**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2026, 15(5), 121-132**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155213

# 双重色散方程行波解Hessian算子谱分析

李 涛[1,2]

[1]长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙
[2]长沙理工大学工程数学建模与分析湖南省重点实验室, 湖南 长沙

收稿日期：2026年4月13日；录用日期：2026年5月7日；发布日期：2026年5月15日

## 摘 要

谱分析的结果对于研究双重色散方程临界速度下行波解的稳定性情况具有重要意义。本文研究临界情况时双重色散方程行波解 **Hessian** 算子的谱分析。首先，基于方程的哈密顿结构，梳理动量与能量守恒律，构造由守恒律线性组合的泛函，分析该泛函在临界速度下的相关性质。其次，对该泛函在临界行波处的 **Hessian** 算子进行系统谱分析，明确其核空间，证明算子存在唯一负特征值，且本质谱位于正半轴。

## 关键词

双重色散方程，行波解，临界速度，谱分析

# Spectral Analysis of the Hessian Operator for Traveling Wave Solutions of the Double Dispersion Equation

**Tao Li**[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
[2]Hunan Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and Analysis in Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

文章引用: 李涛. 双重色散方程行波解Hessian算子谱分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 121-132.
DOI: 10.12677/aam.2026.155213

Received: April 13, 2026; accepted: May 7, 2026; published: May 15, 2026


## Abstract

**The results of spectral analysis are of great significance for studying the stability of traveling wave solutions of the double dispersion equation at the critical speed. This paper investigates the spectral analysis of the Hessian operator for traveling wave solutions of the double dispersion equation in the critical case. Firstly, based on the Hamiltonian structure of the equation, we sort out the momentum and energy conservation laws, construct a functional formed by the linear combination of these conservation laws, and analyze the relevant properties of this functional at the critical speed. Secondly, we conduct a systematic spectral analysis of the Hessian operator of this functional at the critical traveling wave, clarify its kernel space, and prove that the operator has a unique negative eigenvalue with its essential spectrum lying on the positive semi-axis.**



## Keywords

**Double Dispersion Equation, Traveling Wave Solutions, Critical Speed, Spectral Analysis**




## 1. 引言

双重色散方程作为描述微结构固体中非线性波传播的重要数学模型, 因同时包含两种竞争色散机制, 能更精细地刻画非线性波的动力学行为, 在固体力学、非线性波动理论等领域具有重要的物理与应用价值.

本文研究双重色散方程 [1,2]（double dispersion equation）, 其形式为

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_x^2 \left(\partial_x^2 u - \partial_t^2 u + |u|^{p-1} u\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ 1 < p < \infty. \tag{1.1}$$

其初值条件为:

$$u(0,x)=u_0(x),\quad u_t(0,x)=u_1(x). \tag{1.2}$$

该方程同时包含时空色散项 $u_{xxtt}$ 与空间色散项 $u_{xxxx}$ 两种独立的高阶色散机制，此方程行波解形式为 $\phi_c(x-ct)$, 其中 $c$ 为波速本文研究此方程行波解 Hessian 算子的谱.

将双重色散方程改写为一阶系统便于谱分析. 令 $v_0=\int_{-\infty}^{x}u_1(y)\mathrm{d}y$, 则该系统可表示为:

$$\begin{cases} u_t=(1-\partial_x^2)^{-1}(v-v_{xx})_x=v_x, \\ v_t=(1-\partial_x^2)^{-1}\left(-u_{xx}+u-|u|^{p-1}u\right)_x. \end{cases} \tag{1.3}$$

系统 (1.3) 可表示为如下哈密顿形式：

$$\partial_t\vec{u}=JE'(\vec{u}),\quad J=\begin{pmatrix} 0 & (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x \\ (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

文献 [3]中, Wang 等指出, 系统 (1.3) 在 $H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ 空间中是局部适定的.

谱分析的结果对于研究双重色散方程临界速度下行波解的稳定性情况具有重要意义. 双重色散方程行波解的稳定性分析有助于揭示非线性与色散平衡下波的长期演化规律, 判断其能否在物理系统中稳定存在. 对于 (1.1), 2015 年 Erbay 等在文献 [4]中证明: 当 $p>1$ 且 $\frac{p-1}{p+3}<c^2<1$ 时, 行波解是轨道稳定的; 而当 $p\geq 2$ 且 $c^2<\frac{p-1}{p+3}$ 时, 该解因爆破呈现强不稳定性. 截至目前, 临界情形 $c^2=\frac{p-1}{p+3}$ 下行波解 $\phi_c(x-ct)$ 的稳定性情况因谱退化、哈密顿系统中反对称算子非满射等问题而没有结论.

稳定性的分析大多是基于文献中 [5,6]提到的方法, Grillakis 等 [5,6]给出了哈密顿系统孤立波解在非临界情况下的稳定性结果, 但没有解决一维临界情况下驻波解的稳定性问题. 近年来, Wu [7]通过构造 Virial 恒等式并应用调制理论和强制性证明了一维临界情况下驻波解的轨道不稳定性, 并整理 [8–10] 等文献中的结论给出了一维非线性 Klein-Gordon 方程驻波解在所有频率下的稳定性理论. 高维情形的非线性 Klein-Gordon 方程的孤立波解的稳定性分析可见文献 [11]. 后来, 这一方法被广泛应用到不同方程临界情况下解的稳定性分析: Yin [12]用文献 [7]中同样的方法证明了一维临界情况下 Klein-Gordon-Zakharov 系统驻波解的轨道不稳定性; Guo 等 [13]用此方法证明了广义导数非线性 Schrödinger 方程孤立波解的轨道不稳定性; 类似地情况, Li [14]和Jia [15]分别证明了一维临界频率时广义 Boussinesq 方程和广义 Benjamin-Bona-Mohony 方程行波解的轨道不稳定性.

对于双重色散方程临界情况行波解的稳定性, 也可以考虑上述文献类似的方法进行分析, 值得注意的是, 以上文献对于临界情况解的稳定性分析都有关键的一步: 谱分析, 即分析负特征值个数、核空间和本质谱. 一般来说, 若算子存在负特征值, 则对应线性化方程中指数增长的不稳定模态, 扰动会随时间指数放大, 导致线性不稳定性; 而零特征值构成的核空间, 源于系统的平移不变性, 对应行波沿 $x$ 方向平移的对称模态, 不影响稳定性判定. 因此为了后续临界情况的稳定性分析, 本文聚焦方程 (1.1) 的行波解 Hessian 算子的谱进行分析. 首先, 基于方程的哈密顿结构, 梳理动量与能量守恒律, 构造由守恒律线性组合的泛函, 分析该泛函在临界速度下的相关性质. 其次, 对该泛函在临界行波处的 Hessian 算子进行系统谱分析, 明确其核空间, 证明算子存在唯一负特征值, 且本质谱位

于正半轴. 本文的其余部分概况如下: 第 2 节为预备知识, 系统梳理并详细阐述后续理论分析与证明过程所需的核心概念、重要定义及关键理论工具. 主要包括: 相关函数空间的内积与范数规范表述, 动量、能量守恒定律的具体形式, 以及基态解的各类解析性质; 此外, 还将详细介绍变分泛函的构造方法, 及其一阶、二阶变分的核心性质. 第 3 节基于文献 [16–20]对第 2 节所构造的泛函 $S_c$ 在行波临界点 $\overrightarrow{\Phi_c}$ 处的 Hessian 算子 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 进行谱分析, 包括核空间刻画、负特征值个数判定等关键内容. 最后一节则对所得到的结论进行总结.

# 2. 预备知识

## 2.1. 相关内积定义

为了保证后文计算与估计的规范性, 本文统一采用如下内积与范数定义.

对于 $f, g \in L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 定义

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

并将 $L^2(\mathbb{R})$ 视为一个实 Hilbert 空间. 类似地, 对于函数 $\vec{f}, \vec{g} \in \left(L^2(\mathbb{R})\right)^2 = \left(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right)^2$, 定义

$$\langle \vec{f}, \vec{g}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \vec{f}(x)^T \cdot \vec{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于函数 $f(x)$, 其 $L^q$ 范数 $\|f\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$, 其 $H^1$ 范数为 $\|f\|_{H^1} = (\|f\|_{L^2}^2 + \|\partial_x f\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$. 对于向量函数 $\vec{f} = (f, g)^T$, 其 $H^1 \times H^1$ 范数 $\|\vec{f}\|_{H^1\times H^1} = (\|f\|_{H^1}^2 + \|g\|_{H^1}^2)^{\frac{1}{2}}$.

## 2.2. 守恒律及基态解性质

本小节将系统阐述所研究非线性色散系统的守恒律结构、行波解的具体形式, 以及对应椭圆方程基态解的核心解析性质, 并给出刻画临界波速的关键引理.

令向量函数 $\vec{u} = (u, v)^T$ 为系统的状态变量, 初值记为 $\vec{u}_0 = (u_0, v_0)^T$, 同时令 $\overrightarrow{\Phi_c} = (\phi_c, -c\phi_c)^T$, 其中 $\phi_c$ 为方程行波解. 记 $c_p = \sqrt{\frac{p-1}{p+3}}c = \pm c_p$. 经过推导与积分验证可知系统 (1.3) 的解 $(u, v)^T$ 满足两条核心守恒律, 分别为动量守恒律与能量守恒律:

$$M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} uv + u_x v_x\,\mathrm{d}x = M\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + u_x^2 + v^2 + v_x^2\right)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x = E\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

这两类守恒律是分析行波长期动力学行为与轨道稳定性的基础, 动量守恒律体现了系统在时间演化过程中动量泛函的不变性, 能量守恒律则反映了系统总能量（包含动能与势能）的守恒性. 此外, 该系统 (1.3) 具有如下行波解:

$$(u, v)^T = \left(\phi_c(x - ct), -c\phi_c(x - ct)\right)^T,$$

其中 $\phi_c$ 是下述椭圆方程的基态解（即能量最小的非平凡解）：

$$-(1-c^2)\partial_{xx}\phi_c+(1-c^2)\phi_c-\phi_c^p=0,\quad |c|<1. \tag{2.3}$$

该椭圆方程是通过将 $\phi_c(x-ct)$ 代入原方程后得到的. 根据文献 [21]的结论, 该基态解为正、偶函数, 且具有指数衰减性: 更精确地说, 存在常数 $C_1C_2>0$ 使得 $|\phi_c|\le C_1e^{-C_2|x|}$, 同时存在常数 $C_3C_4>0$ 使得 $|\partial_x\phi_c|\le C_3e^{-C_4|x|}$. 通过缩放变换可得 $\phi_c=(1-c^2)^{\frac{1}{p-1}}Q$, 其中 $Q$ 满足如下标准椭圆问题:

$$-\Delta Q+Q-Q^p=0. \tag{2.4}$$

接下来给出关于临界波速的引理, 该引理从动量泛函导数的角度, 证明了 $c=\pm c_p$ 是区分行波动力学行为的临界值, 因此也将其称为临界频率或临界波速.

**引理2.1.** 设 $|c|=c_p$, 则以下等式成立

$$\partial_\lambda M\left(\overrightarrow{\Phi_\lambda}\right)\Big|_{\lambda=c}=0.$$

**证明.** 首先对于任意 $\lambda\in(-1,1)$, 有

$$M\left(\overrightarrow{\Phi_\lambda}\right)=-\lambda(\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2+\|\partial_x\phi_\lambda\|_{L^2}^2). \tag{2.5}$$

为化简上述表达式, 利用基态解满足的椭圆方程 (2.3), 对其两边同时乘以 $\phi_c$, $x\partial_x\phi_c$, 并在全实轴上积分, 结合分部积分公式可得以下两个关键恒等式:

$$\begin{aligned}&\left(1-c^2\right)\|\phi_c\|_{L^2}^2+\left(1-c^2\right)\|\partial_x\phi_c\|_{L^2}^2-\|\phi_c\|_{L^{p+1}}^{p+1}=0,\\&\frac{\left(1-c^2\right)}{2}\|\phi_c\|_{L^2}^2-\frac{\left(1-c^2\right)}{2}\|\partial_x\phi_c\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|\phi_c\|_{L^{p+1}}^{p+1}=0.\end{aligned}$$

消元可知

$$\|\partial_x\phi_\lambda\|_{L^2}^2=\frac{p-1}{p+3}\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2, \tag{2.6}$$

$$\|\phi_\lambda\|_{L^{p+1}}^{p+1}=\frac{2(1-\lambda^2)(p+1)}{p+3}\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2. \tag{2.7}$$

将式 (2.6) 代入 (2.5), 化简后可得

$$M\left(\overrightarrow{\Phi_\lambda}\right)=-\lambda\frac{2p+2}{p+3}\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2. \tag{2.8}$$

结合前文给出的缩放变换关系

$$\phi_\lambda(x)=\left(1-\lambda^2\right)^{\frac{1}{p-1}}Q. \tag{2.9}$$

将其代入 (2.8) 可得

$$M\left(\overrightarrow{\Phi_\lambda}\right)=\frac{2p+2}{p+3}(-\lambda\left(1-\lambda^2\right)^{\frac{2}{p-1}})\|Q\|_{L^2}^2.$$

接下来对 $\lambda$ 求导, 我们有

$$\partial_\lambda M\left(\overrightarrow{\Phi_\lambda}\right)=\frac{2p+2}{p+3}(1-\lambda^2)^{\frac{2}{p-1}-1}(-1+\frac{p+3}{p-1}\lambda^2)\|Q\|_{L^2}^2.$$

最后, 将 $\lambda^2=\frac{p-1}{p+3}$ 代入上述导数表达式, 得到结论.

## 2.3. 泛函的构造和相关性质

本节基于前文给出的能量守恒与动量守恒, 构造关键泛函 $S_c$, 并系统推导其一阶、二阶变分的具体形式与核心代数性质.

现在我们定义 $S_c$ 为能量守恒与动量守恒的线性组合, 具体形式如下:

$$S_c(\vec{u})=E(\vec{u})+cM(\vec{u}). \tag{2.10}$$

求导可得

$$M'(\vec{u})=\begin{pmatrix}v-v_{xx}\\u-u_{xx}\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$E'(\vec{u})=\begin{pmatrix}-u_{xx}+u-|u|^{p-1}u\\v-v_{xx}\end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$S_c'(\vec{u})=\begin{pmatrix}-u_{xx}+u-|u|^{p-1}u+c(v-v_{xx})\\v-v_{xx}+c(u-u_{xx})\end{pmatrix}.$$

这里仅详细给出动量守恒的求导过程, 能量守恒的导数同理. 对于任意的 $\vec{f}=(f,g)^T\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\left\langle M'(\vec{u}),\vec{f}\right\rangle &= \frac{d}{dr}M(\vec{u}+r\vec{f})\Big|_{r=0}\\
&=\frac{d}{dr}\int_{\mathbb{R}}(u+rf)(v+rg)+(u_x+rf_x)(v_x+rg_x)\ \mathrm{d}x|_{r=0}\\
&=\frac{d}{dr}\int_{\mathbb{R}}uv+rug+rvf+r^2fg+u_xv_x+ru_xg_x+rf_xv_x+r^2f_xg_x\ \mathrm{d}x|_{r=0}\\
&=\int_{\mathbb{R}}ug+vf+2rfg+u_xg_x+f_xv_x+2rf_xg_x\ \mathrm{d}x|_{r=0}\\
&=\int_{\mathbb{R}}ug+vf+u_xg_x+f_xv_xdx\\
&=\int ug+vf-u_{xx}g-v_{xx}f\ \mathrm{d}x\\
&=\left\langle\begin{pmatrix}v-v_{xx}\\u-u_{xx}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}\right\rangle
\end{aligned}$$

因此,

$$M'(\vec{u}) = \begin{pmatrix} v - v_{xx} \\ u - u_{xx} \end{pmatrix}.$$

将 $\overrightarrow{\Phi_c} = (\phi_c, -c\phi_c)^T$ 直接代入 $S_c'(\vec{u})$ 可知 $S_c'\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) = \overrightarrow{0}$, 即 $\overrightarrow{\Phi_c}$ 是泛函 $S_c$ 的临界点. 此外, 对于实值向量 $\vec{f} = (f, g)^T$, 对一阶变分再次进行变分计算可得

$$S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\vec{f} = \begin{pmatrix} -f_{xx} + f - p\phi_c^{p-1}f + c(g - g_{xx}) \\ g - g_{xx} + c(f - f_{xx}) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

## 3. 谱分析结果及其证明

本节通过一系列引理, 确定 Hessian 算子 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的核空间结构、负特征值的存在性与唯一性, 完整刻画其谱特征.

首先在下面引理中给出 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的核空间.

**引理3.1.** $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的核满足

$$\operatorname{Ker}\left(S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\right) = \left\{\alpha\partial_x\overrightarrow{\Phi_c} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

**证明.** 先证包含关系 "$\supset$". 对任意 $\vec{f} \in \left\{\alpha\partial_x\overrightarrow{\Phi_c} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, 将 $\vec{f} = \alpha\partial_x\overrightarrow{\Phi_c}$ 代入 *Hessian* 算子表达式, 并结合基态解满足的椭圆方程 (2.3) 直接计算可得

$$\begin{aligned} S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\vec{f} &= S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\left(\alpha\partial_x\overrightarrow{\Phi_c}\right) \\ &= \alpha\begin{pmatrix} \partial_x\left((c^2-1)\partial_{xx}\phi_c + (1-c^2)\,\phi_c - \phi_c^p\right) \\ -c\phi_c' + c(\partial_x\phi_c)'' + c\phi_c' - c(\partial_x\phi_c)'' \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

于是 $\vec{f}$ 属于 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的核空间, 从而

$$\operatorname{Ker}\left(S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\right) \supset \left\{\alpha\partial_x\overrightarrow{\Phi_c} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

接下来证明 "$\subset$". 对任意 $\vec{f} \in \operatorname{Ker}\left(S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\right)$, 由 (2.13) 中 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的表达式可推出

$$\begin{cases} -\partial_{xx}f + f - p\phi_c^{p-1}f + cg - c\partial_{xx}g = 0, \\ g - \partial_{xx}g + cf - c\partial_{xx}f = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

由 (3.1) 中的第二个等式, 可以得到 $g = -cf + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x}$. 注意到 $\vec{f} = (f, g)^T \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ 具有全局平方可积性, 故指数增长项系数必须为零, 即 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

根据 *Weinstein [22]*的结论, 可知

$$\begin{cases} f = \alpha \partial_x \phi_c, \\ g = -\alpha c \partial_x \phi_c, \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

这表明 $\vec{f} \in \left\{ \alpha \partial_x \overrightarrow{\Phi_c} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, 从而

$$\operatorname{Ker}\left( S_c''\left( \overrightarrow{\Phi_c} \right) \right) \subset \left\{ \alpha \partial_x \overrightarrow{\Phi_c} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

综合上述两个包含关系, 即得

$$\operatorname{Ker}\left( S_c''\left( \overrightarrow{\Phi_c} \right) \right) = \left\{ \alpha \partial_x \overrightarrow{\Phi_c} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

接下来分析 Hessian 算子的负方向, 证明其至少存在一个负特征值, 为后续唯一性结论做铺垫. 下面的引理给出 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的一个负方向, 并由此推出 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 至少有一个负特征值.

**引理3.2.** 设

$$\vec{\psi}_c = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} \partial_c \phi_c \\ -c\partial_c \phi_c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\Psi_c} = \begin{pmatrix} \phi_c - \partial_{xx}\phi_c \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) \vec{\psi}_c = \overrightarrow{\Psi_c}. \tag{3.2}$$

此外,

$$\left\langle S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) \vec{\psi}_c, \vec{\psi}_c \right\rangle < 0.$$

**证明.** 将 $\vec{\psi}_c$ 代入 (2.13) 中, 并利用椭圆方程 (2.3) 化简, 直接计算可得

$$S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) \vec{\psi}_c = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} \partial_c((c^2-1)\partial_{xx}\phi_c + (1-c^2)\,\phi_c - \phi_c^p) + 2c\phi_c - 2c\partial_{xx}\phi_c \\ -c\partial_c\phi_c + c\partial_{xxc}\phi_c + c\partial_c\phi_c - c\partial_{xxc}\phi_c \end{pmatrix},$$

由此得到

$$S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) \vec{\psi}_c = \begin{pmatrix} \phi_c - \partial_{xx}\phi_c \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\Psi_c}. \tag{3.3}$$

现在证明 $\left\langle S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) \vec{\psi}_c, \vec{\psi}_c \right\rangle < 0$，由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} \left\langle S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) \vec{\psi}_c, \vec{\psi}_c \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Psi_c}, \vec{\psi}_c \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (\phi_c - \partial_{xx}\phi_c, 0) \cdot \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} \partial_c\phi_c \\ -c\partial_c\phi_c \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} \left(\phi_c \partial_c \phi_c + \partial_x\phi_c \partial_c \partial_x \phi_c\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4c}\partial_c\left( \|\phi_c\|_{L^2}^2 + \|\partial_x\phi_c\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

结合 (2.6) 和 (2.9), 可得

$$\partial_c \|\phi_c\|_{L^2}^2 = -\frac{4c}{p-1}(1-c^2)^{\frac{2}{p-1}-1} \|Q\|_{L^2}^2,$$

以及

$$\partial_c \|\partial_x \phi_c\|_{L^2}^2 = -\frac{4c}{p+3}(1-c^2)^{\frac{2}{p-1}-1}\|Q\|_{L^2}^2 .$$

代入后合并化简可得

$$\left\langle S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\vec{\psi}_c, \vec{\psi}_c\right\rangle = -\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+3}\right)(1-c^2)^{\frac{2}{p-1}-1}\|Q\|_{L^2}^2 < 0.$$

基于上述负方向的存在性, 进一步证明 Hessian 算子 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 有且仅有一个负特征值.

**引理3.3.** $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 有且仅有一个负特征值.

**证明.** 对于实值向量 $\vec{f}=(f,g)^T$, 直接计算可得

$$\begin{aligned}\left\langle S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\vec{f}, \vec{f}\right\rangle =& \langle(-\partial_{xx}+1-p\phi_c^{p-1})f, f\rangle \\ &+\langle g,(1-\partial_{xx})g\rangle + 2c\langle f,(1-\partial_{xx})g\rangle.\end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $T=-\partial_{xx}+1-pQ^{p-1}$, 由 $\phi_c=(1-c^2)^{\frac{1}{p-1}}Q$ 得

$$\langle(-\partial_{xx}+1-p\phi_c^{p-1})f,f\rangle = (1-c^2)\langle Tf,f\rangle + c^2\langle f,(1-\partial_{xx})f\rangle. \tag{3.5}$$

注意到如下恒等式

$$\langle g,(1-\partial_{xx})g\rangle + 2c\langle f,(1-\partial_{xx})g\rangle + c^2\langle f,(1-\partial_{xx})f\rangle = \|g+cf\|_{H^1}^2 .$$

将 (3.5) 代入 (3.4) 后化简得到

$$\left\langle S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)\vec{f}, \vec{f}\right\rangle = (1-c^2)\langle Tf,f\rangle + \|g+cf\|_{H^1}^2 . \tag{3.6}$$

根据文献 *[22]*的结论, 算子 $T$ 有且仅有一个负特征值, 这意味着 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 有且仅有一个负特征值.

基于上述引理, 最终给出$S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的谱分析定理.

**定理3.4.** $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的离散谱为 $\mu_0, 0$, 本质谱为 $[\delta,+\infty)$.

**证明.** 由 (2.13) 中 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的展开, 可将 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 改写为

$$S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right) = L + V,$$

其中 $L=\begin{pmatrix}1-\partial_{xx} & c(1-\partial_{xx})\\ c(1-\partial_{xx}) & 1-\partial_{xx}\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}-p\phi_c^{p-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 于是 $V$ 是自伴算子 $L$ 的紧扰动.

首先给出 $L$ 的本质谱. 注意对任意 $\vec{f}=(f,g)^T\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\langle L\vec{f},\vec{f}\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1-\partial_{xx} & c(1-\partial_{xx}) \\ c(1-\partial_{xx}) & 1-\partial_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-\partial_{xx}f + f + cg - c\partial_{xx}g, cf - c\partial_{xx}f + g - \partial_{xx}g) \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\
&= \|\partial_x f\|_{L^2}^2 + \|\partial_x g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + 2c\langle f,g\rangle + 2c\langle \partial_x f, \partial_x g\rangle \\
&= \|\vec{f}\|_{H^1\times H^1}^2 + 2c\langle f,g\rangle + 2c\langle \partial_x f, \partial_x g\rangle.
\end{aligned}
$$

对于最后两项, 应用 *Young* 不等式, 有

$$|2c\langle f,g\rangle + 2c\langle \partial_x f, \partial_x g\rangle| \le |c|\|\vec{f}\|_{H^1\times H^1}^2.$$

因此,

$$\langle L\vec{f},\vec{f}\rangle \ge (1-|c|)\|\vec{f}\|_{H^1\times H^1}^2.$$

由于 $|c|<1$, 可得

$$\langle L\vec{f},\vec{f}\rangle \gtrsim \|\vec{f}\|_{H^1\times H^1}^2,$$

这意味着存在 $\delta>0$ 使得 $L$ 的本质谱为 $[\delta,+\infty)$. 根据 *Weyl* 定理, $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 与 $L$ 具有相同的本质谱. 而引理 *3.1* 中已得到 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的核, 且引理 *3.3* 表明 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 有且仅有一个负特征值. 记该负特征值为 $\mu_0$, 其对应的负特征向量为 $\vec{\eta}_0$. 因此 $S_c''\left(\overrightarrow{\Phi_c}\right)$ 的离散谱为 $\mu_0, 0$, 本质谱为 $[\delta,+\infty)$.

## 4. 结论

本文研究了临界情况时双重色散方程行波解 Hessian 算子的谱分析, 构造了组合泛函 $S_c$, 分析了算子的核空间结构, 证明其存在唯一负特征值且本质谱位于正半轴, 为临界速度下行波解的不稳定性研究提供了关键理论支撑. 更重要的是, 本文所得谱分析结果与引言中提及的临界条件下稳定性分析相关文献的谱结论形式一致, 这表明可进一步开展临界波速下行波解的稳定性研究, 包括强制性估计、调制理论与 Virial 等式的构造等后续工作. 具体来说, 由引言中提到的临界条件下稳定性分析的相关文献, 对 Hessian 算子进行谱分析之后, 由谱分析的结果可以证明此算子在满足一定正交条件下的强制性, 而后续的调制理论则表明强制性中的正交条件是成立的, 最后需要通过构造 Virial 等式并对其导数进行估计通过反证法来证明临界情况下的轨道不稳定性. 当然, 这些只是大概的步骤分析, 具体结论需要后续进行严格的证明. 如果能得到此方程临界情况下的稳定性结论, 那么将完善双重色散方程行波解的稳定性理论体系, 同时也为其它退化色散模型解的稳定性分析提供了一套有效的研究思路.

## 参考文献

[1] Porubov, A.V. (2003) Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. https://doi.org/10.1142/9789812794291

[2] Samsonov, A.M. (2001) Strain Solitons in Solids and How to Construct Them. Chapman and Hall.

[3] Wang, Y., Mu, C. and Deng, J. (2008) Strong Instability of Solitary-Wave Solutions for a Nonlinear Boussinesq Equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **69**, 1599-1614. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.07.006

[4] Erbay, H.A., Erbay, S. and Erkip, A. (2015) Existence and Stability of Traveling Waves for a Class of Nonlocal Nonlinear Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **425**, 307-336. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.039

[5] Grillakis, M., Shatah, J. and Strauss, W. (1987) Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry, I. *Journal of Functional Analysis*, **74**, 160-197. https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90044-9

[6] Grillakis, M., Shatah, J. and Strauss, W. (1990) Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry, II. *Journal of Functional Analysis*, **94**, 308-348. https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90016-e

[7] Wu, Y. (2023) Instability of the Standing Waves for the Nonlinear Klein-Gordon Equations in One Dimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, **376**, 4085-4103. https://doi.org/10.1090/tran/8852

[8] Shatah, J. and Strauss, W. (1985) Instability of Nonlinear Bound States. *Communications in Mathematical Physics*, **100**, 173-190. https://doi.org/10.1007/bf01212446

[9] Shatah, J. (1985) Unstable Ground State of Nonlinear Klein-Gordon Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **290**, 701-710. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1985-0792821-7

[10] Ohta, M. and Todorova, G. (2005) Strong Instability of Standing Waves for Nonlinear Klein-Gordon Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **12**, 315-322. https://doi.org/10.3934/dcds.2005.12.315

[11] Li, J., Liu, Y., Wu, Y. and Zheng, H. (2025) Stability and Instability of Solitary-Wave Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon Equation. *Journal of Functional Analysis*, **289**, Article 110981. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2025.110981

[12] Yin, S. (2018) Stability and Instability of the Standing Waves for the Klein-Gordon-Zakharov System in One Space Dimension. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4428-4447. https://doi.org/10.1002/mma.4905

[13] Guo, Z., Ning, C. and Wu, Y. (2020) Instability of the Solitary Wave Solutions for the Generalized Derivative Nonlinear Schrödinger Equation in the Critical Frequency Case. *Mathematical Research Letters*, **27**, 339-375. https://doi.org/10.4310/mrl.2020.v27.n2.a2

[14] Li, B., Ohta, M., Wu, Y. and Xue, J. (2020) Instability of the Solitary Waves for the Generalized Boussinesq Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **52**, 3192-3221. https://doi.org/10.1137/18m1199198

[15] Jia, R. and Wu, Y. (2025) Instability of the Solitary Waves for the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **64**, Article No. 124. https://doi.org/10.1007/s00526-025-02981-z

[16] Grillakis, M. (1988) Linearized Instability for Nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41**, 747-774. https://doi.org/10.1002/cpa.3160410602

[17] Gustafson, S., Nakanishi, K. and Tsai, T. (2004) Asymptotic Stability and Completeness in the Energy Space for Nonlinear Schrödinger Equations with Small Solitary Waves. *International Mathematics Research Notices*, **2004**, 3559-3584. https://doi.org/10.1155/s1073792804132340

[18] Kirr, E. and Zarnescu, A. (2007) On the Asymptotic Stability of Bound States in 2D Cubic Schrödinger Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **272**, 443-468. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0233-3

[19] Demanet, L. and Schlag, W. (2006) Numerical Verification of a Gap Condition for a Linearized Nonlinear Schrödinger Equation. *Nonlinearity*, **19**, 829-852. https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/4/004

[20] Cuccagna, S., Pelinovsky, D. and Vougalter, V. (2005) Spectra of Positive and Negative Energies in the Linearized NLS Problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **58**, 1-29. https://doi.org/10.1002/cpa.20050

[21] Strauss, W.A. (1977) Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, **55**, 149-162. https://doi.org/10.1007/bf01626517

[22] Weinstein, M.I. (1985) Modulational Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **16**, 472-491. https://doi.org/10.1137/0516034