Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(4), 413-420
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.154169

围长为7 的平面图平方图的子色数

张振宇

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期：2026年3月8日；录用日期：2026年4月2日；发布日期：2026年4月10日

摘 要

对于图G, 若被染为同一颜色的顶点所诱导的子图均为若干团的不交并, 则称该染色为子染色, 最少所需颜色数称为子色数. 图G 的平方图以V(G) 为顶点集, 以原图中距离至多为2 的顶点对为边集.本文证明了：对于围长为7 的平面图G, 其平方图的子色数不大于41.证明利用增加边不减小半弱染色数这一性质, 将原图补充为三角剖分图并构造约化, 再结合围长条件估计各等距路径上的半弱可达顶点数, 最终得到到所求上界。

关键词

子色数，平面图，平方图，围长，半弱染色数

Subchromatic Number of the Square of Planar Graphs with Girth at Least 7

Zhenyu Zhang

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

文章引用: 张振宇. 围长为7 的平面图平方图的子色数[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 413-420.
DOI: 10.12677/aam.2026.154169

Abstract

For a graph G, if the subgraph induced by each color class consists of a disjoint union of cliques, the coloring is called a subcoloring, and the minimum number of colors required is called the subchromatic number. The square of a graph G has vertex set V(G), with two vertices adjacent if and only if their distance in G is at most 2. In this paper, we prove that for every planar graph G of girth at least 7, the subchromatic number of its square is at most 41. The proof exploits the fact that adding edges does not decrease the semi-weak chromatic number. We augment the original graph to a triangulation and construct a reducible configuration argument. Combined with the girth condition, we estimate the number of semi-weakly reachable vertices along isometric paths, thereby establishing the desired upper bound.

Keywords

Subchromatic Number, Planar Graph, Square Graph, Girth, Semi-Weak Colouring Number

1. 介绍

给定一个图G, 若函数$f : V(G) \to \{0, 1, \cdots, k-1\}$ 满足$f(v) = i$ 的顶点所诱导的子图是若干团的不交并, 则称f 为G 的一个k-子染色. 图G 的子色数$\chi_{\text{sub}}(G)$ 是G 存在k-子染色的最小整数k, 这一概念首次在文献 [1] 中被提及.

近些年来, 学者们开始关注幂图的子染色问题. 对于一个图G 和正整数d, 图G 的d 次幂图G^d 定义为: 顶点集$V(G^d) := V(G)$; 若图G 中存在长度至多为d 的u-v 路, 则在G^d 中加入边uv, 即$E(G^d) := \{uv : \text{dist}_G(u, v) \le d\}$, 其中$u, v \in V(G^d)$, $\text{dist}_G(u, v)$ 表示在图G 中顶点u 和v 的最小距离. 特别的, G^2 被称为平方图.

Nešetřil等人在文献 [2] 中率先系统研究了幂图的子色数问题, 并利用弱染色数给出了如下上界:

$$\chi_{\mathrm{sub}}(G^d) \le \mathrm{wcol}_{2d}(G).$$

对于许多自然图类(如平面图, 排除某个小图作为子式的图类等)具有有界拓展性 [3], 上述结果指出: 对于这些图类中的任意图G, 当d 固定时, G^d 的子色数存在常数上界.

对于平面图的幂图, 结合van den Heuvel 等人在文献 [4] 中对弱染色数的上界, 可以得到:

$$\chi_{\mathrm{sub}}(G^2) \le 135,\ \chi_{\mathrm{sub}}(G^3) \le 364.$$

对于图G, 设L 是$V(G)$ 的一个线性序, 对于$k \in \mathbb{N}$ 和$y \in V(G)$. 若在G 中存在一条长度至多为k 的路径$P = z_0z_1\cdots z_s$, 其中$z_0 = x, z_s = y, s \le k$, x 为该路上在线性序L 下的最小顶点, 并且对于任意的$\lceil \frac{k}{2} \rceil \le i \le s$, 都有$y \le_L z_i$, 则称$x$ 在线性序L 下是从y 出发半弱$k-$可达的. 记$\mathrm{SemiReach}_k[G, L, y]$ 为在线性序L 下从y 出发半弱$k-$可达的顶点的集合, 图G 的半弱k-染色数记为$\mathrm{swcol}_k(G)$, 其定义为:

$$\mathrm{swcol}_k(G) := \min_L \max_{y \in V(G)} |\mathrm{SemiReach}_k[G, L, y]|.$$

Cortés 等人在文献 [5] 中引入了半弱k-染色数, 结合平面图的路径分解技术, 给出了如下的结果(参见文献 [5] 中的定理3.1).

定理1. 对于任意的平面图G, 有$\mathrm{swcol}_4(G) \le 43$. 设$g$ 为G 的围长, 则有

$$\mathrm{swcol}_4(G) \le \begin{cases} 39, & g \ge 10, \\ 15, & g \ge 17. \end{cases}$$

他们还证明了如下重要定理(参见文献 [5] 中的定理2.3).

定理2. 对于任意的图G 和固定的正整数$d \in \mathbb{N}$, 有$\chi_{\mathrm{sub}}(G^d) \le \mathrm{swcol}_{2d}(G)$. 此外, 如果$d$ 为奇数, 则有$\chi_{\mathrm{sub}}(G^d) \le \mathrm{swcol}_{2d-1}(G)$.

集合定理1和定理2, 得到了如下结果(参见文献 [5] 中的定理1.4).

定理3. 对于任意的平面图G, 设其围长为g, 则有

$$\chi_{\mathrm{sub}}(G^2) \le \begin{cases} 43, & g \ge 3, \\ 39, & g \ge 10, \\ 15, & g \ge 17. \end{cases}$$

本文利用Cortés 等人在文献 [5] 中提出的方法, 研究了围长为7 的平面图平方图的子色数, 并得到了如下结果.

定理4. 对于围长$g \ge 7$ 的平面图G, 有$\chi_{\mathrm{sub}}(G^2) \le 41$.

DOI: 10.12677/aam.2026.154169

2. 围长为7 的平面图平方图的子色数

首先介绍等距路径. 在图G 中, 若路径P 的两个端点之间不存在更短的路径, 则称P 为一条等距路径. 设P 为一条等距路径, u, v 为路径上的两个顶点, 则记从u 到v 的子路径为uPv. 设P 和P' 为两条不相交的等距路径, 若存在$u \in V(P), v \in V(P')$ 使得$uv \in E(G)$, 则称这两条等距路径是相邻的.

在文献 [4] 中有如下关于等距路径的定理.

定理5. 设G 为一个图, P 为G 中的一条等距路径, r 为正整数, $u, v \in V(P)$ 且$w \in V(G)$. 若$\mathrm{dist}_G(u, w) \leq r$ 并且$\mathrm{dist}_G(u, w) \leq r$, 则有$\mathrm{dist}_G(u, v) \leq 2r$. 特别的, 在$P$ 中与w 的距离至多为r 的顶点数目不超过$2r + 1$.

下面给出等距路径分解的定义. 设$\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \cdots, P_s\}$ (其中s 为正整数), 若满足顶点集$V(P_0), V(P_1), \cdots, V(P_s)$ 构成$V(G)$ 的一个划分, 并且对于每个$i \in \{0, 1, \cdots, s\}$, P_i 都是$G - \cup_{j=0}^{j=i-1} V(P_j)$ 中的一条等距路径, 则称$\mathcal{P}$ 为图G 的一个等距路径分解. 记$\mathcal{P}_i = G - \cup_{j=0}^{i-1} V(P_j)$, 特别的有$\mathcal{P}_0 = G$.

在文献 [5] 中介绍了一种特殊等距路径分解, 我们称其为约化.

对于三角剖分平面图G, 设它有一个等距路径分解$\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \cdots, P_s\}$, 若其满足如下条件, 我们则称其为图$G$ 的一个约化:

1. P_0 由两个点构成, P_1 由一个点构成;
2. 对于任意的$i \in \{0, 1, \cdots, s\}$, 设$P_i$ 的端点为w, w' (它们可能重合), 且对于任意的$k \in \{2, 3, \cdots, s\}$, P_k 恰好与两条路径P_h 和P_j 相邻(其中$h < j < k$), 并存在$v_k, v_k' \in V(P_h)$, $z_k, z_k' \in V(P_j)$ 使得$v_k z_k w_k v_k$ 和$v_k' z_k' w_k' v_k'$ 均为图G 中的有界面;
3. 若P_k 有至少两种可能的选择, 则选择使得$v_k P_h v_k' w_k' P_k w_k v_k$ 内部顶点数最少的那一条路;
4. 对于$\mathcal{P}_{k+1}$ 中的每个连通分支K, $G[V(P_0) \cup \cdots \cup V(P_k)]$ 中包含K 的面的边界是一个圈, 其形式为: $D = vP_h v' z' P_j z v$.

在此对约化进行简要的说明: 约化本质上是图的一个路径分解, 上述的描述不仅是约化的定义, 而且包含了约化的构造方法(即上述的1, 2, 3 条); 对于第4 条, 其说明的是约化的一个性质, 即通过上述构造形成的约化一定满足第4 条描述的性质.

在文献 [4] 中, van den Heuvel 等人证明了每一个具有三角剖分的平面图都有一个约化, 即如下定理.

定理6. 每个三角剖分的平面图都有一个约化.

由定理2 知, 为了证明定理4, 我们只需要证明如下定理.

定理7. 对于围长$g \geq 7$ 的平面图G, 有$\mathrm{swcol}_4(G) \leq 41$.

对于定理7 的证明. 设图G 是一个围长$g \geq 7$ 的平面图, 我们不妨设其是连通图. 因为增加G 中的边不会使$\mathrm{swcol}_4(G)$ 变小, 所以我们可以添加边使得G 为一个三角剖分图.

由定理6 知, 图G 存在一个约化$\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \cdots, P_s\}$. 根据约化的定义, 记$G$ 的外部三角面

为$w_0w_1w_2w_0$, 选取任意一条边作为P_0, 则将剩下的不为P_0 端点的顶点记为P_1. 对于$k \geq 2$, 若P_k 与P_h, P_j 相邻, 其中$h < j < k$, 则称P_h 和P_j 分别是P_k 的经理和领班, 并称P_h 和P_j 都是P_k 的上级. 注意到, 此时P_h 也是P_j 的一个上级.

接下来定义图G 的一个线性序L:

1. 对于$u \in V(P_i), v \in V(P_j)$, 其中$i \neq j$, 若$i < j$ 则有$u \leq_L v$;
2. 对于P_0, 由于$|P_0| = 2$, 则可以任意的排序, 不妨设$V(P_0) = \{w_0, w_0'\}$, 令$w_0 \leq_L w_0'$. 对于P_1, 由于$|P_1| = 1$, 将其顶点排在w_0' 的后面. 对于$k \geq 2$, 设P_h 是P_k 的经理, 其中$h < k$. 由经理的定义, 有$v_k, v_k' \in V(P_h)$, 不妨设其排序$v_k \leq_L v_k'$. 设$P_k = x_0x_1\cdots x_s$, 其中$x_0 = w_k, x_s = w_k'$. 由经理的定义, 设$w_kv_k, w_k'v_k' \in E(G)$, 对于$0 \leq i < j \leq s$, 设$x_i \leq_L x_j$.

固定顶点$v \in G$, 且假设$x \in P_k$, 其中$P_k \in \mathcal{P}$. 要证明定理7, 我们只需要证明

$$|\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 41.$$

若$P_k = P_0$, 则有$|V(P_0)| = 2$, 故有$|\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 2$. 若若$P_k = P_1$, 则$P_1 = v$, 最多有$P_0$ 中的两个顶点排在v 的前面, 故有$|\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 3$.

下面假设$k \geq 2$. 对于$a \in \{0, 1, \cdots, s\}$, 令$W_a = V(P_a) \cap \mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]$.

根据约化的定义, 存在$P_h, P_j \in \mathcal{P}$, 使得P_h 和P_j 分别为P_k 的经理和领班, 其中$h < j < k$. 由于P_h 是P_j 的一个上级, 则令其另一个上级为P_i. 设P_h 的两个上级分别为P_f 和P_g. 其中P_i 有可能和P_f 或P_g 重合.

断言1. 我们有$\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v] \subset W_k \cup W_h \cup W_j \cup W_i \cup W_f \cup W_g$.

对于断言1 的证明. 设$u \in \mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]$, 且$Q$ 为见证从v 出发半弱4-可达u 的路径. 由半弱4-可达的定义知, Q 中最多有两个顶点在L 序下排在v 的前面.

若Q 中只有一个顶点x 满足$x \leq_L v$, 则$x = u$ 且$uv \in E(G)$. 又在L 序下排在P_k 前面且与P_k 相邻的等距路径只有P_h 和P_j, 故有$u \in W_k \cup W_h \cup W_j$.

若Q 中有两个顶点x, y 在线性序L 下排在v 的前面, 不妨设$x \leq_L y \leq_L v$, 则$x = u$ 且有$uy \in E(G)$. 若$yv \in E(G)$, 此时有$y \in W_k \cup W_h \cup W_j$, 则$u \in W_k \cup W_h \cup W_j \cup W_i \cup W_f \cup W_g$. 若$yv \notin E(G)$, 设$Q = xyz\cdots$, 且$z \neq v$. 由半弱4-可达的定义知, $v \leq_L z$. 设$z \in P_r$, 其中$k < r$. 由于P_k 已经有两个不同的上级, 所以P_r 的另一个上级是P_r 领班(否则P_k 会有三个不同的上级), 从而$y \in W_k \cup W_h \cup W_j$. 又$uy \in E(G)$, 从而$u \in W_k \cup W_h \cup W_j \cup W_i \cup W_f \cup W_g$.

综上, 有$u \in W_k \cup W_h \cup W_j \cup W_i \cup W_f \cup W_g$. ■

由断言1 知, $|\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq |W_k| + |W_h| + |W_j| + |W_i| + |W_f| + |W_g|$.

若P_h 是P_j 的领班, 则P_i 是P_j 的经理, 由约化的定义知, P_i 也是P_h 的一个上级, 故$P_i \in \{P_f, P_g\}$, 此时有$|\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq |W_k| + |W_h| + |W_j| + |W_f| + |W_g|$. 若$P_h$ 是P_j 的经理, 则P_i 是P_j 的领班, 此时$P_i \notin \{P_f, P_g\}$, 从而$|\mathrm{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq |W_k| + |W_h| + |W_j| + |W_i| + |W_f| + |W_g|$.

故我们假设P_h 是P_j 的一个领班, 此时有$|\{W_k, W_h, W_j, W_i, W_f, W_g\}| = 6$.

断言2. 我们有$|W_k| \le 5$.

对于断言2 的证明. 设$P_k = w^0w^1\cdots w^n$, 有$v = w^l, 0 \le l \le s$. 由半弱4-可达的定义和线性序L知, v 可以到达自身, 以及可能到达$w^{l-1}, w^{l-2}, w^{l-3}, w^{l-4}$ (如果存在的话). 故有$|W_k| \le 5$. ■

断言3. 我们有$|W_j| \le 9$.

对于断言3 的证明. 若最多有一条路Q 表明存在点$u \in W_j$. 由半弱4-可达的定义, Q 上最多与两个点属于W_j, 故此时$|W_j| \le 2$.

若至少有两条路表明存在点$u \in W_j$, 设Q_1 和Q_2 是从v 出发终点x, y 分别属于P_j 的两条认证路径, 且选取使得$\mathrm{dist}_{P_j}(x, y)$ 最大的一对. 由定理5 得$\mathrm{dist}_{P_j}(x, y) \le |Q_1| + |Q_2| \le 4 + 4 = 8$. 所以$W_j$ 中最多有9 个顶点. 设z 是x 的一个邻点, 由于围长$g \ge 7$, 而它们之间最多可以形成一个9 长的圈, 所以$z \in W_j$, 从而有$|W_j| \le 9$.

综上, 有$|W_j| \le 9$. ■

由分化的定义, 我们知道P_h 和P_j 在图G 中位于P_k 的两侧. 以P_k 为基准, 不妨设P_f 位于P_h 一侧, P_g 位于P_j 一侧.

断言4. 对于$a \in \{i, f\}$ 我们有$|W_a| \le 9$.

对于断言4 的证明. 若最多一条路Q 表明存在点$u \in W_a$, 由约化的定义, Q 必然会穿过$P_b \in \{P_h, P_j\}$ 才能到达P_a. 由线性序L 的定义知, $V(P_a) \le_L V(P_b) \le_L V(P_k)$, 故此时$|W_a| \le 1$.

若至少有两条路表明存在点$u \in W_j$, 设Q_1 和Q_2 是从v 出发终点x, y 分别属于P_j 的两条认证路径, 且选取使得$\mathrm{dist}_{P_j}(x, y)$ 最大的一对. 由上述讨论知, Q_1 和Q_2 也穿过$P_b \in \{P_f, P_i\}$, 设Q_1 和Q_2 与P_b 的交点分别为x' 和y', 并且有$xx' \in E(G), yy' \in E(G)$, 记$Q_1' = vQ_1x', Q_2' = vQ_2y'$. 由定理5 得$\mathrm{dist}_{P_a}(x, y) \le 2 + \mathrm{dist}_{P_b} \le 2 + |Q_1'| + |Q_2'| \le 2 + 3 + 3 = 8$, 故$W_a$ 中最多有9 个顶点. 设z 是x 的一个邻点, 由于围长$g \ge 7$, 而它们之间最多可以形成一个9 长的圈, 所以$z \in W_a$, 从而有$|W_a| \le 9$.

综上, 有$|W_a| \le 9$. ■

断言5. 我们有$|W_h \cup W_g| \le 9$.

对于断言5 的证明. 由分化的定义, 若存在一条路Q 从v 出发半弱4-可达P_g 上的一个点, 则Q 只能穿过P_h 的端点w_h 和w_h'.

若$W_g = \emptyset$, 既不存在从v 出发半弱4-可达P_g 的路, 则$W_h \cup W_g = W_h$. 此时与断言3 的讨论类似, 有$|W_h \cup W_g| = |W_h| \le 9$.

若最多一条路Q 表明存在点$u \in W_g$, 设Q 与P_h 的交点为w_h, 记$Q' = vQw_h$. 设Q'' 是表明存在点$w \in W_h$ 的另一条路, 且选取使得$\mathrm{dist}_{P_h}(w_h, w)$ 最大的一条. 由于W_g 中的点都要经过点w_h 才能半弱4-可达, 则这些点与w_h 的距离为1, 由定理5 知$|W_h| \le 3$. 设$|W_g| \ge 2$, 因为围长$g \ge 7$, 但对于W_g 中的任意两个点, 其能形成的最大围长为4, 产生矛盾, 故$|W_g| \le 1$ (至多包含u). 由定理5 得$\mathrm{dist}_{P_h}(w_h, w) \le |Q'| + |Q''| \le 3 + 4 = 7$. 所以此时$W_h$ 中最多有8 个顶点. 设z 是w_h 的一个邻

点, 由于围长$g \geq 7$, 而它们之间最多可以形成一个8 长的圈, 所以$z \in W_h$, 从而有$|W_h| \leq 8$. 故此时有$|W_h \cup W_g| \leq 8+1=9$.

若至少有两条路表明存在点$u \in W_g$, 设Q_1 和Q_2 是从v 出发终点x, y 分别属于P_g 的两条认证路径, 且选取使得$\text{dist}_{P_g}(x,y)$ 最大的一对. 由上述讨论知, $|W_g| \leq 2$ (至多包含x, y). 设Q_1 和Q_2 与P_b 的交点分别为w_h 和w'_h, 并且有$xw_h \in E(G), yw'_h \in E(G)$, 记$Q'_1 = vQ_1w'_h, Q'_2 = vQ_2w'_h$. 由定理5 得$\text{dist}_{P_h}(x,y) \leq \text{dist}_{P_h} \leq |Q'_1| + |Q'_2| \leq 3+3=6$, 故$W_a$ 中最多有7 个顶点. 设z 是x 的一个邻点, 由于围长$g \geq 7$, 而它们之间最多可以形成一个8 长的圈, 所以$z \in W_h$, 从而有$|W_h| \leq 7$. 故此时有$|W_h \cup W_g| \leq 7+2=9$.

综上, 有$|W_h \cup W_g| \leq 9$. ■

由上述断言知

$$
\begin{aligned}
|\text{SemiReach}_4[G,L,v]| &\leq |W_k| + |W_j| + |W_i| + |W_f| + |W_h \cup W_g| \\
&\leq 5+9+9+9+9 \\
&= 41,
\end{aligned}
$$

故定理7 得证. □

由定理2 和定理7 知, 定理4 得证.

对于围长$g \geq 7$ 和$g \geq 10$ 时的结论, 其得到的上界之间有着空隙, 这实际上是不难理解的: 对于围长$g \geq 10$ 的图, 其自然是$g \geq 7$ 的图, 但反之不然, 即$g \geq 7$ 时的结果包含了$g \geq 10$ 时的结果, 这也是构成这个空隙的原因.

参考文献

[1] Albertson, M.O., Jamison, R.E., Hedetniemi, S.T. and Locke, S.C. (1989) The Subchromatic Number of a Graph. In: *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 39, Elsevier, 33-49. https://doi.org/10.1016/s0167-5060(08)70296-6

[2] Nešetřil, J., Ossona de Mendez, P., Pilipczuk, M. and Zhu, X. (2020) Clustering Powers of Sparse Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **27**, P4.17. https://doi.org/10.37236/9417

[3] Nešetřil, J. and Ossona de Mendez, P. (2012) Sparsity: Graphs, Structures, and Algorithms. Springer.

[4] van den Heuvel, J., de Mendez, P.O., Quiroz, D., Rabinovich, R. and Siebertz, S. (2017) On the Generalised Colouring Numbers of Graphs That Exclude a Fixed Minor. *European Journal of Combinatorics*, **66**, 129-144. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2017.06.019

[5] Cortés, P.P., Kumar, P., Moore, B., Ossona de Mendez, P. and Quiroz, D.A. (2025) Subchromatic Numbers of Powers of Graphs with Excluded Minors. *Discrete Mathematics*, **348**, Article 114377. https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.114377