方向的色散与x方向的耗散耦合更为复杂，并且由于非线性项的存在，采用传统的$L^\infty\to L^1$估计其非线性项利用Holder 不等式拆为两个L^2 范数的乘积会导致衰减不够，因此本文利用各向异性$L_y^\infty L_z^\infty L_x^2$估计来完成先验估计的闭环。其余类似的色散- 耗散方程的研究结果可参考 [7]- [11]。

2. 线性算子半群估计

三维KP-II-Burgers方程的形式为

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} + u_{xxx} + \partial_x^{-1}(u_{yy}+u_{zz}) = uu_x, \quad t>0,\\ &u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{5}$$

对(5)两端同时做傅里叶变换，得到

$$\widehat{u_t} + \left(\xi_1^2 - i\xi_1^3 + i\frac{\xi_2^2+\xi_3^2}{\xi_1}\right)\widehat{u} = \widehat{uu_x}, \tag{6}$$

即

$$\widehat{u} = e^{-\xi_1^2 t + i\left[\xi_1^3 - \frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\widehat{u_0} + \int_0^t e^{-\xi_1^2(t-\tau)+i\left[\xi_1^3 - i\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right](t-\tau)}\widehat{uu_x(\tau)}d\tau. \tag{7}$$

记$K(t)=\mathcal{F}^{-1}e^{-\xi_1^2 t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\mathcal{F}$, 则方程可以表示为

$$u=K(t)u_0+\int_0^t K(t-\tau)(uu_x)(\tau)d\tau. \tag{8}$$

对于线性算子半群$K(t)$，我们有以下估计：

引理2.1 (L^2估计)**.** 对线性算子半群K，$k\geq 0$，若$f\in L_y^2L_z^2L_x^1$,则存在不依赖于时间的常数C满足

$$\left\|\partial_x^k K(t)f\right\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|f\|_{L_y^2L_z^2L_x^1} \tag{9}$$

其中各向异性范数$\|f\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}$的定义为

$$\|f\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}=\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}}|f(x,y,z)|\,dx\right]^2dydz\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

证明. 由傅里叶变换的定义可知

$$|\widehat{f}|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx\right|\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\right|dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx=\|f\|_{L^1}. \tag{11}$$

故根据Young不等式、Plancherel恒等式与(11)，有

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^k K(t)f\right\|_{L^2}^2&=\left\|\mathcal{F}^{-1}|\xi_1|^k e^{-\xi_1^2 t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\mathcal{F}f\right\|_{L^2}^2=\left\||\xi_1|^k e^{-\xi_1^2 t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\widehat{f}\right\|_{L^2}^2\\&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_1|^{2k}e^{-2\xi_1^2 t}\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|^2d\xi_2d\xi_3d\xi_1\\&=C\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_1|^{2k}e^{-2\xi_1^2 t}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathcal{F}_xf(\xi_1,y,z)\right|^2dydzd\xi_1\\&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_1|^{2k}e^{-2\xi_1^2 t}\int_{\mathbb{R}^2}\|f(x,y,z)\|_{L_x^1}^2\,dydzd\xi_1\\&=C\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_1|^{2k}e^{-2\xi_1^2 t}d\xi_1\|f\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}^2\end{aligned} \tag{12}$$

利用偶函数性质，令$u=\xi_1^2$，则积分化为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_1|^{2k}e^{-2\xi_1^2 t}d\xi_1=2\int_0^{\infty}\xi_1^{2k}e^{-2\xi_1^2 t}d\xi_1=\int_0^{\infty}u^{k-\frac{1}{2}}e^{-2ut}du=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)(2t)^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}. \tag{13}$$

因此我们有

$$\left\|\partial_x^k K(t)f\right\|_{L^2}\leq Ct^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|f\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}. \tag{14}$$

□

引理2.2 (各向异性估计)**.** 对线性算子半群K, $k\geq 0$，若$f\in L_y^1L_z^1L_x^1$，则存在不依赖于时间的常数C 满足

$$\|\partial_x^k K(t)f\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}\leq Ct^{-\frac{7}{4}-\frac{k}{2}}\|f\|_{L_y^1L_z^1L_x^1}. \tag{15}$$

证明.

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}^{-1}e^{-\xi_1^2t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\right| &= C\left|\iiint_{\mathbb{R}^3}e^{i(x\xi_1+y\xi_2+z\xi_3)}e^{-\xi_1^2t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}d\xi_1d\xi_2d\xi_3\right| \\ &= C\left|\int_{-\infty}^{0}e^{ix\xi_1}e^{-\xi_1^2t+i\xi_1^3t}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(y\xi_2-\frac{t}{\xi_1}\xi_2^2\right)}d\xi_2\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(z\xi_3-\frac{t}{\xi_1}\xi_3^2\right)}d\xi_3\right]d\xi_1\right. \\ &\quad \left.+\int_{0}^{+\infty}e^{ix\xi_1}e^{-\xi_1^2t+i\xi_1^3t}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(y\xi_2-\frac{t}{\xi_1}\xi_2^2\right)}d\xi_2\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(z\xi_3-\frac{t}{\xi_1}\xi_3^2\right)}d\xi_3\right]d\xi_1\right|\end{aligned} \tag{16}$$

对$\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(y\xi_2-\frac{t}{\xi_1}\xi_2^2\right)}d\xi_2$, 根据高斯- 菲涅尔积分我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\left(y\xi_2-\frac{t}{\xi_1}\xi_2^2\right)}d\xi_2=e^{i\frac{\xi_1y^2}{4t}}\sqrt{\left|\frac{\pi\xi_1}{t}\right|}e^{-sgn\left(\frac{t}{\xi_1}\right)\frac{i\pi}{4}}=\begin{cases}e^{i\frac{\xi_1y^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi\xi_1}{t}}e^{-\frac{i\pi}{4}} & \xi_1>0\\ e^{i\frac{\xi_1y^2}{4t}}\sqrt{\frac{-\pi\xi_1}{t}}e^{\frac{i\pi}{4}} & \xi_1<0\end{cases}. \tag{17}$$

对$\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(z\xi_3-\frac{t}{\xi_1}\xi_3^2\right)}d\xi_3$ 做同样的处理，我们将结果代入(16), 得到

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}^{-1}e^{-\xi_1^2t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\right| &= \pi t^{-1}\left|\int_{-\infty}^{0}-\xi_1e^{ix\xi_1}e^{-\xi_1^2t+i\xi_1^3t}e^{i\frac{\xi_1\left(y^2+z^2\right)}{4t}}e^{\frac{i\pi}{2}}d\xi_1\right. \\ &\quad \left.+\int_{0}^{+\infty}\xi_1e^{ix\xi_1}e^{-\xi_1^2t+i\xi_1^3t}e^{i\frac{\xi_1\left(y^2+z^2\right)}{4t}}e^{-\frac{i\pi}{2}}d\xi_1\right|.\end{aligned} \tag{18}$$

根据卷积Young不等式,

$$\begin{aligned}\|K(t)f\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} &\le \left\|\mathcal{F}^{-1}e^{-\xi_1^2t+i\left[\xi_1^3-\frac{\left(\xi_2^2+\xi_3^2\right)}{\xi_1}\right]t}\right\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}\|f\|_{L_y^1L_z^1L_x^1} \\ &= t^{-1}\sup_{y,z}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}sgn(\xi_1)\xi_1e^{-\xi_1^2t+i\xi_1^3t+i\xi_1\left(x+\frac{y^2+z^2}{4t}\right)}d\xi_1\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_y^1L_z^1L_x^1}.\end{aligned} \tag{19}$$

令$x'=\frac{\left(x+\frac{y^2+z^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}}$和$\eta=\xi_1\sqrt{t}$, 得到

$$\begin{aligned}&t^{-1}\sup_{y,z}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}sgn(\xi_1)\xi_1e^{-\xi_1^2t+i\xi_1^3t+i\xi_1\left(x+\frac{y^2+z^2}{4t}\right)}d\xi_1\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{-1}\sup_{x'\ge\frac{x}{\sqrt{t}}}\left(\int_{\mathbb{R}}t^{\frac{1}{2}}\left|t^{-1}\int_{\mathbb{R}}sgn(\eta)\eta e^{\left[-\eta^2+i\left(\frac{\eta^3}{\sqrt{t}}+\eta x'\right)\right]}d\eta\right|^2dx'\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{-\frac{7}{4}}\sup_{x'\ge\frac{x}{\sqrt{t}}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}sgn(\eta)\eta e^{\left[-\eta^2+i\left(\frac{\eta^3}{\sqrt{t}}+\eta x'\right)\right]}d\eta\right|^2dx'\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= Ct^{-\frac{7}{4}}\sup_{x'\ge\frac{x}{\sqrt{t}}}\left\|\mathcal{F}_\eta\left(sgn(\eta)\eta e^{\left[-\eta^2+i\left(\frac{\eta^3}{\sqrt{t}}\right)\right]}\right)(x')\right\|_{L_{x'}^2} \\ &= Ct^{-\frac{7}{4}}\sup_{x'\ge\frac{x}{\sqrt{t}}}\left\|sgn(\eta)\eta e^{\left[-\eta^2+i\left(\frac{\eta^3}{\sqrt{t}}\right)\right]}\right\|_{L_\eta^2}.\end{aligned} \tag{20}$$

而
$$\left\|sgn(\eta)\eta e^{\left[-\eta^2+i\left(\frac{\eta^3}{\sqrt{t}}\right)\right]}\right\|_{L^2_\eta}\le\left\|\eta e^{-\eta^2}\right\|_{L^2_\eta}=\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}}\tag{21}$$
对任意$t>0$都是有界的。最终我们得到
$$\|K(t)f\|_{L^\infty_y L^\infty_z L^2_x}\le Ct^{-\frac{7}{4}}\|f\|_{L^1_y L^1_z L^1_x}.\tag{22}$$
类似的，对于x方向的k阶导数$(k\ge 0)$，我们有
$$\|\partial_x^k K(t)f\|_{L^\infty_y L^\infty_z L^2_x}\le Ct^{-\frac{7}{4}-\frac{k}{2}}\|f\|_{L^1_y L^1_z L^1_x}.\tag{23}$$

□

由于在$t=0$时，$K(t)$保持有界，为了衰减的一致性，我们将衰减结论中的t修改为$1+t$，使得其在t 小时保证有界性，t大时保证衰减性。

3. KP-II-Burgers方程全局解估计

3.1. 方程(5)的全局解

在完成引理2.1和2.2后，我们能对方程(5)进行全局解估计。由于推论2.1 的衰减较差，我们将$\partial_x^{-1}u_0$作为方程的新初值,即：
$$\begin{aligned}&u_t-u_{xx}+u_{xxx}+\partial_x^{-1}\left(u_{yy}+u_{zz}\right)=uu_x,\quad t>0,\\&\partial_x^{-1}u(x,y,z,0)=\partial_x^{-1}u_0(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.\end{aligned}\tag{24}$$

定理3.1 (KP-II-Burgers方程的全局解). 假设初值$\partial_x^{-1}u_0^{(1)}\in L^2_yL^2_zL^1_x(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)$ 并且$\delta_u=:\|\partial_x^{-1}u_0\|_{L^2_yL^2_zL^1_x(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)}$足够小，那么对任意$t>0$，存在关于方程(24) 的唯一全局解满足
$$u\in C^0\left(\mathbb{R}_+,L^\infty_yL^\infty_zL^2_x(\mathbb{R}^3)\cap H^1_x(\mathbb{R}^3)\right)\tag{25}$$

并且对$k=0,1$，有
$$\left\|\partial_x^k u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\left\|\partial_x^{-1}u_0\right\|_{L^2_yL^2_zL^1_x(\mathbb{R}^3)}.\tag{26}$$

此外，
$$\|u(t)\|_{L^\infty_yL^\infty_zL^2_x(\mathbb{R}^3)}\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}}\left\|\partial_x^{-1}u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.\tag{27}$$

首先，我们定义(24)的解空间:
$$\begin{aligned}&\Lambda_u:=\Lambda_{u1}+\Lambda_{u2},\\&\Lambda_{u1}=\sup_{0\le s\le\infty,k=0,1.}\left\{\left\|\partial_x^k u(s)\right\|_{L^2}(1+s)^{\frac{3}{4}+\frac{k}{2}}\right\},\\&\Lambda_{u2}=\sup_{0\le s\le\infty}\left\{\|u\|_{L^\infty_yL^\infty_zL^2_x}(1+s)^{\frac{7}{4}}\right\}.\end{aligned}\tag{28}$$

我们将证明对任意$t \geq 0$ 有

$$\Lambda_u \leq C\delta_u, \tag{29}$$

其中$C > 0$为不依赖于时间的常数，δ_u 定义于定理3.1 中.

证明. 考虑

$$\mathcal{L}(u) = K(t)u_0 + \int_0^t K(t-\tau)(uu_x)(\tau)d\tau. \tag{30}$$

证明将分为以下几步:

步骤1: L^2估计.

利用推论2.1和2.2直接进行计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(u)\|_{L^2} &\leq C\|K(t)u_0\|_{L^2} + C\int_0^t \|K(t-\tau)uu_x(\tau)\|_{L^2}d\tau \\
&\leq C\left\|\partial_x K(t)\partial_x^{-1}u_0\right\|_{L_y^2L_z^2L_x^1} + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\|(u)^2(\tau)\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\left\|\partial_x^{-1}u_0\right\|_{L_y^2L_z^2L_x^1} + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\|u\|_{L^2}\|u\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta_u + C\Lambda_{u1}\Lambda_{u2}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(1+\tau)^{-\frac{5}{2}}d\tau \\
&\quad + C\Lambda_{u1}\Lambda_{u2}\int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(1+\tau)^{-\frac{5}{2}}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta_u + C\Lambda_{u1}\Lambda_{u2}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+\frac{t}{2})^{-\frac{3}{4}}(1+\tau)^{-\frac{5}{2}}d\tau \\
&\quad + C\Lambda_{u1}\Lambda_{u2}\int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(1+\frac{t}{2})^{-\frac{5}{2}}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta_u + C\Lambda_{u1}\Lambda_{u2}(1+t)^{-\frac{3}{4}}.
\end{aligned} \tag{31}$$

而对x求导，类似地我们有

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\mathcal{L}(u)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{5}{4}}\left\|\partial_x^{-1}u_0\right\|_{L_y^2L_z^2L_x^1} + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{5}{4}}\|(u)^2(\tau)\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{5}{4}}\delta_u + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{5}{4}}\|u\|_{L^2}\|u\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{5}{4}}\delta_u + C\Lambda_{u1}\Lambda_{u2}(1+t)^{-\frac{5}{4}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

步骤2: $L_y^\infty L_z^\infty L_x^2$估计.

同样的，对$\mathcal{L}(u)$做$L_y^\infty L_z^\infty L_x^2$估计,得到

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(u)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} &\leq C\|K(t)u_0\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} + C\int_0^t \|K(t-\tau)uu_x(\tau)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{9}{4}}\left\|\partial_x^{-1}u_0\right\|_{L^1} + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{7}{4}}\|uu_x(\tau)\|_{L^1}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{9}{4}}\delta_u + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{7}{4}}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{9}{4}}\delta_u + C\Lambda_{u1}^2\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{7}{4}}(1+\tau)^{-2}d\tau \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{9}{4}}\delta_u + C\Lambda_{u1}^2(1+t)^{-\frac{7}{4}}.
\end{aligned} \tag{33}$$

由此，我们利用$\|\mathcal{L}(u)\|_{L^2}$, $\|\partial_x\mathcal{L}(u)\|_{L^2}$ 与$\|\mathcal{L}(u)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}$ 闭合了先验估计。 □

3.2. 衍生KPB方程的全局解

既然初值u_0对x积分得到了新的初值$\partial_x^{-1}u_0$，那么同样的，u 对x积分产生的$\partial_x^{-1}u$满足一个新的KPB方程。记$v=\partial_x^{-1}u$，则v满足新的KPB方程

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} + v_{xxx} + \partial_x^{-1}(v_{yy}+v_{zz}) &= v_x^2, \quad t>0, \\ v(x,y,z,0) &= v_0(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{34}$$

注意到(34)的线性算子半群仍然是$K(t)$，与(24)的区别主要在非线性项v_x^2 不能直接提取出对x的偏导。对此，我们有如下结论

定理3.2. 假设初值$v_0\in L_y^2L_z^2L_x^1(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)$ 并且$\delta_v =: \|v_0\|_{L_y^2L_z^2L_x^1(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)}$ 足够小，那么对任意$t>0$，存在关于方程(34) 的唯一全局解满足

$$v\in C^0\left(\mathbb{R}_+, L_y^\infty L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)\cap H_x^2(\mathbb{R}^3)\right), \quad \partial_x v\in C^0\left(\mathbb{R}_+, L_y^\infty L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)\right) \tag{35}$$

并且对$k=0,1,2$，有

$$\left\|\partial_x^k v(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-\frac14-\frac{k}{2}}\|v_0\|_{L_y^2L_z^2L_x^1(\mathbb{R}^3)}. \tag{36}$$

此外，

$$\|v(t)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-\frac32}\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \tag{37}$$

且

$$\|\partial_x v(t)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-\frac74}\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \tag{38}$$

首先，我们定义(34)的解空间:

$$\begin{aligned} &\Lambda_v := \Lambda_{v1}+\Lambda_{v2}, \\ &\Lambda_{v1} = \sup_{0\le s\le\infty, k=0,1,2.}\left\{\left\|\partial_x^k u(s)\right\|_{L^2}(1+s)^{\frac34+\frac{k}{2}}\right\}, \\ &\Lambda_{v2} = \sup_{0\le s\le\infty}\left\{\|u\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}(1+s)^{\frac32} + \|\partial_x u\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}(1+s)^{\frac74}\right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

我们将证明对任意$t\ge 0$ 有

$$\Lambda_v \le C\delta_v, \tag{40}$$

其中$C>0$为不依赖于时间的常数，δ_v 定义于定理3.2 中.

证明. 考虑

$$\mathcal{L}(v) = K(t)v_0 + \int_0^t K(t-\tau)(v_x^2)(\tau)d\tau. \tag{41}$$

<u>步骤1: L^2估计</u>.

利用推论2.1和2.2直接进行计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(v)\|_{L^2} &\le C\|K(t)v_0\|_{L^2}+C\int_0^t \left\|K(t-\tau)v_x^2(\tau)\right\|_{L^2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac14}\|v_0\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac14}\|v_x^2(\tau)\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac14}\delta_v+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac14}\|v_x\|_{L^2}\|v_x\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac14}\delta_v+C\Lambda_{v1}\Lambda_{v2}\int_0^t(1+\frac{t}{2})^{-\frac14}(1+\tau)^{-\frac52}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac14}\delta_v+C\Lambda_{v1}\Lambda_{v2}(1+t)^{-\frac14}.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

考虑关于x的各阶导数，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac34}\|v_0\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac34}\|v_x^2(\tau)\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac34}\delta_v+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac34}\|v_x\|_{L^2}\|v_x\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac34}\delta_u+C\Lambda_{v1}\Lambda_{v2}(1+t)^{-\frac34}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x^2\mathcal{L}(v)\right\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac54}\|v_0\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac54}\|v_x^2(\tau)\|_{L_y^2L_z^2L_x^1}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac54}\delta_u+C\Lambda_{v1}\Lambda_{v2}(1+t)^{-\frac54}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

<u>步骤2: $L_y^\infty L_z^\infty L_x^2$估计</u>.

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(v)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} &\le C\|K(t)v_0\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}+C\int_0^t\left\|K(t-\tau)v_x^2(\tau)\right\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac74}\|v_0\|_{L^1}+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac74}\|v_x^2(\tau)\|_{L^1}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac74}\delta_v+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac74}\|v_x\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac74}\delta_v+C\Lambda_{v1}^2\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac74}(1+\tau)^{-\frac32}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac74}\delta_v+C\Lambda_{v1}^2(1+t)^{-\frac32}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

对x求导，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x\mathcal{L}(v)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} &\le C(1+t)^{-\frac94}\|v_0\|_{L^1}+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac74}\|v_xv_{xx}(\tau)\|_{L^1}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac94}\delta_v+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac74}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac94}\delta_v+C\Lambda_{v1}^2\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac74}(1+\tau)^{-2}d\tau \\
&\le C(1+t)^{-\frac94}\delta_v+C\Lambda_{v1}^2(1+t)^{-\frac74}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

由此，我们利用$\|\partial_x^k \mathcal{L}(v)\|_{L^2} \quad (k=0,1,2)$ 与$\|\partial_x^l \mathcal{L}(u)\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} \quad (l=0,1)$ 闭合了先验估计。 $\square$

4. 结论与展望

结合上述精妙的各向异性衰减估计，我们得到了两类三维KP-II-B方程u和v的L^2 与各向异性估计。在处理带有KPB 方程解的线性余项的小初值有界方程，如

$$f_t + Lf = N(f,f) + u + v \tag{47}$$

时，即使线性算子半群e^{-Lt}仅有$L^2 \to L^\infty$的无衰减有界估计，我们可转而进行$L^2 \to L_y^\infty L_z^\infty L_x^2$的有界估计(即相当于仅在y,z 两个方向做$L^2 \to L^\infty$ 估计，有界性可以保证)，并根据$\|u\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} \le C(1+t)^{-\frac{7}{4}}$ 与$\|v\|_{L_y^\infty L_z^\infty L_x^2} \le C(1+t)^{-\frac{3}{2}}$ 来保证在Duhamel 积分中，余项$u+v$在全局情况下即使对时间t积分，这一项仍有界或产生衰减。当时间$t \to +\infty$ 时，方程(47)可逼近为不带余项的方程

$$f_t + Lf = N(f,f). \tag{48}$$

这一类使余项产生足够快的衰减从而在大时间逼近某一方程的思想是偏微分方程研究中的常见思想。而研究这一类色散- 耗散型方程的各向异性思想可进行推广，如对dispersionless KP-II-Burgers 方程

$$u_t - u_{xx} + \partial_x^{-1}(u_{yy} + u_{zz}) = uu_x, \tag{49}$$

的研究和各向异性加权范数

$$\|u\|_{L_y^2 L_z^2 L_x^1} \le \|\langle x\rangle u\|_{L^2} \tag{50}$$

的研究。

参考文献

[1] Molinet, L. (1999) On the Asymptotic Behavior of Solutions to the (Generalized) Kadomtsev-Petviashvili-Burgers Equations. *Journal of Differential Equations*, **152**, 30-74. https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3522

[2] Molinet, L., Saut, J.C. and Tzvetkov, N. (2006) Remarks on the Mass Constraint for KP Type Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **39**, 627-641. https://doi.org/10.1137/060654256

[3] Saut, J. (1993) Remarks on the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **42**, 1011-1026. https://doi.org/10.1512/iumj.1993.42.42047

[4] Infeld, E. and Rowlands, G. (2000) Nonlinear Waves, Solitons and Chaos. 2nd Edition, Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139171281

[5] Cosme, P. and Terças, H. (2024) Nonlinear Density Waves on Graphene Electron Fluids. arXiv:2106.14225

[6] Dev, A.N., Sarma, J., Deka, M.K., Misra, A.P. and Adhikary, N.C. (2014) Kadomtsev—Petviashvili (KP) Burgers Equation in Dusty Negative Ion Plasmas: Evolution of Dust-Ion Acoustic Shocks. *Communications in Theoretical Physics*, **62**, 875-880. https://doi.org/10.1088/0253-6102/62/6/16

[7] Guo, B., Han, L. and Gan, Z. (2012) Cauchy Problem for the Zakharov System Arising from Ion-Acoustic Modes with Low Regularity Data. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **2**, 11-28. https://doi.org/10.11948/2012002

[8] Chen, M., Guo, B. and Han, L. (2021) Uniform Local Well-Posedness and Inviscid Limit for the Benjamin-Ono-Burgers Equation. *Science China Mathematics*, **65**, 1553-1576. https://doi.org/10.1007/s11425-020-1807-4

[9] Guo, Y., Han, L. and Zhang, J. (2016) Absence of Shocks for One Dimensional Euler-Poisson System. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **223**, 1057-1121. https://doi.org/10.1007/s00205-016-1053-4

[10] Huo, Z. (2024) Well-Posedness of the Kadomtsev-Petviashvili-II in the Negative Sobolev Space with Respect to Y Direction. *The Journal of Geometric Analysis*, **34**, Article No. 84. https://doi.org/10.1007/s12220-023-01533-1

[11] Pu, X. (2013) Dispersive Limit of the Euler–Poisson System in Higher Dimensions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 834-878. https://doi.org/10.1137/120875648