

围长至少是 8 的平面图 G 的平方图的子色数

李吉剑

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026 年 3 月 8 日; 录用日期: 2026 年 4 月 2 日; 发布日期: 2026 年 4 月 10 日

摘要

本文研究的是平面图的平方图的子色数上界问题. 其中: 平面图的平方图是将原平面图中距离不超过 2 的顶点相连所构成的新图; 图的围长是指图中最短圈的长度; 而子色数的定义与图的特定染色方式相关. Cortés 等人在 2025 年证明了在平面图围长至少是 3 的一般情形下, 以及围长至少是 10 和 17 时, 其平方图的子色数的上界情况. 本文进一步研究得出了围长至少是 8 的平面图的平方图的子色数的上界为 38.

关键词

子色数, 平面图, 围长

The Subchromatic Number of the Square Graph of Planar Graph G with Girth at Least 8

Jijian Li

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

This paper focuses on the problem of the upper bound of the subchromatic number of the square graph of a planar graph. Among these concepts: the square graph of a planar graph is a new graph constructed by connecting vertices in the original planar graph such that the distance between any two connected vertices is no greater than 2; the girth of a graph is defined as the length of its shortest cycle; and the subchromatic number is defined in relation to a particular coloring method of a graph. Cortés et al. proved in 2025 the upper bounds of the subchromatic number of the square graph of a planar graph in the general case where the girth of the planar graph is at least 3, as well as when the girth is 10 and 17. This paper further shows that the upper bound of the subchromatic number of the square graph of a planar graph with girth at least 8 is 38.

Keywords

Subchromatic Number, Planar Graph, Girth

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于一个图 G , 图 G 的一个 k -子染色是指一个函数 $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$, 使得颜色为 i 的顶点集合所诱导的子图是若干互不相交的完全图的并. 图 G 的子色数记为 $\chi_{\text{sub}}(G)$, 定义为使 G 存在一个 k -子染色的最小整数 k (这一概念首次在文献 [1] 中被定义). 对于图 G , 其平方图定义为图 $G^2 = (V(G^2), E(G^2))$, 其顶点集为 $V(G^2) = V(G)$, 且当存在一条从 u 到 v 的路径满足 $\text{dist}_G(u, v) \leq 2$ 时, 令 $uv \in E(G^2)$.

对于任意图 G , 设 L 为 $V(G)$ 的一个线性序, 取 $k \in \mathbb{N}$ 且 $x, y \in V(G)$. 若在 G 中存在一条长度至多为 k 的路径 $P = z_0 z_1 \dots z_s$, 其中 $z_0 = x, z_s = y, s \leq k$, 并且 x 是该路径上线性序最小的顶点 (即路径上所有顶点 z 均满足 $z \in V_L^-[x]$), 且对任意 $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq i \leq s$, 都有 $y \leq_L z_i$, 则称 x 在线性序

L 下是从 y 出发半弱 k -可达的. 记 $\text{SemiReach}_k[G, L, y]$ 为相对于 L 从 y 出发所有半弱 k -可达顶点的集合, 图 G 的半弱 k -染色数记为 $\text{swcol}_k(G)$, 其定义为:

$$\text{swcol}_k(G) = \min_L \max_{y \in V(G)} |\text{SemiReach}_k[G, L, y]|.$$

注意到, 如果 k 是奇数, 则 $\text{swcol}_k(G)$ 与文献 [2] 和 [3] 中用于界定精确距离图色数的一个参数 (名为距离 $-k$ -染色数) 是一致的.

在文献 [4] 中, Cortés 等人引入了半弱 k -染色数, 得到了平面图 G 的 $\text{swcol}_4(G)$ 的上界 (参见论文 [4] 中定理 3.1).

定理 1.1 ([4]). 对于任意的平面图 G , 有 $\text{swcol}_4(G) \leq 43$. 进一步地, 设 g 为 G 的围长, 则

$$\text{swcol}_4(G) \leq \begin{cases} 39 & \text{若 } g \geq 10, \\ 15 & \text{若 } g \geq 17. \end{cases}$$

关于图 G 的平方图的子色数的研究, 在论文 [4] 中, Cortés 等人得到了在不同围长限制下, 平面图 G 的 $\chi_{\text{sub}}(G^2)$ 的上界为 43 (参见论文 [4] 中定理 1.4).

定理 1.2 ([4]). 对于任意围长为 g 的平面图 G , 我们有

$$\chi_{\text{sub}}(G^2) \leq \text{swcol}_4(G) \leq \begin{cases} 43 & \text{若 } g \geq 3, \\ 39 & \text{若 } g \geq 10, \\ 15 & \text{若 } g \geq 17. \end{cases}$$

在本文中, 和定理 1.2 的讨论方法类似, 对于平面图 G , 我们得到了围长为 $g \geq 8$ 时 $\chi_{\text{sub}}(G^2)$ 的上界为 38.

定理 1.3. 对于围长 $g \geq 8$ 的平面图 G , 我们有 $\chi_{\text{sub}}(G^2) \leq 38$.

2. 围长至少是 8 的平面图 G 的半弱 4-染色数

若在图 G 中, 路径 P 的两个端点之间在 G 中不存在更短的路径, 则称 P 为一条等距路径 (isometric path). 记 $\text{dist}_G(u, v)$ 为图 G 中从 u 到 v 的最短路径长度, $\text{dist}_P(u, v)$ 表示在路径 P 中从 u 到 v 的最短路径长度. 对于 P 的一个子路径, 如果 P 的端点为 u 与 v , 则记从 u 到 x 的子路径为 uPx , 从 x 到 v 的子路径为 xPv . 若两条不相交路径 P 与 P' 满足存在 $v \in V(P)$ 与 $v' \in V(P')$ 使得 $vv' \in E(G)$, 则称 P 与 P' 是相邻的.

图 G 的等距路径分解定义为 $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_s\}$ (其中 s 为某个正整数), 使得顶点集 $V(P_0), V(P_1), \dots, V(P_s)$ 构成 $V(G)$ 的一个划分, 且满足对每个 $i \in \{0, 1, \dots, s\}$, 子图 P_i 都是 $G - \bigcup_{j=0}^{i-1} V(P_j)$ 中的一条等距路径, 记 $\mathcal{P}_i = G - \bigcup_{j=0}^{i-1} V(P_j)$, 因此 $\mathcal{P}_0 = G$. 受 [4] 和 [5] 的启发, 我们同样也做如下定义:

定义 2.1 ([4]). 三角剖分平面图 G 的一个约简 (reduction) 是指一个等距路径分解 $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_s\}$, 满足以下条件:

1. 等距路径 P_0 由两个顶点构成, P_1 由单个顶点构成.
2. 对任意 $i \in \{0, \dots, s\}$, 路径 P_i 的端点为 w_i, w'_i (可能重合), 且对任意 $k \in \{2, \dots, s\}$, P_k 恰好与两条路径 P_h 和 P_j 相邻 (其中 $h < j < k$), 并存在 $v_k, v'_k \in V(P_h), z_k, z'_k \in V(P_j)$, 使得 $v_k z_k w_k v_k$ 和 $v'_k z'_k w'_k v'_k$ 均构成 G 中的有界面.
3. 若 P_k 有至少两种可能的选择, 则选择使 $v_k P_h v'_k w'_k P_k w_k v_k$ 内部顶点数最少的那一条路径.
4. 对于 \mathcal{P}_{k+1} 中的每个连通分支 K , $G[V(P_0) \cup \dots \cup V(P_k)]$ 中包含 K 的面的边界是一个圈, 其形式为: $D = v P_h v' z' P_j z v$, 其中 $h < j \leq k$.

为了便于说明, 我们给上述平面图 G 的约简提供构造 P_k 的一种直观示意, 如图 1 所示:

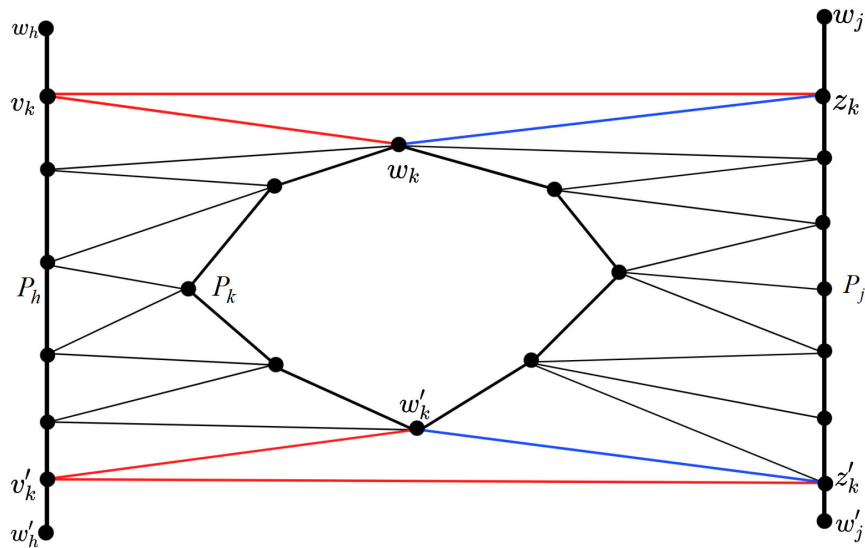


Figure 1. An illustration of the construction of P_k according to Definition 2.1

图 1. 根据定义 2.1 构造 P_k 的示意图

引理 2.2 ([6]). 设 G 为一个图, P 为 G 中的一条等距路径, $x, y \in V(P)$, 且 $v \in V(G)$. 若 $\text{dist}_G(v, x) \leq r$ 且 $\text{dist}_G(v, y) \leq r$, 则有 $\text{dist}_P(x, y) \leq 2r$. 特别地, 在 P 中与 v 的距离至多为 r 的顶点数不超过 $2r + 1$.

在论文 [6] 中 van den Heuvel 等人证明了每一个具有三角剖分的平面图都有一个约简, 即使上述定义 2.1 中的第 3 条没有被包括在该论文中, 而是在 [5] 中被首次考虑.

引理 2.3 ([6]). 每个三角剖分的平面图都有一个约简.

和定理 1.1 的证明相似, 我们得出了如下结果:

定理 2.4. 对于围长 $g \geq 8$ 的平面图 G , 我们有 $\text{swcol}_4(G) \leq 38$.

定理 2.4 证明. 设 G 是一个围长 $g \geq 8$ 的平面图, 假设 G 是连通的. 因为增加 G 中的边 $\text{swcol}_4(G)$ 并不会增加, 所以我们可以添加边使得 G 是一个三角剖分图.

由引理 2.3, G 有一个约简 $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_s\}$. 根据定义 2.1, 我们记 G 的外部 (三角) 面为 $w_0w_1w_2w_0$, 选取该面上的任意一条边的两个端点 $w_i, w_j \in \{w_0, w_1, w_2\}$ 作为 P_0 , 另一个点作为 P_1 .

对于 $k \geq 2$, 若 P_k 与 P_h 和 P_j 相邻, 且 $h < j < k$, 则称 P_h 是 P_k 的经理, P_j 是 P_k 的工头, 并称 P_h 和 P_j 都是 P_k 的上级.

接下来定义图 G 的线性序 L :

(†) 对于任意 $x \in V(P_i)$ 与 $y \in V(P_j)$, 其中 $P_i, P_j \in \mathcal{P}$, 若 $i < j$, 则定义 $x <_L y$.

为了使线性序 L 的定义完整, 还需要定义每条路径内部顶点的顺序. 我们递归地进行如下定义:

(‡) 首先, 对于 P_0 , 由于 $|V(P_0)| = 2$, 且 $V(P_0) = \{w_0, w'_0\}$, 令 $w_0 <_L w'_0$. 对于 P_1 , 由于 $|V(P_1)| = 1$, 其顶点在定义线性序时紧接在 $V(P_0)$ 之后.

现在考虑任意一条 P_k , 其中 $2 \leq k \leq s$. 首先确定 P_k 的两个端点 w_k, w'_k . 考虑 P_k 的经理 P_h , 由于存在 $v_k, v'_k \in V(P_h)$, 且 $V(P_h)$ 在 L 中的顺序已确定, 我们选择 $v_k <_L v'_k$. 因此, 将与 v_k 相邻的 P_k 的端点记为 w_k , 另一个端点记为 w'_k . 而当 $v_k = v'_k$ 时, 此时 w_k, w'_k 选择是任意的.

不妨设 $P_k = x_0x_1 \dots x_t$, 其中 $x_0 = w_k, x_t = w'_k$. 则对于任意 $0 \leq p < q \leq t$, 定义 $x_p <_L x_q$.

固定任意点 $v \in V(G)$, 并假设 $v \in V(P_k)$, 其中 $P_k \in \mathcal{P}$, 我们将证明 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]|$ 满足所需的上界. 对于任意的 $d \in \{0, 1, \dots, s\}$, 令 $W_d = V(P_d) \cap \text{SemiReach}_4[G, L, v]$.

若 $P_k = P_0$, 则由于 $|V(P_0)| = 2$, 至多存在一个顶点 u 使得 $u <_L v$, 因此我们有 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 2$.

若 $P_k = P_1$, 则由于 $|V(P_1)| = 1$, 至多存在两个顶点 u 使得 $u <_L v$, 因此我们有 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 3$. 现在假设 $k \geq 2$.

断言 2.5. 如果 G 的围长至少是 8, 我们有 $|W_k| \leq 4$, 其中 $k \geq 2$.

证明. 令 $P_k = x_0x_1 \dots x_t$, 其中 $x_0 = w_k, x_t = w'_k$, 并设 $v = x_m$. 根据 $V(G)$ 上线性序 L 的定义, v 可以到达自身, 还可以到达 $x_{m-1}, x_{m-2}, x_{m-4}$ (若这些顶点存在). 因为任意一条从 v 出发弱 4-可达到 x_{m-3} 的路都会形成一个长度至多是 7 的圈, 所以如果图 G 的围长至少是 8, 则点 x_{m-3} 无法从 v 弱 4-可达. 因此, $|W_k| \leq 4$. \square

根据平面图约简的定义, 如果 $k \geq 2$, 则 P_k 有两个上级, 不妨假设 P_h 和 P_j 是 P_k 的上级. 不失一般性, 设 P_h 是 P_k 的经理, P_j 是 P_k 的工头, 且满足 $h < j < k$. 若 G 是一个三角剖分图, 根据定义 2.1 中的第 2 条, P_h 是 P_j 的上级. 如果 $j = 1$, 则 $\text{SemiReach}_4[G, L, v] \subseteq W_0 \cup W_1 \cup W_k$, 根据断言 2.5, 则有 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 1 + 2 + 4 = 7$. 现在假设 $j \geq 2$. 则根据平面图约简的定义, P_j 还有另一个上级, 设 P_i 是 P_j 的另一个上级. 则根据定义 2.1 中第 2 条, 我们知道 P_h 和 P_i 这两条路径中, 其中一条是另一条的上级.

如果 $h \leq 1$, 则 $\text{SemiReach}_4[G, L, v] \subseteq W_0 \cup W_1 \cup W_i \cup W_j \cup W_k$, 则根据断言 2.5 和引理 2.2, 我们有 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq 1 + 2 + 2 \times 9 + 4 = 25$. 因此假设 $h \geq 2$, 所以设 P_g 和 P_f 是 P_h 的

两个上级, 其中 P_g 是 P_h 的经理, P_f 是 P_h 的工头. 注意到这些等距路径不一定是不同的路径, 可能会存在 $P_i \in \{P_g, P_f\}$ 的情况. 我们首先证明 $P_i \notin \{P_g, P_f\}$ 的情况, 即上述路径都是不同的.

断言 2.6. 我们有 $\text{SemiReach}_4[G, L, v] \subseteq W_k \cup W_h \cup W_j \cup W_i \cup W_f \cup W_g$.

证明. 假设 $u \in \text{SemiReach}_4[G, L, v]$, 并设 Q 为见证从 v 出发半弱 4-可达 u 的 $\{v, u\}$ -路径. 根据半弱 4-染色数的定义, 在 Q 中最多有两个点在线性序 L 中比 v 小.

如果在 Q 中, 只有一个点 x_1 满足 $x_1 \leq_L v$, 则 $x_1 = u$. 由于 P_h 和 P_j 是 P_k 的上级, 因此我们有 $u \in W_k \cup W_h \cup W_j$.

如果在 Q 中, 存在两个顶点 $x_1, x_2 \in V(Q)$, 在线性序 L 下小于 v . 在这种情况下, 通过与上述相同的推理, 我们可以假设 $x_1 \in V(P_h) \cup V(P_j) \cup V(P_k)$ 且 $u = x_2$. 因此, 如果 u 不在 P_h, P_j 或 P_k 中, 则它必定在 P_h, P_k 或 P_j 的某个上级中. 根据定义, 这些上级是 P_g, P_f 和 P_i .

因此, 我们有 $\text{SemiReach}_4[G, L, v] \subseteq W_k \cup W_h \cup W_j \cup W_i \cup W_f \cup W_g$. □

断言 2.7. 对于任意 $d \in \{k, h, j, f, g, i\}$, 我们有 $|W_d| \leq 9$.

证明. 注意到 P_d 是 \mathcal{P} 中的等距路径, 且我们已固定 $v \in V(P_k)$, 由引理 2.2, 令 $r = 4$, 可直接得到结论. □

断言 2.8. 如果 G 的围长至少是 8, 我们有 $|W_j| \leq 8$.

证明. 设 $x, y \in W_j$, 并令 Q_x 与 Q_y 分别为见证 x 与 y 从 v 出发半弱 4 可达的路径. 因为 P_h 是 P_j 的经理, P_i 是 P_j 的工头, 因此,

$$\text{dist}_{P_j}(x, y) \leq \text{dist}_{Q_x}(v, x) + \text{dist}_{Q_y}(v, y) - 1 \leq 7, \tag{1}$$

否则将与 P_j 是 \mathcal{P} 中的等距路径或者定义 2.1 中性质 3 矛盾, 因为从 x 到 v 的路径与从 y 到 v 的路径共同构成了一条更短或者相同的路径.

如果 G 的围长至少是 8, 我们观察到如果 $x \in W_j$, 设 x_1 是 x 在 P_j 中的邻点, 则 x_1 也可以在 W_j 中, 因为它们之间最多可以形成一个 9 长的圈. 因此, 根据引理 2.2, 再结合不等式 (1), 我们有 $|W_j| \leq 8$. □

断言 2.9. 如果 G 的围长至少是 8, 我们有 $|W_i| \leq 8$.

证明. 由于 P_h 是 P_j 的经理, 如果一条路径是从 v 半弱 4 可达 P_i 中的某个顶点, 那么这条路径必定与 P_j 相交. 设 Q_x 与 Q_y 分别为见证从 v 出发半弱 4 可达 $x, y \in V(P_i)$ 的路径, 并且 Q_x 和 Q_y 分别在顶点 x_1, y_1 处与 P_j 相交, 则 $|E(Q_x)| \leq 4, |E(Q_y)| \leq 4$. 根据 Q_x 和 Q_y 的定义, 以及 $x_1, y_1 \leq_L v$, 我们有 $x_1x \in E(G)$ 和 $y_1y \in E(G)$. 因此, $\text{dist}_{P_i}(x, y) \leq \text{dist}_{P_j}(x_1, y_1) + 2$, 否则将与 P_i 是 \mathcal{P} 中的等距路径矛盾, 因为在 P_j 中从 x_1 到 y_1 的路径与边 x_1x 和 y_1y 共同构成了一条更短的路径. 由于从 v 到 x_1 和 y_1 的路径长度最多为 3, 这意味着 $\text{dist}_{P_j}(x_1, y_1) \leq 5$, 否则将与 P_j 是等

距路径的性质矛盾, 或者与定义 2.1 中的性质 3 矛盾. 因此,

$$\text{dist}_{P_i}(x, y) \leq \text{dist}_{P_j}(x_1, y_1) + 2 \leq 7. \quad (2)$$

如果 G 的围长至少是 8, 则观察到如果 $x \in W_i$, 设 x_1 是 x 在 P_i 中的邻点, 则 x_1 也可以在 W_j 中, 因为它们之间最多可以形成一个 8 长的圈. 因此, 根据引理 2.2, 再结合不等式 (2), 我们有 $|W_i| \leq 8$. \square

断言 2.10. 如果 G 的围长至少是 8, 我们有 $|W_h \cup W_f| \leq 9$.

证明. 由于 P_g, P_h, P_k, P_j, P_i 和 P_f 均为互不相同的路径, 且根据等距路径分解的性质 (2), 对于 P_g 或 P_f 中的任意一条路径, 其顶点只能通过 P_h 中的顶点 v_k 或 v'_k 被 v 半弱 4-可达. 不失一般性, 假设这对 P_f 成立. 根据引理 2.2, v_k 和 v'_k 各自在 P_f 中最多有 3 个邻点.

情况 1. 若存在一条从 v 到 v_k 的长度不超过 3 的路径, 同时也存在一条从 v 到 v'_k 的长度不超过 3 的路径. 此时, 如果 G 的围长至少是 8, 则 $|W_f| \leq 2$, 并且 $\text{dist}_{P_h}(v_k, v'_k) \leq 6$, 因此可得 $|W_h| \leq 4$. 于是 $|W_h \cup W_f| \leq 4 + 2 = 7$.

情况 2. 如果仅存在一条从 v 到 v_k 或者 v'_k 的长度不超过 3 的路径. 不失一般性设这条路是到 v_k . 则此时 $|W_f| \leq 1$, 设 $w \in W_h$ 为使 $\text{dist}_{P_h}(v_k, w)$ 取得最大值的顶点, 则有 $\text{dist}_{P_h}(v_k, w) \leq 4 + 3 = 7$, 这进一步蕴含 $|W_h| \leq 8$. 从而 $|W_h \cup W_f| \leq 9$.

情况 3. 若不存在任何一条从 v 到 v_k 或 v'_k 的长度不超过 3 的路径, 则此时 $|W_f| = 0$. 由断言 2.7, 我们仍有 $|W_h| \leq 9$, 于是 $|W_h \cup W_f| \leq 9$.

综合所有情形, 其中最大的上界为 9, 由此证明完成. \square

综上, 对于围长至少是 8 的平面图 G , 如果 $P_i \notin \{P_g, P_f\}$, 则有 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq |W_k| + |W_j| + |W_i| + |W_g| + |W_h \cup W_f| \leq 4 + 2 \times 8 + 2 \times 9 = 38$.

而如果 $P_i \in \{P_g, P_f\}$, 则有 $|\text{SemiReach}_4[G, L, v]| \leq |W_k| + |W_j| + |W_g| + |W_h \cup W_f| \leq 4 + 8 + 2 \times 9 = 30$. \square

基于定理 2.4 的证明, 我们能发现在定理 1.1 中当平面图 G 的围长至少是 10 和 17 时, 它的半弱 4-染色数的上界仍有改进空间.

定理 1.3 证明. 结合定理 1.2 和定理 2.4, 我们可以很自然的得到如下结果: 对于任意的平面图 G , 如果 G 的围长至少是 8, 则我们有 $\chi_{\text{sub}}(G^2) \leq \text{swcol}_4(G) \leq 38$. \square

参考文献

- [1] Albertson, M.O., Jamison, R.E., Hedetniemi, S.T. and Locke, S.C. (1989) The Subchromatic Number of a Graph. *Discrete Mathematics*, **74**, 33-49.
[https://doi.org/10.1016/0012-365x\(89\)90196-9](https://doi.org/10.1016/0012-365x(89)90196-9)

- [2] van den Heuvel, J., Kierstead, H.A. and Quiroz, D.A. (2019) Chromatic Numbers of Exact Distance Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **134**, 143-163. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.05.007>
- [3] Almulhim, A. (2020) Estimating Low Generalized Coloring Numbers of Planar Graphs. Ph.D. Thesis, Arizona State University, 112 p.
- [4] Cortés, P.P., Kumar, P., Moore, B., Ossona de Mendez, P. and Quiroz, D.A. (2025) Subchromatic Numbers of Powers of Graphs with Excluded Minors. *Discrete Mathematics*, **348**, Article 114377. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.114377>
- [5] Almulhim, A. and Kierstead, H.A. (2022) On the Weak 2-Coloring Number of Planar Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article 112631. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112631>
- [6] van den Heuvel, J., de Mendez, P.O., Quiroz, D., Rabinovich, R. and Siebertz, S. (2017) On the Generalised Colouring Numbers of Graphs That Exclude a Fixed Minor. *European Journal of Combinatorics*, **66**, 129-144. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2017.06.019>