

一类单参数不确定性的流感峰值的分布鲁棒最优控制

林周栳

福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月10日

摘要

流感是一类典型的季节性传染病, 它的传播过程受到多种因素的影响, 例如毒株类型、气候、易感者行为模式、疫苗覆盖率与有效性等等。结合流感传播的不确定性与分布鲁棒优化的特点, 本文提出了一类具有矩约束的Chebyshev目标泛函的分布鲁棒优化控制模型, 用于设计最优疫苗接种策略以降低流感住院人数峰值。利用线性对偶理论, 将内层问题与外层问题分别求解。其中内层用线性规划方法求解, 外层通过设计粒子群算法进行求解。最后通过实例验证了算法的有效性。

关键词

分布鲁棒最优控制, 对偶转化, 极小极大最优控制, 粒子群算法, 流感

Distributionally Robust Optimal Control of the Influenza Peak under Single-Parameter Uncertainty

Zhouzhi Lin

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

Influenza is a typical seasonal infectious disease whose transmission dynamics are influenced by various factors, such as virus strain type, climate conditions, behavioral patterns of susceptible individuals, vaccine coverage, and vaccine effectiveness. Considering the uncertainty inherent in influenza transmission and the characteristics of distributionally robust optimization, this paper proposes a distributionally robust optimal control model with moment constraints and a Chebyshev-type objective functional. The model is designed to determine optimal vaccination strategies aimed at reducing the peak number of influenza-related hospitalizations. By employing linear duality theory, the inner and outer problems of the resulting optimization framework are solved separately. Specifically, the inner problem is solved using linear programming, while the outer problem is addressed through a particle swarm optimization algorithm. Finally, numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords

Distributionally Robust Optimal Control, Dual Transformation, Minimax Optimal Control, Particle Swarm Optimization, Influenza

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

流感的传播规模受到多种因素的共同作用，如毒株类型、气候、易感者行为模式、疫苗覆盖率与有效性等。这些不确定性因素使得每个流感季的因流感而住院的重症患者数量具有波动性。由于彻底消灭流感病原体在现实条件下难以实现，因此在流感防控实践中，政府通常以控制疫情规模作为主要目标。避免因重症住院人数过多而大量占用医疗资源，影响其他疾病患者获得必要的医疗服务或救治机会，加剧流感带来的社会危害。

传统的不确定性优化方法通常可以分为随机优化和鲁棒优化两类。这两类方法在实际应用中

各有局限 [1]- [3]。分布鲁棒优化结合了随机优化和鲁棒优化的优点，只需要随机变量的不完全分布信息来构造随机参数的分布空间。此类优化方法既不依赖于具体分布，也能降低解的保守性，因此更具有现实参考意义，受到越来越多学者的关注 [4]- [7]。

2016年，叶剑雄等人受分布鲁棒优化的启发，考虑了一类不确定参数自治切换系统的分布鲁棒最优控制问题 [8]，其中随机参数的概率分布未知，但一阶矩和二阶矩已知，并以最差期望性能为目标性能。王佳在利用非线性规划的方法对多参数不确定切换系统的分布鲁棒最优控制问题的内层问题进行求解 [9]。然而，目前将分布鲁棒优化方法应用于流感传播控制问题的研究仍然较少，尤其是在疫苗接种策略优化方面仍缺乏系统研究。

本文在考虑流感在每个年度的传染率的不确定性的基础上，基于文献 [8]的模型，引入了Chebyshev 目标泛函，将分布鲁棒最优控制方法应用于传染病的最优控制模型。通过历史数据构建模糊集，对流感传染率不确定性与疫苗接种行为进行刻画。在数据不完备或参数分布未知的情况下，给出了最差分布下住院人数峰值的期望值最小化的疫苗接种策略，作为疫苗接种策略制定的参考，有效减轻公共卫生系统的负担。

2. 单参数不确定性传染病模型

流感是一类在不同年份之间传播强度可能存在显著差异的流行性疾病 [10]。由于流感病毒的特性，使得易感者通过接种流感疫苗获得的免疫力随着时间推移而降低。因此即使接种过疫苗的群体在一个流感季内仍有可能感染流感。基于这些特点，本文提出一类带有免疫衰退、区分接种与未接种人口的传染病仓室模型。

2.1. 人群划分与状态变量定义

流感的感染率与重症率在疫苗接种群体与未接种疫苗群体两个群体之间表现出显著的差异 [11]。为了刻画该特性，本文将易感者、感染者、住院患者仓室细分为高风险类型与低风险类型，划分的状态仓室包括：

- 高风险易感者 $S_1(t)$ ：尚未感染且未接种过疫苗的群体；
- 低风险易感者 $S_2(t)$ ：经自然感染康复或者接种疫苗后，具有部分免疫力的群体；
- 高风险感染者 $I_1(t)$ ：已感染且具有传染能力的群体；
- 低风险感染者 $I_2(t)$ ：由低风险易感者受感染且具有传染能力的群体；
- 高风险住院患者 $H_1(t)$ ：因感染发展为重症并接受住院治疗的群体；
- 低风险住院患者 $H_2(t)$ ：由低风险感染者因感染发展为重症并接受住院治疗的群体；
- 康复者 $R(t)$ ：感染后康复并获得暂时性免疫的个体；
- 接种者 $V(t)$ ：通过疫苗接种获得暂时性免疫的个体。

2.2. 模型基本假设

在给出传染病模型前，本文作如下假设：

- **A1 (疫苗接种对象假设)**：疫苗接种仅针对高风险易感群体实施。易感个体完成疫苗接种后立即获得免疫力，成为接种者群体。
- **A2 (人口规模恒定假设)**：在研究时间尺度内，不考虑人口出生、自然死亡及迁移因素，总人口规模保持不变。
- **A3 (免疫衰减假设)**：康复者与接种者对流感具有免疫力，但该免疫力会随时间逐渐衰减，免疫个体最终重新成为易感者。

2.3. 模型仓室图与参数说明

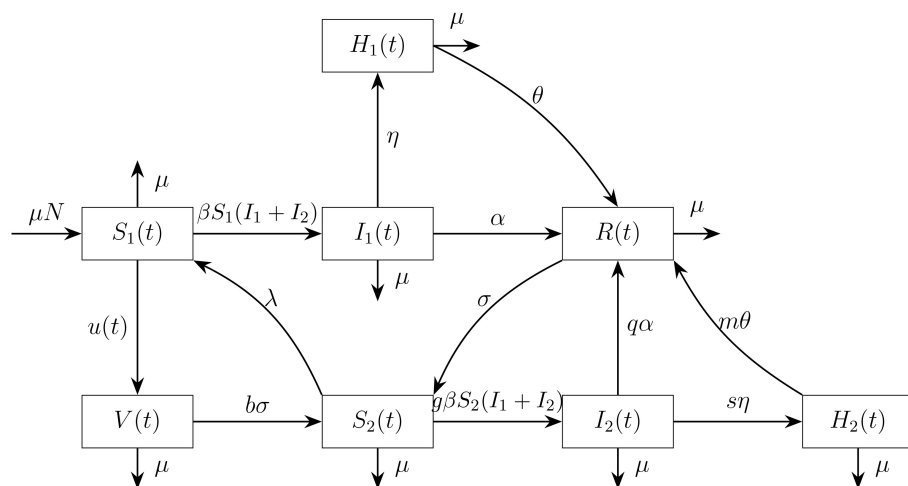


Figure 1. Compartmental flow diagram of the infectious disease model with waning immunity

图 1. 考虑免疫衰退机制的传染病模型的仓室流程图

在假设A1-A3的前提下，各仓室之间的转移关系如图1所示。其中，箭头表示转移方向，并在箭线上标注相应的转移率或转移流量。易感者 S_1 、 S_2 在与感染者 I_1 和 I_2 接触后，分别以传播率 β 、 $g\beta$ 转移至感染者 I_1 、 I_2 。同时，由于疫苗接种，者 S_1 以每日接种人数流量 $u(t)$ 转移至接种者 V 。感染者 I_1 、 I_2 分别以自愈速率 α 、 $q\alpha$ 转移至康复者 R ，或以住院速率 η 、 $s\eta$ 转移至住院者 H_1 、 H_2 。 $g(< 1)$ 表示低风险易感者相较高风险感染者的被感染概率更低； $q(> 1)$ 表示低风险感染者相较高风险感染者的自愈时间更短； $s(< 1)$ 表示低风险感染者相较高风险感染者的住院概率更小。康复者 R 与接种者 V 分别以速率 σ 与 $b\sigma$ 丧失免疫力，并转移至低风险易感者 S_2 。参数 b 用于刻画自然免疫与疫苗诱导免疫两者持续时间的差异。低风险易感者 S_2 以速率 λ 转移至 S_1 ，以刻画对流感的免疫力随时间衰退直至完全丧失的事实。住院者 H_1 与 H_2 分别以速率 θ 与 $m\theta$ 转移至康复者 R ， $m > 1$ 表示低风险住院患者相较高风险住院患者的康复时间更短。模型中各参数的生物学含义汇总于表1：

Table 1. Modle parameters

表 1. 模型参数

符号	含义	单位
N	总人口	人
β	传播率	/天
μ	出生/死亡率	/天
η	高风险感染者住院速率	/天
α	高风险感染者自愈速率	/天
θ	高风险感染者住院康复速率	/天
σ	自然感染康复后获得免疫衰退速率	/天
λ	低风险易感者的免疫衰退速率	/天
$u(t)$	每日接种人数流量	人/天
b	疫苗诱导免疫衰退与患病自愈免疫衰退的比率	无量纲
g	传播率比值 (低风险易感者相对高风险易感者)	无量纲
q	自愈率比值 (低风险感染者相对高风险感染者)	无量纲
s	住院率比值 (低风险感染者相对高风险感染者)	无量纲
m	康复率比值 (低风险住院者相对高风险住院者)	无量纲

2.4. 模型动力学方程

基于上述仓室划分以及各仓室间的转移关系, 得到传染病动力学模型:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \mu N + \lambda S_2 - \beta S_1(I_1 + I_2) - \mu S_1 - u(t), \\ \dot{S}_2 = \sigma(R + bV) - \lambda S_2 - g\beta S_2(I_1 + I_2) - \mu S_2, \\ \dot{I}_1 = \beta S_1(I_1 + I_2) - (\mu + \eta + \alpha)I_1, \\ \dot{I}_2 = g\beta S_2(I_1 + I_2) - (\mu + s\eta + q\alpha)I_2, \\ \dot{H}_1 = \eta I_1 - (\theta + \mu)H_1, \\ \dot{H}_2 = s\eta I_2 - (m\theta + \mu)H_2, \\ \dot{R} = \alpha(I_1 + qI_2) + \theta(H_1 + mH_2) - (\sigma + \mu)R, \\ \dot{V} = -(\mu + b\sigma)V + u(t). \end{cases} \quad (1)$$

此外, 由假设A2可知, 任意时刻 t , 各仓室人口数量满足如下守恒关系:

$$N = S_1(t) + S_2(t) + I_1(t) + I_2(t) + H_1(t) + H_2(t) + R(t) + V(t). \quad (2)$$

3. 具有Chebyshev目标泛函的分布鲁棒最优控制模型

目前,人类社会尚无方法可以永久消除流行性感冒的传播,因此主要防治工作是限制流感的传播规模,避免超额流感重症患者挤兑医疗资源。选择通过接种疫苗作为控制手段,以降低流感住院人数峰值为优化目标:

$$J(u) := \max_{t \in [0, T]} (H_1(t) + H_2(t)). \quad (3)$$

由于疫苗完全覆盖易感人群的成本过高,因此认为总的疫苗数量不能高于某一上限。该上限可由总人口的一定比例给出:

$$\int_0^T u(t) dt \leq U_{\max}. \quad (4)$$

本文以364天为控制周期,即在 $T = 360$ 天选取合适的疫苗接种策略 $u(t)$,使得在该段时间上的住院人数峰值达到最低,为了简化叙述,记:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t), x_7(t), x_8(t)) = (S_1, S_2, I_1, I_2, H_1, H_2, R, V), \quad (5)$$

并以 $f(x(t), u(t), \beta)$ 表示微分方程组(1)等式的右端速率矢量函数,则该最优控制模型描述如下:

$$(\text{DROCP}) : \min_{u \in U} \max_{F \in \mathcal{F}} \mathbb{E}_F J(u, \beta) \triangleq \max_{0 \leq t \leq T} (H_1(t) + H_2(t)) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \beta), \quad t \in [0, t_f], \quad x(0) = x_0, \quad (7)$$

$$\beta \sim F \in \mathcal{F}(\mu, \Sigma) := \{F \mid \mathbb{E}_F[\beta] = \mu, \mathbb{E}_F[(\beta - \mu)(\beta - \mu)^T] = \Sigma\}, \quad (8)$$

$$u(t) \in U_{ad} = \left\{ u(t) \in [0, \bar{u}] \mid \int_0^T u(t) dt \leq U_{\max} \right\}. \quad (9)$$

其中, μ 与 Σ 是通过观测历史数据得到的传染率 β 的均值与方差。

3.1. 模型的转化

首先考虑离散情形,即 $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 。其中 $\beta_i (i = 1, \dots, m)$ 为传播率的离散样本点。给定 $u(t) \in U_{ad}$ 及 $\beta = \beta_i$,记 $J_i^{(u)} = J(u, \beta_i)$,及 β 的分布 $F = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ 。性能指标则可改写为相应的等价形式:

$$\mathbb{E}_F[J(u, \beta)] = \sum_{i=1}^m q_i J(u, \beta_i) = \sum_{i=1}^m q_i \max_{t \in [0, T]} (H_1(t, u, \beta_i) + H_2(t, u, \beta_i)). \quad (10)$$

以及对应的分布约束可以写成如下形式:

$$(\text{ISP}) : \min_u \max_q \sum_{i=1}^m q_i J(u, \beta_i) \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}^i(t) = f^i(x^i(t), u(t), \beta_i), \quad t \in [0, t_f], \quad x^i(0) = x_0, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m q_i = 1, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^m q_i \beta_i = \mu, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^m q_i (\beta_i)^2 = \mu^2 + \Sigma, \quad (15)$$

$$q_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (16)$$

$$u(t) \in U_{ad}. \quad (17)$$

为了简便书写, 设 $\varphi(t, u, \beta_i) = H_1(t, u, \beta_i) + H_2(t, u, \beta_i)$ 。根据文献 [12] 中的 Jacobson-Miele 方法, 可以通过引入常值 η_i 与变量 $y_i(t)$, $z_i(t)$, $w_i(t)$, 构造新的等式约束:

$$\begin{aligned} \eta_i - \varphi(t, u, \beta_i) - y_i^2(t) &= 0, \quad t \in [0, T], \\ \dot{y}_i(t) &= z_i(t), \quad t \in [0, T], \\ \dot{z}_i(t) &= w_i(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (18)$$

以及对应的边界条件:

$$\begin{aligned} [\eta_i - \varphi(t, u, \beta_i) - y_i^2(t)]_{t=0} &= 0, \\ \left[\frac{\partial \varphi(t, u, \beta_i)}{\partial t} + 2y_i(t)z_i(t) \right]_{t=0} &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t, u, \beta_i) + 2z_i^2(t) + 2y_i(t)w_i(t) \right]_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

记 $\tilde{x} = (x, y_i, z_i)$, 得到:

$$\dot{\tilde{x}}^i = \tilde{f}^i(\tilde{x}, u, \beta_i). \quad (20)$$

由于问题 (ISP) 是线性规划问题, 且可行域非空有界, 内层子问题与其对偶问题之间不存在对偶间隙。因此, 原问题 (DROCP) 可等价地转化为如下问题:

$$\begin{aligned} (\text{Dual-DROCP}) \quad & \min_{u, \eta} \min_s s^\top b + \|\eta^2\| \\ \text{s.t.} \quad & s^\top a^i \geq J(u, \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & \dot{\tilde{x}}^i = \tilde{f}^i(\tilde{x}, u, \beta_i), \quad t \in [0, T], i = 1, 2, \dots, m, \quad \tilde{x}^i(0) = \tilde{x}^0, \\ & \eta_i - \varphi(t, u, \beta_i) - y_i^2(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & u \in U_{ad}. \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} & b[1, \mu, \mu^2 + \Sigma]^\top, \quad s[s_1, s_2, s_3]^\top, \\ & a^i[1, \beta_i, (\beta_i)^2]^\top, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (22)$$

4. 数值算例与结果讨论

问题(DROCP)在结构上属于带有动力系统约束的极小极大优化问题。虽然通过对偶转化可将内层关于概率分布的优化问题转化为线性规划问题,但外层问题仍然包含非线性的传染病动力学方程以及住院人数峰值函数,因此难以通过解析方法直接求解。对于此类高维非线性最优控制问题,基于群智能的启发式优化算法具有较好的全局搜索能力与实现简便性。

在数值计算中,将疫苗接种控制函数 $u(t)$ 在时间区间 $[0, T]$ 上进行离散化,将离散后的控制序列作为粒子的位置向量,即粒子群算法中的决策变量。对于给定的控制策略 $u(t)$ 与离散参数 β_i ,通过数值积分求解模型动力学方程,得到住院人数轨迹 $H_1(t) + H_2(t)$,并计算对应的峰值

$$J(u, \beta_i) = \max_{t \in [0, T]} (H_1(t) + H_2(t)).$$

在满足概率分布矩约束条件下,通过线性规划求解最坏情形下的概率分布 q_i ,从而得到目标函数

$$\sum_{i=1}^m q_i J(u, \beta_i).$$

该值作为粒子群算法的适应度函数,通过不断迭代更新粒子位置,最终得到使流感住院人数峰值最小的疫苗接种策略。

4.1. 模型参数设定

4.1.1. 确定性参数

本文中流感模型的主要参数取值主要参考文献 [13]。此外,考虑到自然感染康复后获得的免疫与疫苗诱导免疫在持续时间上的差异,本文根据参考文献 [14] [15]中关于免疫衰退的研究结果,对相关参数进行了设定,见表 2。

4.1.2. 传播率 β 的估计与处理

根据文献 [10] 对美国1972–2002年流感流行情况的评估结果,基本再生数 R_0 的取值范围为0.9–2.1,其均值约为1.3,标准误为0.05。在忽略人口自然死亡率的假设下,基本再生数 R_0 与传染率 β 满足关系

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \eta + \alpha}.$$

Table 2. Deterministic parameters**表 2.** 确定性参数

参数	符号	数值
高风险感染者住院速率	η	0.0015
高风险感染者自愈速率	α	0.2
低风险住院者康复速率	θ	0.1
免疫衰退速率	σ	1/180
免疫丧失速率	λ	1/60
免疫衰退修正系数	b	3/2
传播率修正系数	g	0.064
自愈率修正系数	q	1.1
住院率修正系数	s	0.1
康复率修正系数	m	1.1

据此可将 R_0 转化为传染率 β ，得到 β 的取值范围约为0.181–0.423，均值约为0.262，方差约为0.003。

在数值计算中，本文选取离散集合

$$\{0.18, 0.24, 0.30, 0.36, 0.42\}$$

作为传染率 β 的代表性取值。

4.2. 初始条件

模型初始条件根据美国2025年7月1日的人口预测数据确定。由于缺乏精确的初始感染规模数据，本文参考已有传染病动力学研究的常见处理方法，假设初期存在少量感染个体，并将总人口的0.01%设定为初始感染人数 [16] [17]。其余个体均处于易感状态。总人口 $N = 342034432$ 与各个仓室人群初始数量如下所示： $(S_1, S_2, I_1, I_2, H_1, H_2, R, V) = (0.9999N, 0, 0.0001N, 0, 0, 0, 0, 0)$ 。

4.3. 数值结果讨论

4.3.1. 免疫衰退率 σ 的灵敏度分析

模型参数 b 用于刻画接种者与康复者在向低风险易感者转化速率上的差异。图 2 给出了以 $\sigma = 1/180$ 为基准时，最优控制策略在不同免疫持续时间（康复天数）下的变化趋势。

进一步观察可以发现，在固定最优控制策略下，系统对免疫衰退率的扰动呈现出明显的不对称响应：当免疫有效期缩短时，住院人数峰值显著上升；而当免疫有效期延长时，峰值变化较小。

从传染病机理上看，当免疫有效期缩短时，群体免疫难以覆盖整个流感季，导致易感人群更快积累，从而增强传播过程，使得既定控制策略难以维持原有控制效果；而当免疫持续时间延长时，系统传播受到抑制，原有控制策略仍然能够有效作用，因此住院峰值变化较小。

从实际应用角度来看, 固定优化策略与再优化的结果表明, 在对免疫有效期进行保守估计时, 基于该参数设计的最优控制策略虽在免疫持续时间延长时表现出一定的保守性, 但能够对住院人数峰值提供上界控制, 从而为疫情规模评估提供一个具有安全性的参考基准。

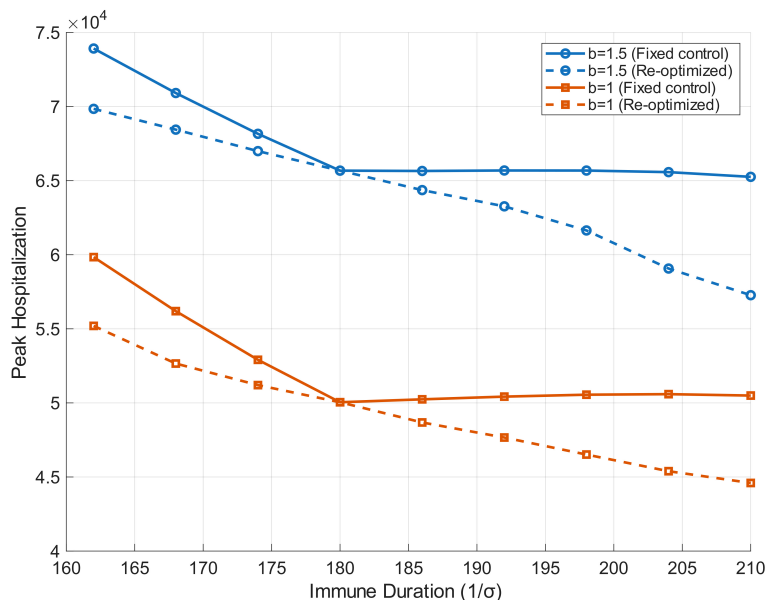


Figure 2. Comparison of fixed and re-optimized control under different immunity waning parameters

图 2. 不同免疫衰退参数下固定控制与再优化控制的敏感性对比

4.3.2. 最优接种策略的结果讨论

为了分析不同疫苗接种策略在不同传播强度下的控制效果, 本文选取若干典型传播率参数 β 进行数值模拟, 并分别比较无接种策略、平均接种策略以及最优接种策略下住院人数随时间的变化情况。图 3~4 给出了不同传播率条件下住院人数动态变化曲线的比较结果。

首先, 当传播率较低时 (如 $\beta = 0.18$), 疫情传播规模整体较小, 住院人数峰值仅为数百人。在该情况下, 不同疫苗接种策略之间的差异相对有限, 三条曲线的整体趋势较为接近。这表明在传播能力较弱的情形下, 疫情本身具有一定的自限性, 疫苗接种策略对疫情规模的影响相对有限。

然而, 随着传播率的增加, 疫情规模迅速扩大。当 $\beta = 0.24$ 时, 无接种策略下住院人数峰值已达到 10^4 量级, 而平均接种策略能够在一定程度上降低疫情规模, 但仍然存在较高的住院人数。相比之下, 最优接种策略能够显著降低住院人数, 在整个疫情周期内保持较低的住院水平, 显示出明显优于平均接种策略的控制效果。

当传播率进一步增大至 $\beta = 0.30$ 时, 疫情爆发更加剧烈, 无接种情形下住院人数峰值达到 10^5 量级。此时平均接种策略虽然能够降低部分峰值, 但仍然无法有效抑制疫情传播。而最优接种策略能够显著削弱疫情峰值, 并明显缩短疫情持续时间, 说明合理设计疫苗接种策略在高传播环境下具有重要作用。

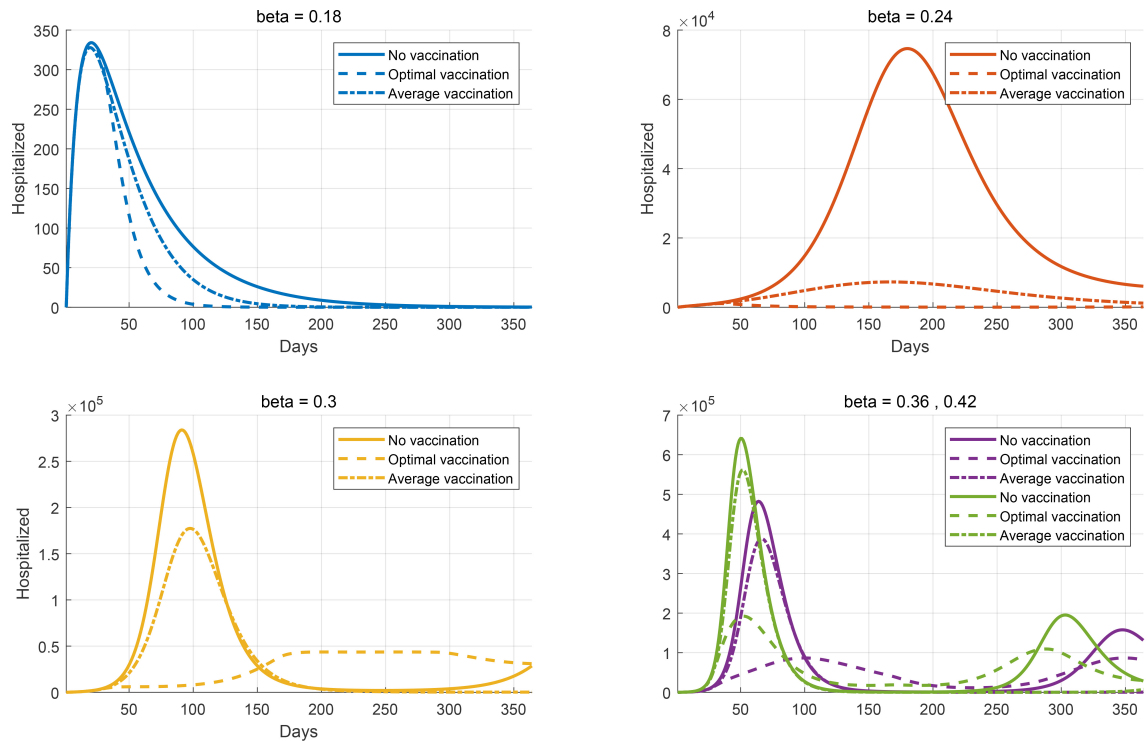


Figure 3. Effects of vaccination strategies on the peak number of hospitalizations under different transmission rates

图 3. 不同传播率下疫苗接种策略对住院峰值的影响

在传播率更高的情况下（如 $\beta = 0.36$ 和 $\beta = 0.42$ ），系统甚至可能出现多次疫情波动现象，即在疫情初次爆发后，由于免疫衰退导致易感人群逐渐增加，从而产生新的疫情峰值。数值结果表明，最优接种策略不仅能够有效降低首次疫情峰值，还能够一定程度上抑制后续疫情波动，进一步体现了其在长期疫情控制中的优势。

综合上述结果可以看出，随着传播率的增加，疫情规模呈现显著增长趋势，而疫苗接种策略在疫情控制中的作用也愈发重要。其中，最优接种策略在不同传播率条件下均表现出优于平均接种策略的控制效果，不仅能够有效降低住院人数峰值，还能够延缓疫情高峰的出现，从而为公共卫生系统提供更充足的应对时间。

5. 结论

5.1. 主要结论

本文考虑了单参数不确定的分布鲁棒最优控制问题。以随机参数的均值、方差为约束，以最差期望性能为目标性能，建立基于矩信息的分布鲁棒最优控制模型。根据性能指标的特点，内层问题使用线性规划求解，再利用粒子群算法对外层进行求解。最后以一个流感实例验证了算法的有效性。

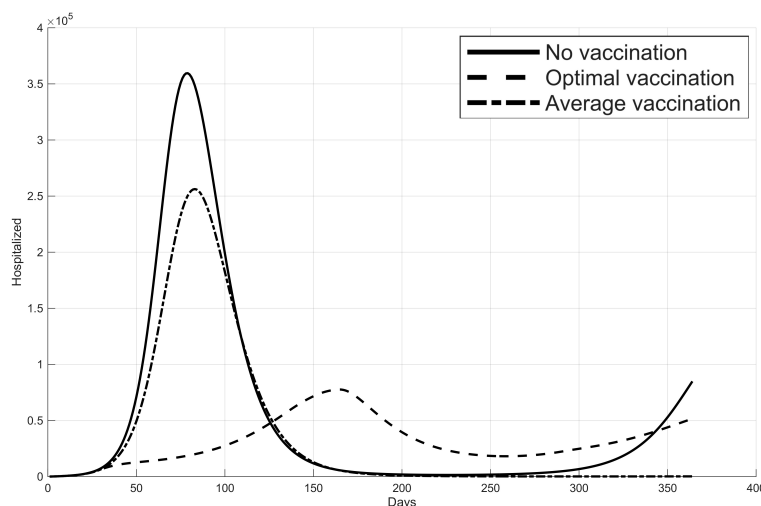


Figure 4. Effects of vaccination strategies on the peak number of hospitalizations under different transmission rates

图 4. 最差分布下疫苗接种策略对住院峰值的影响

5.2. 模型的局限性与未来研究方向

尽管本文构建的分布鲁棒最优控制模型能够在传播率存在不确定性的情况下设计有效的疫苗接种策略，并在数值算例中表现出较好的控制效果，但该模型仍存在一定的局限性。首先，本文假设人群为均匀混合系统，而现实中不同年龄群体和社会结构之间的接触模式存在明显差异，未来可引入年龄结构或接触矩阵以提高模型的现实性。其次，本文主要关注在参数不确定性条件下的最优控制策略设计，因此未对模型进行基于具体流感季数据的参数拟合。在未来研究中，可结合实际住院数据对确定性模型进行校准，以进一步验证模型对传播动态的刻画能力。此外，本文仅考虑疫苗接种作为控制措施，未来可将多种非药物干预措施纳入统一的最优控制框架，以获得更全面的疫情控制策略。

参考文献

- [1] Birge, J.R. and Louveaux, F. (2011) *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Science & Business Media.
- [2] Ruszczyński, A. and Shapiro, A. (2003) *Stochastic Programming Models*. In: *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 10, Elsevier, 1-64. [https://doi.org/10.1016/s0927-0507\(03\)10001-1](https://doi.org/10.1016/s0927-0507(03)10001-1)
- [3] Ben-Tal, A., Nemirovski, A. and El Ghaoui, L. (2009) *Robust Optimization*. Princeton University Press, 1-576.
- [4] Goh, J. and Sim, M. (2010) Distributionally Robust Optimization and Its Tractable Approximations. *Operations Research*, **58**, 902-917. <https://doi.org/10.1287/opre.1090.0795>

- [5] Chen, X., Sim, M. and Sun, P. (2007) A Robust Optimization Perspective on Stochastic Programming. *Operations Research*, **55**, 1058-1071. <https://doi.org/10.1287/opre.1070.0441>
- [6] El Ghaoui, L. and Lebret, H. (1997) Robust Solutions to Least-Squares Problems with Uncertain Data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **18**, 1035-1064. <https://doi.org/10.1137/s0895479896298130>
- [7] Delage, E. and Ye, Y. (2010) Distributionally Robust Optimization under Moment Uncertainty with Application to Data-Driven Problems. *Operations Research*, **58**, 595-612. <https://doi.org/10.1287/opre.1090.0741>
- [8] Ye, J., Wang, L., Wu, C., Sun, J., Teo, K.L. and Wang, X. (2025) A Robust Optimal Control Problem with Moment Constraints on Distribution: Theoretical Analysis and an Algorithm. *Computers & Operations Research*, **176**, Article 106966. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106966>
- [9] 王佳, 张政颖. 一类多参数不确定切换系统的分布鲁棒最优控制[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 9072-9080. <https://doi.org/10.12677/AAM.2022.1112957>
- [10] Chowell, G., Miller, M.A. and Viboud, C. (2008) Seasonal Influenza in the United States, France, and Australia: Transmission and Prospects for Control. *Epidemiology and Infection*, **136**, 852-864. <https://doi.org/10.1017/s0950268807009144>
- [11] McLean, H.Q. and Belongia, E.A. (2021) Influenza Vaccine Effectiveness: New Insights and Challenges. *Cold Spring Harbor Perspectives in Medicine*, **11**, a038315. <https://doi.org/10.1101/cshperspect.a038315>
- [12] Miele, A., Mohanty, B.P., Venkataraman, P. and Kuo, Y.M. (1982) Numerical Solution of Minimax Problems of Optimal Control, Part 1. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **38**, 97-109. <https://doi.org/10.1007/bf00934325>
- [13] 洪云平. 分年龄组传染病动力学的时变传染率优化模型与计算[J]. 应用数学进展, 2026, 15(2): 237-246. <https://doi.org/10.12677/aam.2026.152065>
- [14] Tokars, J.I., Patel, M.M., Foppa, I.M., Reed, C., Fry, A.M. and Ferdinands, J.M. (2020) Waning of Measured Influenza Vaccine Effectiveness over Time: The Potential Contribution of Leaky Vaccine Effect. *Clinical Infectious Diseases*, **71**, e633-e641. <https://doi.org/10.1093/cid/ciaa340>
- [15] Ray, G.T., Lewis, N., Klein, N.P., Daley, M.F., Wang, S.V., Kulldorff, M., *et al.* (2018) Intraseason Waning of Influenza Vaccine Effectiveness. *Clinical Infectious Diseases*, **68**, 1623-1630. <https://doi.org/10.1093/cid/ciy770>
- [16] Lachiany, M. and Louzoun, Y. (2016) Effects of Distribution of Infection Rate on Epidemic Models. *Physical Review E*, **94**, Article 022409. <https://doi.org/10.1103/physreve.94.022409>
- [17] Guo, D., Li, K.C., Peters, T.R., Snively, B.M., Poehling, K.A. and Zhou, X. (2015) Multi-Scale Modeling for the Transmission of Influenza and the Evaluation of Interventions toward It. *Scientific Reports*, **5**, Article No. 8980. <https://doi.org/10.1038/srep08980>