

# 图类的超欧拉指数

马兴忠, 安子瑜, 吕盛梅\*

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月10日

---

## 摘要

超欧拉指数作为图的一类结构指数, 能够真实地反映一个图与超欧拉图之间的联系. 通过研究这些指数我们可以刻画出某些图类或者从中得到图的一些性质, 这对我们研究图的结构是有帮助的. 在本文中, 我们主要考虑了 $\theta$ 图类的超欧拉指数问题, 得到了 $\theta$ 图, 广义 $\theta$ 图, 中心 $\theta$ 图, 一致 $\theta$ 图和中心一致 $\theta$ 图的超欧拉指数.

## 关键词

$\theta$ 图, 广义 $\theta$ 图, 中心 $\theta$ 图, 一致 $\theta$ 图, 中心一致 $\theta$ 图, 超欧拉指数

---

# Supereulerian Index of the $\theta$ Graphs Class

Xingzhong Ma, Ziyu An, Shengmei Lyu\*

Department of Mathematics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

---

## Abstract

As a class of structural indices of graphs, the Supereulerian index can truly reflect the

---

\* 通讯作者。

connection between a graph and a supereulerian graph. By studying these indices, we can characterize certain graph classes or derive some properties of graphs, which is of great help for our research on graph structures. In this paper, we mainly consider the problem of Supereulerian index of the  $\theta$  graphs class, and obtain the Supereulerian index of  $\theta$  graph, the generalized  $\theta$  graph, the centralized  $\theta$  graph, the uniform  $\theta$  graph, the centralized uniform  $\theta$  graph.

## Keywords

$\theta$  Graph, The Generalized  $\theta$  Graph, The Centralized  $\theta$  Graph, The Uniform  $\theta$  Graph, The Centralized Uniform  $\theta$  Graph, Supereulerian Index

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文所考虑的图均为无向的有限简单图, 且所有未定义的术语和基本概念参考文献 [1]. 为了叙述方便, 我们引入一些定义和符号.

设  $G = (V(G), E(G))$  是顶点集和边集分别为  $V(G)$  和  $E(G)$  的简单无向图. 图  $G$  的线图  $L(G)$  是一个以  $G$  的所有边作为顶点的图, 其中  $L(G)$  的两个顶点(即  $G$  的两条边)相邻, 当且仅当它们在  $G$  中共用一个公共顶点. 存在整数  $k \geq 1$ ,  $k$  次迭代线图  $L^k(G)$  递归定义为  $L(L^{k-1}(G))$ , 其中,  $L^0(G) = G$ ,  $L^1(G) = L(G)$ ,  $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$ , 并且我们假设  $E(L^{k-1}(G))$  不是空的.  $H$  是  $G$  的一个子图, 顶点  $u$  在  $H$  中的度记为  $d_H(u)$ .  $H$  的两个子图  $H_1, H_2$  之间的距离记为  $d_G(H_1, H_2)$ .  $d_H(u_1, u_2)$  表示  $H$  中从  $u_1$  到  $u_2$  中的最短路长, 其中  $\min\{d_H(u_1, u_2) : u_1 \in V(H_1), u_2 \in V(H_2)\}$ .  $G$  中的一条路叫做枝, 它指的是内部顶点都是 2 度点, 末端点的度不为 2 的路. 枝的长度是边的个数. 若有长度为 1 的枝, 那么它没有内部顶点. 图  $G$  中所有枝的集合, 用  $B(G)$  表示;  $B_1(G)$  表示  $B(G)$  中有一个末端点是 1 度点的枝的集合.  $G$  中所有边都在  $H$  里的枝的集合记为  $B_H(G)$ . 如果从图  $G$  中删除一个枝  $b$  的所有边和内部顶点后图  $G$  的分支数变大, 则称这个枝  $b$  为割枝.  $G$  的连通分支的个数用  $\omega_G$  表示. 一个最小的割枝被称为枝键. 如果一个枝键包含奇数个枝, 则称这个枝键为奇枝键. 在一个图中, 边  $e$  的收缩(记为  $G/e$ )是将关于边  $e$  的两个端点  $u$  和  $v$  用一个顶点代替, 该顶点与  $u$  或  $v$  所关联的所有边相关联. 对于  $X \subseteq E(G)$ , 收缩  $G/X$  是通过收缩  $X$  中的每条边并删除产生的环得到的. 如果  $H \subseteq G$ , 我们用  $G/H$  表示  $G/E(H)$ . 我们用  $P_n, C_n, K_n$  分别表示阶数为  $n$  的路, 圈和完全图. 我们用  $K_{m,n}$  表

示划分集大小为  $m$  和  $n$  的完全二部图. 当一个图包含一个生成闭迹时我们称这个图为超欧拉图. 超欧拉指数  $s(G)$  是指  $L^k(G)$  为超欧拉的最小整数  $k$ .

1977 年, Boesch, Suffel 和 Tindell 等人在文献 [2] 中首次提出了超欧拉问题, 超欧拉问题主要探讨图中是否包含一个生成的欧拉子图. 1979 年, Pulleybank 在 [3] 中发现, 判断一个图是否具有超欧拉性是一个 NP-完全问题. 一个图中如果存在爪、路、树这样特殊的结构, 在图中一般不会找到一个生成的欧拉子图, 也不存在超欧拉性. 于是学者们在探讨超欧拉问题时会含有这样结构的图做迭代线图, 希望在线图中找到生成的欧拉子图. 1968 年, Chartrand 在文献 [4] 中引入了哈密尔顿指数的概念, 并证明了哈密尔顿指数的存在性, 指出除路之外的连通图, 其哈密尔顿指数总是存在的. 1983 年, Clark 和 Wormald 在 [5] 对哈密尔顿指数的定义做了推广, 并引入了类哈密尔顿指数的概念. 目前研究的类哈密尔顿指数主要有超欧拉指数、2-因子指数、哈密尔顿连通指数等. 超欧拉指数与图的遍历问题有着直接且密切的关系: 当图  $G$  的超欧拉指数为 0, 即  $s(G) = 0$  时,  $G$  本身是超欧拉图, 其中存在生成闭迹 (覆盖所有顶点的回路), 此时可实现全顶点遍历; 当  $s(G) = 1$  时,  $L(G)$  是超欧拉图, 意味着  $G$  中存在生成迹 (覆盖所有顶点的路径), 此时可实现全顶点遍历. 分析发现, 当  $s(G)$  越大时, 图  $G$  越“远离”超欧拉图, 其中生成迹或生成回路就越难构造, 此时实现全顶点遍历的难度就越高. 由此可见, 超欧拉指数刻画了将原图转化为可生成遍历的迭代步数. 当超欧拉指数越小, 原图或低次迭代线图即可生成遍历, 此时算法更高效; 当超欧拉指数越大, 需对图进行多次线图变换才能找到生成闭迹, 这意味着遍历问题更难, 这也是该问题被列为 NP-难的原因. 同时, 超欧拉指数与网络抗毁性之间也有着间接的关联: 当超欧拉指数越小, 原图或低次迭代线图越接近超欧拉图, 此时原图的边连通度或点连通度越高, 抗毁性就越强; 反之, 当超欧拉指数越大, 原图含更多割边或割点, 其连通性弱、抗毁性就越差. 综上所述, 研究图的超欧拉指数对解决图的遍历问题和网络抗毁性都是有实际指导意义的.

$\theta$  图类在图论的许多方向都有着广泛的研究, 比如染色、图谱等等.  $\theta$  图类在研究哈密尔顿性方面也很常见, 但我们知道  $\theta$  图本身一定不存在哈密尔顿圈, 但有可能存在生成的欧拉子图, 如果能确定这类图具体的超欧拉指数或超欧拉性也算完善了哈密尔顿问题中的一些结果. 为了更好的研究图的超欧拉性, 在本文中, 我们主要研究了有关  $\theta$  图类的超欧拉指数, 其中包括  $\theta$  图、广义  $\theta$  图、中心  $\theta$  图、一致  $\theta$  图、中心一致  $\theta$  图.

## 2. 主要结果及引理

在给出我们的结论之前, 先给出  $\theta$  图的相关定义和一些重要的定理.

一个简单的连通图  $G$  由一对度为 3 的点  $\{N, S\}$  以及这对三度点之间的三条长度分别为  $s_i + 1$ ,  $s_j + 1$ ,  $s_k + 1$  的内部不相交路组成, 则称图  $G$  为  $\theta$  图, 记作  $\theta(s_i, s_j, s_k)$ , 其中  $s_i, s_j, s_k$  分别为路上的顶点数目. 不失一般性, 在这里我们假设  $s_i \geq s_j \geq s_k$ .

**定义 2.1** ([6]) 广义  $\theta$  图  $\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)$  指由  $n$  个长度至少为 2 的内部不相交的路连接一对末端点组成的图, 其中  $s_i$  表示第  $i$  条路上内部顶点的数目. 末端的顶点分别被称为北极 ( $N$ ) 和南极 ( $S$ ).

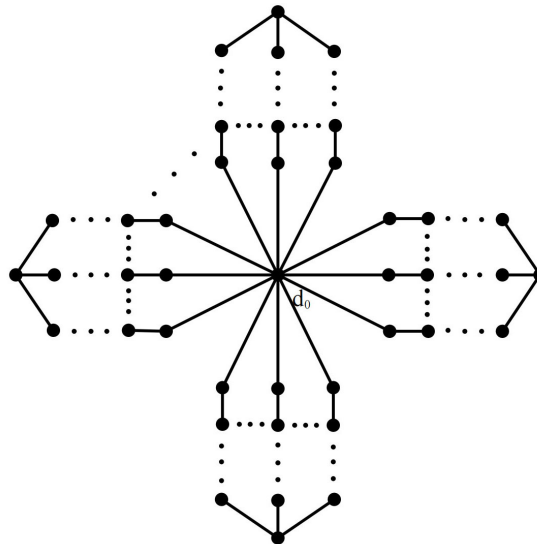
在此基础上, Riyan Wicaksana Putra 等人在 [7] 给出了一致  $\theta$  图的定义如下:

**定义2.2** ([7]) 如果连接两个极点的所有路径都有相同数量的内部顶点, 则广义 $\theta$  图称为一致 $\theta$  图, 用 $\theta(n; q)$  表示, 其中 $n$  表示连接南极和北极的路径数目, 且 $n \geq 3$ .  $q$  表示每条路上的内部顶点的个数, 且 $q \geq 1$ .

同时, 他们也给出了中心一致 $\theta$  图的定义如下:

**定义2.3** ([7]) 将若干个相同的一致 $\theta$  图的其中一个极点粘在一起, 即得到中心一致 $\theta$  图, 用 $\theta^*(n; q; p)$  表示,  $p$  指粘在一起的一致 $\theta$  图的数目, 且 $p \geq 3$ . 如图1 所示即为中心一致 $\theta$  图, 其中心点用 $d_0$  表示. 则 $V(\theta^*(n; q; p)) = (nq + 1)p + 1$ ,  $E(\theta^*(n; q; p)) = n(q + 1)p$ ,  $\Delta(\theta^*(n; q; p)) = np$ .

受上述学者的启发, 我们考虑将图扩大化. 因此, 我们给了新的 $\theta$  图类的定义: 将若干个不同的 $\theta$  图的其中一个极点粘在一起, 记为中心 $\theta$  图. 用 $\theta^*(s_i^1, s_j^1, s_k^1; s_i^2, s_j^2, s_k^2; \dots; s_i^p, s_j^p, s_k^p)$  表示,  $p$  指粘在一起的 $\theta$  图的数目, 且 $p \geq 3$ , 其中心点也用 $d_0$  表示. 显然, 当 $s_i^1 = s_j^1 = s_k^1 = s_i^2 = s_j^2 = s_k^2 = \dots = s_i^p = s_j^p = s_k^p$  时, 中心 $\theta$  图即中心一致 $\theta$  图. 中心一致 $\theta$  图的中心结构(中心点 $d_0$ ) 可以支配整个图的连通性、遍历性、收敛性及网络抗毁性, 其一致中心结构在拓扑原型上就是模拟了星型网络. 对其超欧拉指数的研究可以帮我们更好地了解星型网络图的结构与超欧拉性之间的联系, 见图 1.



**Figure 1.** The centralized uniform  $\theta$  graph  $\theta^*(n; q; p)$ .

**图 1.** 中心一致 $\theta$  图 $\theta^*(n; q; p)$

1968 年, Chartrand 在文献 [4] 中引入了哈密顿指数的概念, 并证明了哈密顿指数的存在性, 指出除路之外的连通图, 其哈密顿指数总是存在的. 1983 年, Clark 等在文献 [5] 中推广了哈密顿指数的定义, 引入了类哈密顿指数的概念, 其中包括超欧拉指数、2- 因子指数、偶因子指数、哈密顿连通指数等. 1988 年, 赖虹建在 [8] 中给出了哈密顿指数与超欧拉指数之间的关系. 1990 年, Catlin 等人研究了迭代线图图中的哈密顿圈和超欧拉图. 2000 年, 熊黎明等人在文献 [9] 中给出了当 $n \geq 3$  时, 迭代线图 $L^k(G)$  是超欧拉图的特征刻画. 一些主要结果如下:

**定理2.4** ([8]) 设 $G$  是一个非路的连通图, 则有:  $s(G) \leq h(G) \leq s(G) + 1$ .

**定理2.5** ([9]) 设 $G$  是一个至少三条边的连通图并且整数 $k \geq 0$ ,  $L^k(G)$  是超欧拉的当且仅

当  $S_k(G) \neq \emptyset$ . 其中  $S_k(G)$  表示图  $G$  中满足以下条件的子图  $H$  的集合:

- (I)  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H)$ ;
- (II)  $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3}^{\Delta(G)} V_i(G) \subseteq V(H)$ ;
- (III) 对任意的枝  $b \in B(G) \setminus B_H(G)$ , 都有  $|E(b)| \leq k + 1$ ;
- (IV) 对任意的枝  $b \in B_1(G)$ , 都有  $|E(b)| \leq k$ ;
- (V) 对于  $H$  的每个子图  $H_1$ , 都有  $d_G(H_1, H - H_1) \leq k$ . 如果  $d_G(H_1, H - H_1) = 0$  说明  $H$  是连通的.

**定理2.6** ([10]) 设图  $G$  是连通的, 记  $S_{B_1}, S_{B_2}, \dots, S_{B_t}$  为  $G$  的所有分割块, 则  $s(G) = \max\{s(S_{B_1}), s(S_{B_2}), \dots, s(S_{B_t}), k(G)\}$ .

2005 年, 熊黎明和严慧亚在 [11] 中证明了树的超欧拉指数, 并给出了关于图的超欧拉指数的界:

**定理2.7** ([11]) 设  $T$  是一个树, 则  $s(T) = k(T)$ .

**定理2.8** ([11]) 设图  $G$  的超欧拉指数  $s(G) \geq 1$ , 那么  $s(G) \geq \max\{h_1(G), h_2(G), h_3(G) - 1\}$ .

**定理2.9** ([11]) 设  $G$  是非路的连通图, 那么  $s(G) \leq \max\{h_1(G), h_2(G) + 1, h_3(G)\}$ . 其中,  $l(S)$  为枝键的长度,  $B_B(G)$  为枝键的集合,  $B_{B_1}(G)$  为其中一个枝键仅包含一条枝, 且该枝的一端在图  $G$  中的度数为 1 这样的枝键集合;  $B_{B_2}(G)$  为其中一个枝键仅包含一条枝, 且该枝的两端在图  $G$  中的度数至少为 3 这样的枝键集合;  $B_{B_3}(G)$  为奇枝键的集合: 其中一个奇枝键在图  $G$  中至少有三条枝.

$$h_i(G) = \begin{cases} \max\{l(S) : S \in B_{B_i}(G)\}, & \text{当 } B_{B_i}(G) \text{ 是非空的;} \\ 0. & \end{cases}$$

2010 年, 熊黎明等人 [12] 首次证明了对一个图在度和至少是 3 的 2 个顶点之间增加一条边不会使超欧拉指数增加, 所以超欧拉指数在收缩和闭包条件下保持稳定.

**定理2.10** ([12]) 设  $G$  是非路非超欧拉图,  $F$  是图  $G$  的收缩子图, 则  $s(G) = s(G/F)$ .

**定理2.11** ([12]) 设  $G$  是至少有 3 条边的非路无爪连通图, 则  $s(G) = s(cl(G))$ .

目前关于图的超欧拉指数的研究结果还不是很完善, 在这方面的研究需要继续探究.

下面给出我们的结论:

**定理2.12**  $\theta$  图  $\theta(s_i, s_j, s_k)$  的超欧拉指数  $s(\theta(s_i, s_j, s_k)) = s_k (s_i \geq s_j \geq s_k)$ .

**定理2.13** 中心  $\theta$  图  $\theta^*(s_i^1, s_j^1, s_k^1, s_i^2, s_j^2, s_k^2; \dots; s_i^p, s_j^p, s_k^p)$  (其中  $s_i^t \geq s_j^t \geq s_k^t, s_k^1 \leq s_k^2 \leq \dots \leq s_k^p$ ) 的超欧拉指数

$$s(\theta^*(s_i^1, s_j^1, s_k^1, s_i^2, s_j^2, s_k^2; \dots; s_i^p, s_j^p, s_k^p)) = s_k^p.$$

**定理2.14** 一致 $\theta$ 图 $\theta(n; q)$ 的超欧拉指数( $t \in Z^*$ )

$$s(\theta(n; q)) = \begin{cases} q, & n = 2t + 1; \\ 0, & n = 2t + 2. \end{cases}$$

**定理2.15** 中心一致 $\theta$ 图 $\theta^*(n; q; p)$ 的超欧拉指数

$$s(\theta^*(n; q; p)) = \begin{cases} q + 1, & n = 1; \\ 0, & n = 2; \\ q, & n \geq 3. \end{cases}$$

### 3. 主要结果的证明

**定理2.12**  $\theta$ 图 $\theta(s_i, s_j, s_k)$ 的超欧拉指数 $s(\theta(s_i, s_j, s_k)) = s_k$  (其中 $s_i \geq s_j \geq s_k$ ).

**证明** 首先考虑 $s_i, s_j, s_k$ 中至少有一个值为1, 即 $s_i = 1$ 或 $s_j = 1$ 或 $s_k = 1$ .

我们通过构造这些图的线图可以得出:  $L(\theta(1, 1, 1)); L(\theta(n, 1, 1)); L(\theta(n, n, 1))$ 都存在生成欧拉子图. 则当 $s_i, s_j, s_k$ 中至少有一个值为1时,  $s(\theta(s_i, s_j, s_k)) = 1$ .

下面只需考虑 $s_i, s_j, s_k$ 都大于等于2, 即 $s_i, s_j, s_k \geq 2$ .

由定理2.5, 我们需要证明以下结论:  $S_{s_k}(\theta(s_i, s_j, s_k)) \neq \emptyset$ . 为了方便证明,  $\theta$ 图 $\theta(s_i, s_j, s_k)$ 中不包含端点 $N, S$ 的三条路分别记为 $P_i, P_j, P_k$ . 当 $s_i \geq s_j \geq s_k$ 时, 我们选择子图 $H$ 为由端点 $N, S$ 与路 $P_i, P_j$ 构成的圈(记为 $NP_iSP_jN$ )和路 $P_k$ 上的所有顶点构成的集合, 表示为 $H = NP_iSP_jN \cup V(P_k)$ .

则 $H$ 满足条件(I)和条件(II):

- (I)  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H)$ ;
- (II)  $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3} V_i^{(\theta)} \subseteq V(H)$ .

对任意的枝 $b \in B(\theta(s_i, s_j, s_k)) \setminus B_H(\theta(s_i, s_j, s_k))$ , 此时其长度为可以为 $s_j + 1, s_i + 1, s_k + 1$ . 但为了使结果更好, 我们选择其长度为 $s_k + 1$ , 即 $|E(b)| = s_k + 1 \leq k + 1$ , 其中 $k = s_k$ , 于是(III)成立.

由于图 $\theta(s_i, s_j, s_k)$ 中, 没有 $B_1(\theta(s_i, s_j, s_k))$ , 显然(IV)成立.

$H$ 中的每个子图 $H_1$ , 显然 $H_1$ 与 $H - H_1$ 之间的距离为1, 即 $d_{\theta(s_i, s_j, s_k)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq k$ , 其中 $k = s_k \geq 2$ , 于是(V)成立.

所以,  $S_{s_k}(\theta(s_i, s_j, s_k)) \neq \emptyset$ , 则 $L^{s_k}(\theta(s_i, s_j, s_k))$ 是超欧拉的, 即 $s(\theta(s_i, s_j, s_k)) = s_k$ .

由于在 $L^{s_k-1}(\theta(s_i, s_j, s_k))$ 中不存在生成欧拉子图, 所以 $s(\theta(s_i, s_j, s_k)) \neq s_k - 1$ .

综合以上两种情况,  $s(\theta(s_i, s_j, s_k)) = s_k (s_j \geq s_j \geq s_k)$ . □

将定理2.12的证明推广到包含 $n$ 条路的广义 $\theta$ 图 $\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 中, 不难发现, 定理2.5的(I)-

(IV)显然成立, 在条件(V)中,  $d_{\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq k$ , 其中  $k = s_n \geq 2, s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ . 于是, 得到广义 $\theta$  图的超欧拉指数  $s(\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)) = s_n(s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n)$ .

**定理2.13** 中心 $\theta$  图 $\theta^*(s_i^1, s_j^1, s_k^1; s_i^2, s_j^2, s_k^2; \dots; s_i^p, s_j^p, s_k^p)$  (其中  $s_i^t \geq s_j^t \geq s_k^t, s_k^1 \leq s_k^2 \leq \dots \leq s_k^p$ ) 的超欧拉指数

$$s(\theta^*(s_i^1, s_j^1, s_k^1; s_i^2, s_j^2, s_k^2; \dots; s_i^p, s_j^p, s_k^p)) = s_k^p.$$

**证明** 为了方便证明, 不妨设  $s_i^t \geq s_j^t \geq s_k^t, t = 1, 2, \dots, p$ , 且  $s_k^1 \leq s_k^2 \leq \dots \leq s_k^p$ , 合并的端点为  $S$ , 则另一个端点分别记为  $N_1, N_2, \dots, N_p$ . 为了标记简洁, 我们在以下的证明中把中心 $\theta$  图记为  $\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t), t = 1, 2, \dots, p$ , 则  $s_i^t, s_j^t, s_k^t$  的取值只需考虑以下两种情况:

(1) 首先考虑对每一个  $t, s_i^t, s_j^t, s_k^t$  中至少有1 个取值为1, 即  $s_i^t = 1$  或  $s_j^t = 1$  或  $s_k^t = 1, t = 1, 2, \dots, p$ .

此时中心 $\theta$  图中的每一个 $\theta$  子图中都有一条路内部顶点个数为1, 此时的图形与中心一致 $\theta$  图同构.  $L(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t))$  是超欧拉的. 则  $s(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \leq 1$ . 由于中心 $\theta$  图本身没有生成欧拉子图, 则  $s(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \neq 0$ , 因此  $s(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) = 1$ .

(2) 剩下的情况都可以用以下方法去处理.

由定理2.5, 我们需要证明以下结论:  $S_{s_k^p}(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \neq \emptyset$ . 为了方便证明, 中心 $\theta$  图  $\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)$  中不包含端点  $N, S$  的三条路分别记为  $P_i^t, P_j^t, P_k^t$ , 其中  $t = 1, 2, \dots, p$ . 当  $s_i^t \geq s_j^t \geq s_k^t, t = 1, 2, \dots, p$  时, 我们选择子图  $H_0$  为由中心点  $d_0$  与路  $P_i^t, P_j^t$  构成的闭迹, 表示为  $H_0 = d_0 P_i^1 N_1 P_j^1 d_0 P_i^2 N_2 P_j^2 d_0 \dots P_i^p N_p P_j^p d_0$ . 我们选择子图  $H$  为  $H_0$  与路  $P_k^t$  上所有顶点的集合. 则  $H = H_0 \bigcup_{t=1}^p V(P_k^t)$ .

此时选择的  $H$  为闭迹与孤立点, 则满足条件(I):  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H)$ .

$H$  中包含了原图  $\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t), t = 1, 2, \dots, p$  的所有点, 也必然满足条件条件(II):

$$V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3}^{\Delta(\theta^*)} V_i(\theta^*) \subseteq V(H).$$

对任意的枝  $b \in B(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \setminus B_H(\theta^*(s_i, s_j, s_k))$ , 由于  $s_i^t \geq s_j^t \geq s_k^t, t = 1, 2, \dots, p, s_k^1 \leq s_k^2 \leq \dots \leq s_k^p$ , 所以  $b$  的长度不超过  $s_k^p + 1$ , 即  $|E(b)| \leq s_k^p + 1 = k + 1$ , 其中  $k = s_k^p$ , 于是(III) 成立.

由于图  $\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t), t = 1, 2, \dots, p$  中, 没有  $B_1(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t))$ , 显然(IV) 成立.

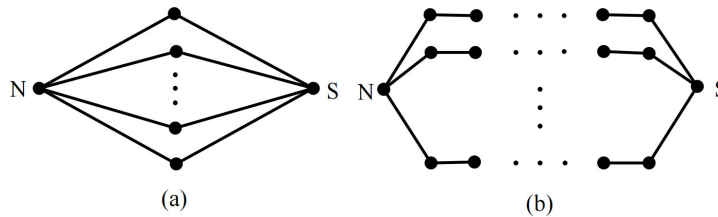
$H$  中的每个子图  $H_1$ , 事实上,  $H_1$  是  $H_0$  或  $V(P_k^t), t = 1, 2, \dots, p$ . 显然  $H_1$  与  $H - H_1$  之间的距离为1, 即  $d_{\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq k$ , 其中  $k = s_k^p \geq 2$ , 于是(V) 成立.

在此情形下,  $S_{s_k^p}(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \neq \emptyset$ , 则  $L^{s_k^p}(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t))$  是超欧拉的, 即  $s(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \leq s_k^p$ . 由于  $L^{s_k^p-1}(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t))$  中没有生成欧拉子图, 故  $s(\theta^*(s_i^t, s_j^t, s_k^t)) \neq s_k^p - 1$

综合以上两种情况,  $s(\theta^*(s_i^1, s_j^1, s_k^1; s_i^2, s_j^2, s_k^2; \dots; s_i^p, s_j^p, s_k^p)) = s_k^p. (s_i^t \geq s_j^t \geq s_k^t, s_k^1 \leq s_k^2 \leq \dots \leq s_k^p)$ . □

**定理2.14** 一致 $\theta$  图 $\theta(n; q)$  的超欧拉指数

$$s(\theta(n; q)) = \begin{cases} q, & n = 2t + 1 (t = 1, 2, \dots, k); \\ 0, & n = 2t + 2 (t = 1, 2, \dots, k). \end{cases}$$



**Figure 2.** (a) is  $\theta(n; 1)$ ; (b) is  $\theta(n; q)$

**图 2.** (a)为 $\theta(n; 1)$ ; (b)为 $\theta(n; q)$

**证明** 当 $n \geq 3, q \geq 1$  时, 我们可以分为 $n$  取奇数和 $n$  取偶数两种情形考虑: 当 $n = 1, q \geq 1$  时, 一致 $\theta$  图 $\theta(1; q)$  为一条路, 因此, 此情况不考虑.

**情形1.** 当 $n = 2t + 1 (t = 1, 2, \dots, k), q = 1$  时(见图 2), 这是一个奇阶二部图 $K_{2, 2t+1}$ , 此图中不存在生成欧拉子图, 所以 $s(\theta(2t + 1; 1)) \neq 0$  由定理2.5可得, 我们只需要证明 $S_1(\theta(2t + 1; 1)) \neq \emptyset$ . 我们选择子图 $H = \bigcup_{i=1}^{2t+3} H_i(\theta(2t + 1; 1))$ , 每个 $H_i(\theta(2t + 1; 1))$  都是一致 $\theta$  图中的每个顶点.

那么 $H$  显然满足条件(I)和条件(II):

(I)  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H)$ ;

(II)  $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3}^{\Delta(\theta)} V_i(\theta) \subseteq V(H)$ .

对任意的枝 $b \in B(\theta(2t + 1; 1)) \setminus B_H(\theta(2t + 1; 1))$ , 此时其长度为2, 即 $|E(b)| = 2 \leq k + 1$ , 其中 $k = 1$ , 于是(III) 成立.

由于图 $\theta(2t + 1; 1)$  中,  $B_1(\theta(2t + 1; 1)) = \emptyset$ , 显然(IV) 成立.

下面证明条件(V): 对于 $H$  中的每个子图 $H_1, H_1$  与 $H - H_1$  之间的距离为1, 即 $d_{\theta(2t+1; 1)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq k$ , 其中 $k = 1$ , 于是(V)成立.

因此,  $S_1(\theta(2t + 1; 1)) \neq \emptyset$ , 则 $L^1(\theta(2t + 1; 1))$  是超欧拉的, 即 $s(\theta(2t + 1; 1)) \leq 1$ .

**情形2.** 当 $n = 2t + 1 (t = 1, 2, \dots, k), q \geq 2$  时(见图2), 此图中不存在生成欧拉子图, 所以 $s(\theta(2t + 1; q)) \neq 0$ . 由定理2.5可得, 我们只需要证明 $S_1(\theta(2t + 1; q)) \neq \emptyset$ . 我们选择子图 $H = \bigcup_{i=1}^{q(2t+1)+2} H_i(\theta(2t + 1; q))$ , 每个 $H_i(\theta(2t + 1; q))$  都是一致 $\theta$  图中的每个顶点.

那么 $H$  显然满足条件(I)和条件(II):

- (I)  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H);$
- (II)  $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3}^{\Delta(\theta)} V_i(\theta) \subseteq V(H).$

对任意的枝  $b \in B(\theta(2t+1, q)) \setminus B_H(\theta(2t+1, q))$ , 此时其长度为  $q+1$ , 即  $|E(b)| = q+1 \leq k+1$ , 其中  $k = q$ , 于是(III) 成立.

由于图  $\theta(2t+1, q)$  中,  $B_1(\theta(2t+1, q)) = \emptyset$ , 显然(IV) 成立.

对于  $H$  中的每个子图  $H_1$ ,  $H_1$  与  $H - H_1$  之间的距离为1, 即  $d_{\theta(2t+1, q)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq k$ , 其中  $k = q$ , 于是(V)成立.

因此,  $S_1(\theta(2t+1, q)) \neq \emptyset$ , 则  $L^1(\theta(2t+1, q))$  是超欧拉的, 即  $s(\theta(2t+1, q)) = q$ .

**情形3.** 当  $n = 2t + 2 (t = 1, 2, \dots, k)$ ,  $q \geq 1$  时, 这是一个偶子图, 所以在图中很容易找到生成的欧拉子图, 所以  $\theta(2t+2, q)$  图自身就是超欧拉的, 所以在这样的情况下  $s(\theta(2t+2, q)) = 0$ .

因此, 一致  $\theta(n; q)$  图的超欧拉指数

$$s(\theta(n; q)) = \begin{cases} q, & n = 2t + 1 (t = 1, 2, \dots, k); \\ 0, & n = 2t + 2 (t = 1, 2, \dots, k); \end{cases}$$

得证. □

本节中对  $q, p$  的取值与前面要求一致, 对  $n$  在原有的条件 ( $n \geq 3$ ) 的基础上进一步考虑了  $n = 1$  和  $n = 2$  的情况, 得到结论如下:

**定理2.15** 中心一致  $\theta$  图  $\theta^*(n; q; p)$  的超欧拉指数

$$s(\theta^*(n; q; p)) = \begin{cases} q + 1, & n = 1; \\ 0, & n = 2; \\ q, & n \geq 3. \end{cases}$$

**证明 情形1.**  $n = 1$  时, 与  $p$  和  $n$  的取值无关, 根据图的结构, 此时的图是一个树, 树本身不存在生成的欧拉子图, 所以  $s(\theta^*(1; q; p)) \neq 0$  由定理2.5, 我们只需要证明  $S_{q+1}(\theta^*(1; q; p)) \neq \emptyset$ . 我们选择子图  $H$  为图  $\theta^*(1; q; p)$  的所有顶点的集合, 即  $H = \bigcup_{i=1}^{p(q+1)+1} H_i$ . 其中  $H_i$  为  $\theta^*(1; q; p)$  的任一顶点. 那么  $H$  显然满足条件(I)和条件(II):

- (I)  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H);$
- (II)  $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3}^{\Delta(\theta^*)} V_i(\theta^*) \subseteq V(H).$

对任意的枝  $b \in B(\theta^*(1; q; p)) \setminus B_H(\theta^*(1; q; p))$ , 此时其长度为  $q+1$ , 即  $|E(b)| = q+1 \leq (q+1)+1 \leq k+1$ , 其中  $k = q+1$ , 于是(III) 成立.

对任意的枝  $b \in B_1(\theta^*(1; q; p))$ , 此时其长度为  $q+1$ , 都有  $|E(b)| = q+1 \leq k$ , 其中  $k = q+1$ , 于

是(IV)成立.

对于 $H$ 中的每个子图 $H_1$  (即 $\theta^*(1; q; p)$ 的任意顶点),  $H_1$ 与 $H - H_1$ 之间的距离显然为1, 即 $d_{\theta^*(1; q; p)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq k$ , 其中 $k = q + 1$ , 于是(V)成立.

因此,  $S_{q+1}(\theta^*(1; q; p)) \neq \emptyset$ . 则 $L^{q+1}(\theta^*(1; q; p))$ 超欧拉的, 即 $s(\theta^*(1; q; p)) \leq q + 1$ .

由于 $L^q(\theta^*(1; q; p))$ 图中还存在悬挂边, 所以不可能存在欧拉生成子图, 即 $s(\theta^*(1; q; p)) \neq q$ . 那么 $s(\theta^*(1; q; p)) = q + 1$ .

**情形2.** 当 $n = 2$ 时, 同样与 $p$ 和 $n$ 的取值无关. 这是一个偶子图, 所以在图中很容易找到生成的欧拉子图, 所以 $s(\theta^*(2; q; p))$ 图自身就是超欧拉的, 所以在这样的情况下 $s(\theta^*(2; q; p)) = 0$ , 见图3.

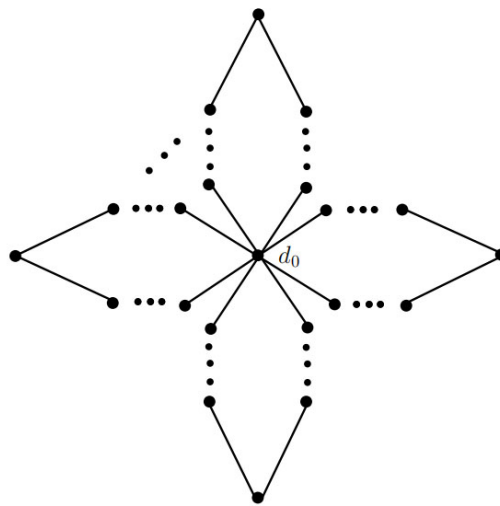


Figure 3.  $\theta^*(2; q; p)$

图 3.  $\theta^*(2; q; p)$

**情形3.**  $n \geq 3, q \geq 1$ 时根据图的结构可知, 此时图不含生成的欧拉子图, 所以超欧拉指数 $s(\theta^*(n; q; p)) \neq 0$ .

由定理2.5, 我们只需要证明 $S_q(\theta^*(n; q; p)) \neq \emptyset$ . 我们选择子图 $H$ 为图 $\theta^*(n; q; p)$ 的所有顶点的集合, 即 $H = \bigcup_{i=1}^{p(qn+1)+1} H_i$ . 其中 $H_i$ 为 $\theta^*(n; q; p)$ 的任一顶点.

那么 $H$ 显然满足条件(I)和条件(II):

(I)  $d_H(x) \equiv 0 \pmod{2}, \forall x \in V(H)$ ;

(II)  $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i \geq 3}^{\Delta(\theta^*)} V_i(\theta^*) \subseteq V(H)$ .

对任意的枝 $b \in B(\theta^*(n; q; p)) \setminus B_H(\theta^*(n; q; p))$ , 此时其长度为 $q + 1$ , 即 $|E(b)| = q + 1 \leq k + 1$ , 其中 $k = q$ , 于是(III)成立.

由于图 $\theta^*(n; q; p)$ 中, 没有 $B_1(\theta^*(n; q; p))$ , (IV)显然成立.

对于  $H$  中的每个子图  $H_1$ ,  $H_1$  与  $H - H_1$  之间的距离显然为 1, 即  $d_{\theta^*(n; q; p)}(H_1, H - H_1) = 1 \leq q \leq k$ , 其中  $k = q$ , 于是 (V) 成立.

因此,  $S_q(\theta^*(n; q; p)) \neq \emptyset$ . 则  $L^q(\theta^*(n; q; p))$  是超欧拉的, 即  $s(\theta^*(n; q; p)) = q$ .

综合以上三种情况, 中心一致  $\theta$  图  $\theta^*(n; q; p)$  的超欧拉指数

$$s(\theta^*(n; q; p)) = \begin{cases} q + 1, & n = 1; \\ 0, & n = 2; \\ q, & n \geq 3. \end{cases}$$

因此, 此定理得证. □

## 4. 注记

吕和安在 [13] 研究了 Petersen 图的超欧拉指数, 也考虑了与 Petersen 图相关的特殊图的超欧拉指数, 确定了它们的超欧拉指数都为 1. 在他们的基础上, 我们主要研究了有关  $\theta$  图类的超欧拉指数, 其中包括  $\theta$  图, 广义  $\theta$  图, 中心  $\theta$  图, 一致  $\theta$  图, 中心一致  $\theta$  图的超欧拉指数. 通过对这些特定图类超欧拉指数的研究, 使我们对图的结构与其存在的哈密尔顿性或超欧拉性之间的关系有了进一步掌握, 也对这些指数与图的遍历问题或网络抗毁性之间的关系有了更清晰的认识, 为我们研究图的遍历问题和网络抗毁性提供了新的思路和方法. 文中得到的结果也丰富了图论中关于  $\theta$  图类的线图迭代性质的数据, 同时也反映了  $\theta$  图类的超欧拉指数与其遍历问题和网络抗毁性之间的关系.

## 基金项目

国家自然科学基金(11561056, 11661066), 青海省自然科学基金(2016-ZJ-914), 青海民族大学研究生创新项目(07M2021001)资助.

## 参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan.
- [2] Boesch, F.T., Suffel, C. and Tindell, R. (1977) The Spanning Subgraphs of Eulerian Graphs. *Journal of Graph Theory*, **1**, 79-84. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190010115>
- [3] Pulleyblank, W.R. (1979) A Note on Graphs Spanned by Eulerian Graphs. *Journal of Graph Theory*, **3**, 309-310. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190030316>
- [4] Chartrand, G. (1968) On Hamiltonian Line-Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **134**, 559-566. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1968-0231740-1>

- 
- [5] Clark, L.H. and Wormald, N.C. (1983) Hamiltonian-Like Indices of Graphs. *Ars Combinatoria*, **15**, 131-148.
- [6] Rajan, B., Rajasingh, I. and Venugopal, P. (2011) Metric Dimension of Uniform and Quasi-Uniform Theta Graphs. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, **2**, 37-46.
- [7] Putra, R.W. and Susanti, Y. (2018) On Total Edge Irregularity Strength of Centralized Uniform Theta Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **15**, 7-13. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2018.02.002>
- [8] Lai, H. (1990) Reduced Graphs of Diameter Two. *Journal of Graph Theory*, **14**, 77-87. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190140109>
- [9] 熊黎明, 刘展鸿, 易桂生. Super-Euler迭线图的特征刻画[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2000, 24(2): 107-110+121.
- [10] Xiong, L. and Liu, Z. (2002) Hamiltonian Iterated Line Graphs. *Discrete Mathematics*, **256**, 407-422. [https://doi.org/10.1016/s0012-365x\(01\)00442-3](https://doi.org/10.1016/s0012-365x(01)00442-3)
- [11] Xiong, L.M. and Yan, H.Y. (2005) On the Supereulerian Index of a Graph. *Journal of Beijing Institute of Technology*, **14**, 453-457.
- [12] Xiong, L.M. and Li, M.C. (2010) Supereulerian Index Is Stable under Contractions and Closures. *Ars Combinatoria*, **97**, 129-142.
- [13] Lv, S. and An, Z. (2025) Supereulerian Indices of Some Classes of Graphs. *Applied Mathematics*, **16**, 357-364. <https://doi.org/10.4236/am.2025.164019>