

粗糙算子在 Morrey 空间上的 一个 Sobolev 型 不等式

周辰泽

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年3月8日; 录用日期: 2026年4月2日; 发布日期: 2026年4月10日

摘要

主要研究粗糙奇异积分算子在 Morrey 空间上的 Sobolev 型不等式. 利用 Hardy-Littlewood 极大函数的点态不等式和 Morrey 空间中的有界性, 得到了粗糙奇异积分算子在 Morrey 空间上的一个由梯度范数控制的 Sobolev 型不等式.

关键词

极大函数, 点态估计, Morrey 空间, Sobolev 型不等式

A Sobolev-Type Inequality for Rough Operators on the Morrey Space

Chenze Zhou

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: March 8, 2026; accepted: April 2, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

The main goal of this paper focuses on the Sobolev-type inequalities of Rough Singular Integral Operator in the Morrey space. By using the pointwise inequality of the Hardy-Littlewood maximal function and the boundedness in the Morrey space, a Sobolev-type inequality controlled by the gradient norm for Rough Singular Integral Operator is obtained on the Morrey space.

Keywords

Maximum Function, Point State Estimation, Morrey Space, Sobolev-Type Inequality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

设 $0 < b < n$, b 阶的 Riesz 位势 I_b 定义为

$$I_b(f)(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} 2^{-b} \frac{\Gamma(\frac{n-b}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-b}} dy,$$

Riesz 位势在 PDE 中的一个重要应用是 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式 [1]

$$\|f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $1 \leq p < n$, $\bar{p} = \frac{np}{n-p}$ 且 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

在 PDE 中许多方程的线性主部如 $\partial_i a^{ij} \partial_j u$ 在系数光滑时,其解的二阶导数可以用粗糙奇异积分算子作用于 Δu 来表示,研究 T_Ω 在 Morrey 空间上有界性,可以直接研究解的二阶导数属于哪个 Morrey 空间,从而通过 Campanato 空间理论解决解的正则性问题.经典 L^p 空间只能得到几乎处处结果,而 Morrey 空间范数能反映函数在微小尺度上的平均振荡,这在处理临界情形时至关重要.

Sobolev 型不等式的更多推广形式和应用可参见文献 [1] [2]. 给定零阶齐次函数 $\Omega : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 对于局部可积函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 粗糙核奇异积分算子定义为 [3]

$$T_{\Omega}(f)(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(\frac{y}{|y|})}{|y|^n} f(x-y) d(y). \quad (1)$$

2025年, Hoang-Moen-Perez 在文献[[1], Theorem 1.1] 中证明了下面点态不等式

$$|T_{\Omega,p}(f)(x)| \leq C \|\Omega\|_{L^{n,\infty}(\mathbb{S}^{n-1})} I_p(|\nabla f|)(x), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

随后, Chamorro-Marcoci-Marcoci 利用上面由 Riesz 位势控制的不等式, 得到了一个更精确的 Sobolev 型点态不等式 [4], Theorem 1]. 本文的主要目的是利用 [4] 中给出的点态不等式, 通过 Hardy-Littlewood 极大函数的有界性, 研究粗糙奇异积分算子 T_{Ω} 在 Morrey 空间上由梯度范数控制的 Sobolev 型不等式.

Sobolev 型不等式是连接不同函数空间如 L^p, L^q 等空间的核心工具, 基于定理得到的不等式可进一步研究 Orlicz 空间, Lorentz 空间的 Sobolev 型不等式及加权不等式, 该不等式通过建立范数控制函数值, 在 PDE 中实现了从“弱积分意义”到“点态控制”, 是连接函数空间理论与方程解的正则性的桥梁.

为此我们首先回顾一些定义和记号.

定义 1 [4] 设 $1 \leq p \leq q < \infty$, 齐次 Morrey 空间 $\dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^p : \|f\|_{\dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)} =: \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \left(\frac{1}{r^{n(1-\frac{p}{q})}} \int_{B(x,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad (2)$$

其中, $B(x, r)$ 为 \mathbb{R}^n 以 x 为中心, $r > 0$ 为半径的开球.

当 $p = q$ 时, 有

$$\dot{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

定义 2 [5] 设 $0 \leq \lambda < n, 1 \leq q < \infty$, 经典 Morrey 空间 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 范数定义为

$$\|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3)$$

当 $\lambda = 0$ 时, $L^{q,0}(\mathbb{R}^n)$ 即为通常定义的 Lebesgue 空间 $L^q(\mathbb{R}^n)$. 并且有恒等式

$$\| |f|^p \|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^{qp,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^p.$$

有关 Riesz 位势 I_b 和粗糙奇异积分算子 T_Ω 更多的研究结果参见文献 [6]- [14]

2. 主要结果

定理 设 $n \geq 2$, $1 < \rho < n$, 零阶齐次函数 $\Omega : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega d(\sigma) = 0$, 且 $\Omega \in L^\rho(\mathbb{S}^{n-1})$. T_Ω 由(1) 式所定义. 对任意固定的实参数 b, β , 使得 $1 < \bar{\rho} < b < \beta < n$, 其中 $\bar{\rho} = \frac{\rho n}{\rho n + \rho - n}$. 如果函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\nabla f \in \dot{M}^{b, \frac{bn}{\beta}}(\mathbb{R}^n)$, $\nabla f \in L^{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$, 那么对满足条件 $1 < b < p < +\infty$ 的任意 p , 成立

$$\|T_\Omega(f)(x)\|_{L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Omega\|_{L^\rho(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{bn}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \|\nabla f\|_{L^{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{1 - \frac{b}{\beta}}, \tag{4}$$

其中 $q = \frac{p}{1 - \frac{b}{\beta}}$.

3. 定理的证明

经典 Hardy-Littlewood 极大函数 M_B 定义为

$$M_B f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy,$$

其中, B 为 \mathbb{R}^n 的任意开球.

为完成定理的证明, 我们需要下面引理.

引理 [3] (点态不等式) 设 $n \geq 2$, $1 < \rho < n$, 零阶齐次函数 $\Omega : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega d(\sigma) = 0$, 且满足 $\Omega \in L^\rho(\mathbb{S}^{n-1})$. T_Ω 由(1) 式所定义. 如果固定一个实参数 b , 使得 $1 < \bar{\rho} < b < n$, 其中 $\bar{\rho} = \frac{\rho n}{\rho n + \rho - n}$. 再固定一个实数 β , 使得 $1 < b < \beta < n$. 那么, 对于函数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则有以下的点态估计

$$|T_\Omega(f)(x)| \leq C \|\Omega\|_{L^\rho(\mathbb{S}^{n-1})} (M_B(|\nabla f|^b)(x))^{\frac{1}{b} - \frac{1}{\beta}} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{bn}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}}.$$

定理的证明 在定理假设下, 上面的引理成立, 所以

$$|T_\Omega(f)(x)| \leq C \|\Omega\|_{L^\rho(\mathbb{S}^{n-1})} (M_B(|\nabla f|^b)(x))^{\frac{1}{b} - \frac{1}{\beta}} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{bn}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}}, \tag{5}$$

其中 $1 < \rho < n, 1 < b < \beta < n$.

设函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\nabla f \in \dot{M}^{b, \frac{bn}{\beta}}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\nabla f \in L^{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < b < p < +\infty$, 且有 $q = \frac{p}{1 - \frac{b}{\beta}}$. 因此, 由(3) 式, 在(5) 两端取 $L^{q, \lambda}$ 范数, 有

$$\begin{aligned}
& \|T_{\Omega}(f)(x)\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \left(\frac{1}{r^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |T_{\Omega}(f)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \|\Omega\|_{L^{\rho}(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{b\eta}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \left(\frac{1}{r^{\lambda}} \int_{B(x,r)} (M_B(|\nabla f|^b)(x))^{q(\frac{1}{b} - \frac{1}{\beta})} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \|\Omega\|_{L^{\rho}(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{b\eta}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \left(\frac{1}{r^{\lambda}} \int_{B(x,r)} (M_B(|\nabla f|^b)(x))^{q(\frac{1}{b} - \frac{1}{\beta})} \right)^{\frac{1}{q} \left(\frac{\beta-b}{\beta b} \right) \left(\frac{\beta b}{\beta-b} \right)} \\
&= C \|\Omega\|_{L^{\rho}(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{b\eta}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \|M_B(|\nabla f|^b)\|_{L^{q(\frac{\beta-b}{\beta b}), \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta-b}{\beta b}}.
\end{aligned}$$

当 $b > 1$ 时, 有 $q(\frac{\beta-b}{\beta b}) = \frac{p}{b} > 1$. 根据 Hardy-Littlewood 极大函数 M_B 在经典 Morrey 空间 $L^{q(\frac{\beta-b}{\beta b}), \lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性 [10], 有

$$\|T_{\Omega}(f)(x)\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Omega\|_{L^{\rho}(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{b\eta}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \|\nabla f\|_{L^{q(\frac{\beta-b}{\beta b}), \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta-b}{\beta b}}.$$

由于

$$\|\nabla f\|_{L^{q(\frac{\beta-b}{\beta b}), \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta-b}{\beta b}} = \|\nabla f\|_{L^{q(\frac{\beta-b}{\beta b}), \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta-b}{\beta}},$$

则有

$$\|T_{\Omega}(f)(x)\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Omega\|_{L^{\rho}(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{b\eta}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \|\nabla f\|_{L^{q(\frac{\beta-b}{\beta b}), \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta-b}{\beta}}.$$

由 $p = q(1 - \frac{b}{\beta})$, 得

$$\|T_{\Omega}(f)(x)\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Omega\|_{L^{\rho}(\mathbb{S}^{n-1})} \|\nabla f\|_{\dot{M}^{b, \frac{b\eta}{\beta}}}^{\frac{b}{\beta}} \|\nabla f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^{1 - \frac{b}{\beta}}.$$

从而定理得证.

基金项目

国家自然科学基金 (批准号:12361018)。

参考文献

- [1] Hoang, C., Moen, K. and Moreno, C.P. (2025) New Pointwise Bounds by Riesz Potential Type Operators. *Journal of Functional Analysis*, **289**, Article 111060.
<https://doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111060>

-
- [2] Ariño, M.A. and Muckenhoupt, B. (1990) Maximal Functions on Classical Lorentz Spaces and Hardy's Inequality with Weights for Nonincreasing Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **320**, 727-735. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1990-0989570-0>
- [3] Vaughan, R.C. (2003) *The Hardy-Littlewood Method*. Cambridge University Press.
- [4] Chamorro, D., Marcoci, A. and Marcoci, L. (2025) A New Pointwise Inequality for Rough Operators and Applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **550**, Article 129595. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129595>
- [5] Adams, D.R. (2015) *Morrey Spaces*. Springer International Publishing.
- [6] Stein, E.M. (1970) *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press.
- [7] Li, K., Pérez, C., Rivera-Ríos, I.P. and Roncal, L. (2019) Weighted Norm Inequalities for Rough Singular Integral Operators. *The Journal of Geometric Analysis*, **29**, 2526-2564. <https://doi.org/10.1007/s12220-018-0085-4>
- [8] Zorko, C.T. (1986) Morrey Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **98**, 586-592. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1986-0861756-x>
- [9] Deringoz, F., Guliyev, V.S., Nakai, E., Sawano, Y. and Shi, M. (2019) Generalized Fractional Maximal and Integral Operators on Orlicz and Generalized Orlicz-Morrey Spaces of the Third Kind. *Positivity*, **23**, 727-757. <https://doi.org/10.1007/s11117-018-0635-9>
- [10] 马继钢, 邓耀华. 关于Hardy-Littlewood极大函数的有界性[J]. 科学通报, 1991, 36(3): 236-237.
- [11] Lorentz, G.G. (1950) Some New Functional Spaces. *The Annals of Mathematics*, **51**, 37-55. <https://doi.org/10.2307/1969496>
- [12] Adams, D.R. and Xiao, J. (2012) Morrey Spaces in Harmonic Analysis. *Arkiv för Matematik*, **50**, 201-230. <https://doi.org/10.1007/s11512-010-0134-0>
- [13] Akbulut, A., Guliyev, V. and Mustafayev, R. (2012) On the Boundedness of the Maximal Operator and Singular Integral Operators in Generalized Morrey Spaces. *Mathematica Bohemica*, **137**, 27-43. <https://doi.org/10.21136/mb.2012.142786>
- [14] Kinnunen, J., Lehrbäck, J. and Vähäkangas, A. (2021) Maximal Function Methods for Sobolev Spaces. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/surv/257>