Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 147-155
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155215

小参数条件下随机 Burgers 方程解的适定性

韦思婷，田琳琳*，**李永康，闫理坦**

东华大学数学与统计学院，上海

收稿日期：2026 年 4 月 13 日；录用日期：2026 年 5 月 7 日；发布日期：2026 年 5 月 19 日

摘 要

本文研究乘性时空白噪声驱动的随机 **Burgers** 方程。为控制非线性漂移项在 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中的增长，构造了闭球投影截断算子。利用 **Young** 卷积不等式与连续性论证建立先验估计，证明了在小参数条件下，该方程以任意接近 1 的概率存在唯一温和解。

关键词

随机 **Burgers** 方程，解的存在唯一性，闭球投影截断，**Young** 卷积不等式

Well-Posedness of Solutions to the Stochastic Burgers Equation under Small Parameter Conditions

Siting Wei, Linlin Tian*, Yongkang Li, Litan Yan

College of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: April 13, 2026; accepted: May 7, 2026; published: May 19, 2026

* 通讯作者。

文章引用: 韦思婷, 田琳琳, 李永康, 闫理坦. 小参数条件下随机 Burgers 方程解的适定性 [J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 147-155. DOI: 10.12677/aam.2026.155215

Abstract

This paper studies the stochastic Burgers equation driven by multiplicative noise. To control the growth of the nonlinear drift term in the $L^2(\mathbb{R})$ space, a closed-ball projection truncation operator is constructed. By combining Young's convolution inequality with a continuity argument to establish *a priori* estimates, it is proved that under small parameter conditions, the equation admits a unique mild solution with probability arbitrarily close to 1.

Keywords

Stochastic Burgers Equation, Existence and Uniqueness, Closed-Ball Projection, Young's Convolution Inequality

1. 引言

本文研究由乘性时空白噪声驱动的随机 Burgers 方程。考虑如下初始值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)^2 + \sigma(u(t,x))\dot{W}(t,x), & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1}$$

其中，初值 $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ 为确定性函数，扩散系数 $\sigma(\cdot)$ 满足全局 Lipschitz 条件，W 为完备概率空间上的时空白噪声。该方程的温和解满足如下积分方程：

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)u_0(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} G_{t-s}(x-y)u(s,y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma(u(s,y))W(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y), \end{aligned} \tag{2}$$

式中 $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$ 为热核，随机积分为 Itô 积分。

针对该方程温和解的适定性，现有文献已给出了多种处理框架 [1–4]。在全实轴 $\mathbb{R}$ 上，由于白

噪声在空间上不具备衰减性，经典方法常引入指数加权空间以保证积分收敛 [5]。相较于本文在自然 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中的研究，引入加权空间等方法对初值和噪声的限制更弱，能够处理具有多项式甚至指数增长的“大初值”；然而，非线性漂移项 $\partial_x(u^2)$ 在先验估计中极易引发“权重丢失”问题，导致常规逼近理论失效 [6]。为此，部分文献借助粗糙路径理论 [7] 或特殊的算子半群技巧 [8] 进行处理。此外，Cole-Hopf 变换与正则性结构理论虽可处理较大初值，但高度依赖 Burgers 方程特有的代数结构。

为避免引入空间权重与特定代数变换，本文采用类似 Liu 与 Shi [9] 的截断思路，在 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中构造闭球投影截断，以确立温和解的适定性。由于非线性漂移项 $\partial_x(u^2)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中不满足全局 Lipschitz 条件且具二次增长性，直接的 L^2 估计要求对应的二次方程判别式非负，故本文的适定性结果建立在初值与噪声系数充分小的条件下。尽管该方法受限于小参数条件，但规避了“权重丢失”难题，且不依赖方程特定的保守形式或代数变换。这一截断论证提供了一种更为直接清晰的解析框架，对一般无界域上非线性随机偏微分方程的适定性研究具重要的启发价值。

为控制非线性项的增长，本文引入关于 L^2 范数的闭球投影算子 $\pi_R : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ $(R > 0)$：

$$\pi_R(u) = \begin{cases} u, & \|u\| \le R \\ \frac{R}{\|u\|}u, & \|u\| > R \end{cases}. \tag{3}$$

基于此算子，记截断二次项 $H_R(u) := (\pi_R(u))^2$ 与截断扩散项 $\Sigma_R(u) := \sigma(\pi_R(u))$，考虑如下截断方程：

$$\begin{aligned} u_R(t,x) = &\int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)u_0(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} G_{t-s}(x-y) H_R(u_R(s))(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\Sigma_R(u_R(s))(y) W(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{4}$$

2. 预备知识

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ 为完备带流概率空间。全文约定无下标的范数 $\|\cdot\|$ 与内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 均特指 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的范数与内积。

定义 1　对给定 $T > 0$，称取值于 $L^2(\mathbb{R})$ 的 $\mathcal{F}_t$-适应随机过程 $u = \{u(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\}$ 为方程 (1) 在时间区间 $[0,T]$ 上的全局温和解，若它满足：

(1) 轨道几乎必然连续：$\mathbb{P}\left(u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))\right) = 1$；

(2) 矩有界性：$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\|u(t)\|^2 < \infty$；

(3) 积分等式 (2) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中以概率 1 成立。

将 W 视为 $L^2(\mathbb{R})$ 上协方差为恒等算子的柱状 Wiener 过程。对适于积分的可预测过程 $\Phi(t,x)$，其无穷维 Itô 随机积分满足 Itô 等距定理及 Burkholder-Davis-Gundy (BDG) 不等式 [10]：对任意

$p \geq 2$，存在常数 $C_p > 0$ 使得：

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y) W(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}y)\right\|^2 = \int_0^t \mathbb{E}\|\Phi(s)\|^2\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \Phi(r,y) W(\,\mathrm{d}r,\,\mathrm{d}y)\right\|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}\right]. \tag{6}$$

由闭凸集投影的几何性质，π_R 是一非扩张映射，即对任意 $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ 恒有：

$$\|\pi_R(u) - \pi_R(v)\| \leq \|u - v\|, \quad \text{且} \quad \|\pi_R(u)\| \leq \min(\|u\|, R). \tag{7}$$

对扩散系数 σ 与初值 u_0，引入如下假设。

假设 1 映射 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\sigma(0) = 0$，且存在常数 $L_\sigma > 0$ 使得对任意 $u, v \in \mathbb{R}$ 恒有 $|\sigma(u) - \sigma(v)| \leq L_\sigma |u - v|$。进而对任意 $u \in L^2(\mathbb{R})$ 有 $\|\sigma(u)\| \leq L_\sigma \|u\|$。

引理 1 对 $t > 0$，热核 $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$ 的相关范数满足：

$$\|G_t\|_{L^1} = 1, \quad \|G_t\| = C_1 t^{-1/4}, \quad \|\partial_x G_t\| = C_2 t^{-3/4}, \tag{8}$$

其中常数 $C_1 = (8\pi)^{-1/4}$，$C_2 = (8\sqrt{2\pi})^{-1/2}$。此外，有如下积分性质：

(1) Young 卷积不等式：对任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 与 $g \in L^2(\mathbb{R})$，恒有 $\|f * g\| \leq \|f\|_{L^1}\|g\|$。基于卷积对称性，若 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $g \in L^1(\mathbb{R})$，亦有 $\|f * g\| \leq \|f\|\|g\|_{L^1}$。

(2) Beta 积分恒等式：对 $\alpha \in (0, 1)$ 及 $0 \leq r < t$，有 $\int_r^t (t - s)^{\alpha-1}(s - r)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$。

3. 解的全局适定性

本节先确立截断方程 (4)的适定性与矩估计，随后通过连续性论证去掉截断，确立原方程温和解的存在唯一性。

引理 2 对任意 $R > 0$，映射 $H_R : L^2(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ 与 $\Sigma_R : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 满足全局 Lipschitz 条件。

证明 由投影算子的非扩张性 (7)，对任意 $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ 有 $\|\pi_R(u) - \pi_R(v)\| \leq \|u - v\|$。结合 Cauchy-Schwarz 不等式得：

$$\begin{aligned}\|H_R(u) - H_R(v)\|_{L^1} &= \|(\pi_R(u))^2 - (\pi_R(v))^2\|_{L^1} \\ &\leq \|\pi_R(u) - \pi_R(v)\|\|\pi_R(u) + \pi_R(v)\| \\ &\leq 2R\|u - v\|.\end{aligned} \tag{9}$$

即 H_R 的 Lipschitz 常数为 $L_R = 2R$。同理，由假设 1 得：

$$\|\Sigma_R(u)-\Sigma_R(v)\| \le L_\sigma\|\pi_R(u)-\pi_R(v)\| \le L_\sigma\|u-v\|. \tag{10}$$

此外，由 $\sigma(0)=0$ 易得界 $\|H_R(u)\|_{L^1} \le R^2$ 及 $\|\Sigma_R(u)\| \le L_\sigma R$。证毕。

引理 3 截断方程 (4) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中存在唯一的连续温和解 $u_R(t,x)$。

证明 构造 Picard 迭代 $u_R^{(0)}(t)=G_t*u_0$，记差分 $I^{(n+1)}(t)=u_R^{(n+1)}(t)-u_R^{(n)}(t)$。设 $I_1^{(n+1)}(t)$ 与 $I_2^{(n+1)}(t)$ 分别为漂移项与随机项之差。定义 $D_n(t):=\sup_{s\in[0,t]}\mathbb{E}[\|I^{(n)}(s)\|^2]$。

对于漂移项，由 Young 卷积不等式的对称性及引理 1：

$$\begin{aligned}\|I_1^{(n+1)}(s)\| &\le \frac{1}{2}\int_0^s \|\partial_x G_{s-r}\|\|H_R(u_R^{(n)}(r))-H_R(u_R^{(n-1)}(r))\|_{L^1}\,\mathrm{d}r\\ &\le \frac{C_2L_R}{2}\int_0^s (s-r)^{-3/4}\|I^{(n)}(r)\|\,\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{11}$$

结合 Cauchy-Schwarz 不等式与 $\int_0^s(s-r)^{-3/4}\,\mathrm{d}r \le 4T^{1/4}$，对式 (11)取期望得：

$$\mathbb{E}\|I_1^{(n+1)}(s)\|^2 \le 4C_2^2R^2T^{1/4}\int_0^s (s-r)^{-3/4}D_n(r)\,\mathrm{d}r. \tag{12}$$

对于随机项，由 Itô 等距定理 (5)：

$$\mathbb{E}\|I_2^{(n+1)}(s)\|^2 \le C_1^2L_\sigma^2\int_0^s (s-r)^{-1/2}D_n(r)\,\mathrm{d}r. \tag{13}$$

结合 $\|I^{(n+1)}(s)\|^2 \le 2\|I_1^{(n+1)}(s)\|^2+2\|I_2^{(n+1)}(s)\|^2$ 及上述估计，存在常数 $K>0$ 使得：

$$D_{n+1}(t) \le K\int_0^t \left((t-s)^{-3/4}+(t-s)^{-1/2}\right)D_n(s)\,\mathrm{d}s. \tag{14}$$

因式 (14) 积分核可积，由广义 Gronwall 引理推知 $\sum\sqrt{D_n(t)}<\infty$。故迭代序列在 L^2 中一致收敛，唯一性同理可证。证毕。

引理 4 若假设 1 成立，记随机积分项为 $\mathcal{I}_2(t)=\int_0^t G_{t-s}*\Sigma_R(u_R(s))\,\mathrm{d}W(s)$。对任意 $p>4$，存在常数 $K_{p,T}>0$ 使得：

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{I}_2(t)\|^p\right] \le K_{p,T}L_\sigma^pR^p. \tag{15}$$

证明 选取 $\alpha\in(1/p,1/4)$ 进行 Da Prato-Zabczyk 因式分解 [10]。定义：

$$Y_\alpha(s,x)=\int_0^s\int_{\mathbb{R}}(s-r)^{-\alpha}G_{s-r}(x-y)\Sigma_R(u_R(r,y))W(\,\mathrm{d}r,\,\mathrm{d}y). \tag{16}$$

由 BDG 不等式 (6)及界 $\|\Sigma_R(u)\| \le L_\sigma R$，对式 (16) 取 p 阶矩有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|Y_\alpha(s)\|^p\right] &\leq C_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^s (s-r)^{-2\alpha}\|G_{s-r}\|^2\|\Sigma_R(u_R(r))\|^2\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ &\leq C_pC_1^p(L_\sigma R)^p\left(\int_0^s r^{-2\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{p}{2}}.\end{aligned} \tag{17}$$

上述积分因 $2\alpha+1/2<1$ 而收敛。对 $\mathcal{I}_2(t)$ 应用 Hölder 不等式：

$$\|\mathcal{I}_2(t)\|^p \leq \left(\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right)^p\left(\int_0^t (t-s)^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\,\mathrm{d}s\right)^{p-1}\int_0^t \|Y_\alpha(s)\|^p\,\mathrm{d}s. \tag{18}$$

将式 (17) 代入式 (18) 中，由 $\alpha>1/p$，时间积分有界。对式 (18) 取上确界与期望即得 (15)。证毕。

定理 5 若假设 1 成立，对任意给定时间 $T>0$ 与置信度 $\delta\in(0,1)$，存在充分小的 $\epsilon_0>0$，使得当初值满足 $\|u_0\|\leq\epsilon_0$ 且 $L_\sigma\leq\epsilon_0$ 时，方程 (1) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中以不低于 $1-\delta$ 的概率在 $[0,T]$ 上存在唯一的全局温和解 $u(t,x)$。

证明 记 $M_R(t)=\sup_{s\in[0,t]}\|u_R(s)\|$ 及 $Z_T=\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{I}_2(t)\|$。对漂移项 $\mathcal{I}_1(t)$，由 Young 卷积不等式及 $\|H_R(u)\|_{L^1}\leq M_R(t)^2$ 得：

$$\|\mathcal{I}_1(t)\| \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_x G_{t-s}\|\,\|H_R(u_R(s))\|_{L^1}\,\mathrm{d}s \leq 2C_2T^{1/4}M_R(t)^2. \tag{19}$$

记 $C_{det}:=2C_2T^{1/4}$，对截断方程两边取范数上确界，轨道几乎必然满足：

$$M_R(t)\leq\|u_0\|+C_{det}M_R(t)^2+Z_T. \tag{20}$$

考察二次方程 $C_{det}x^2-x+(\|u_0\|+Z_T)=0$。取 $R=(2C_{det})^{-1}$，由假设 1 可取 $\epsilon_0\leq R/4$，则 $\|u_0\|\leq R/4$。定义事件 $\Omega_0=\{Z_T<R/4\}$。在 Ω_0 上，$\|u_0\|+Z_T<R/2$，判别式严格为正，其较小正根为：

$$r_-=\frac{1-\sqrt{1-4C_{det}(\|u_0\|+Z_T)}}{2C_{det}}. \tag{21}$$

由 $t\mapsto M_R(t)$ 的连续性及 $M_R(0)=\|u_0\|<r_-$，推知对任意 $t\in[0,T]$ 恒有 $M_R(t)\leq r_-$。结合不等式 $1-\sqrt{1-x}\leq x$ $(x\in[0,1])$ 得：

$$M_R(T)\leq r_-\leq\frac{4C_{det}(\|u_0\|+Z_T)}{2C_{det}}<2\left(\frac{R}{4}+\frac{R}{4}\right)=R. \tag{22}$$

即在 Ω_0 上有 $\sup_{t\in[0,T]}\|u_R(t)\|<R$，故 $\pi_R(u_R(t))\equiv u_R(t)$，$u_R$ 即为原方程 (1) 的温和解。由 Markov 不等式与引理 4 估计 Ω_0^c 的概率：

$$\mathbb{P}(\Omega_0^c)=\mathbb{P}\left(Z_T\geq\frac{R}{4}\right)\leq\frac{\mathbb{E}[Z_T^p]}{(R/4)^p}\leq K_{p,T}4^pL_\sigma^p\leq K_{p,T}4^p\epsilon_0^p. \tag{23}$$

选取充分小的 ϵ_0 使 $K_{p,T}4^p\epsilon_0^p \le \delta$，则 $\mathbb{P}(\Omega_0) \ge 1-\delta$，存在性得证。

现证唯一性。设 $v \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ 为方程 (1) 的另一温和解。定义停时

$$\tau = \inf\{t \in [0,T] : \max(\|u_R(t)\|, \|v(t)\|) \ge R\}.$$

当 $t \in [0, \tau \wedge T]$ 时，$\max(\|u_R(t)\|, \|v(t)\|) \le R$，即 u_R 与 v 均满足截断方程 (4)。由引理 3 的唯一性结论，几乎必然有 $u_R(t) = v(t)$ $(\forall t \in [0, \tau \wedge T])$。

在事件 Ω_0 上，若 $\tau \le T$，由轨道连续性得 $\max(\|u_R(\tau)\|, \|v(\tau)\|) = R$。又因 $u_R(\tau) = v(\tau)$ 且 $\sup_{t\in[0,T]} \|u_R(t)\| \le r_- < R$，产生矛盾：

$$R = \max\left(\|u_R(\tau)\|, \|v(\tau)\|\right) = \|u_R(\tau)\| \le r_- < R.$$

故在 Ω_0 上几乎必然有 $\tau > T$，从而 $\sup_{t\in[0,T]} \|u_R(t) - v(t)\| = 0$。唯一性得证。证毕。

注 1　由定理 5 可知，截断半径满足 $R = (4C_2)^{-1}T^{-1/4}$。结合参数条件 $\epsilon_0 \le R/4$ 可见，目标时间 T 越大，所允许的初值与噪声强度阈值 ϵ_0 越小。该反向依赖关系表明本文结论属于小参数条件适定性，即解的长时间存在性需以更严格的参数限制为前提。

4. 解对初值的连续依赖性

本节建立温和解对初值的连续依赖性。

定理 6　在定理 5 的条件下，设 $u(t)$ 与 $v(t)$ 分别为对应初值 u_0, v_0 $(\|u_0\|, \|v_0\| \le \epsilon_0)$ 的温和解。存在依赖于 T, R 与 L_σ 的常数 $C_{T,R} > 0$，使得对应截断方程 (4) 的解 u_R 与 v_R 满足：

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\|u_R(t) - v_R(t)\|^2 \le C_{T,R}\|u_0 - v_0\|^2.$$

此外，存在概率 $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_0) \ge 1-2\delta$ 的事件 $\widetilde{\Omega}_0$，在该事件上几乎必然有 $u \equiv u_R$ 且 $v \equiv v_R$。

证明　设 $u_R(t)$ 与 $v_R(t)$ 为初值 u_0, v_0 对应的截断方程 (4) 的温和解。记 $e_R(t) = u_R(t) - v_R(t)$，由不等式 $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$ 得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|e_R(t)\|^2 \le{}& 3\|G_t * (u_0 - v_0)\|^2 + \frac{3}{4}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \partial_x G_{t-s} * \left(H_R(u_R(s)) - H_R(v_R(s))\right)\mathrm{d}s\right\|^2 \\ &+ 3\mathbb{E}\left\|\int_0^t G_{t-s} * \left(\Sigma_R(u_R(s)) - \Sigma_R(v_R(s))\right)\mathrm{d}W(s)\right\|^2.\end{aligned} \tag{24}$$

对初始项，由引理 1 有：

$$3\|G_t * (u_0 - v_0)\|^2 \le 3\|u_0 - v_0\|^2. \tag{25}$$

对漂移项之差，由 Young 卷积不等式、Cauchy-Schwarz 不等式及 $L_R = 2R$ 得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \partial_x G_{t-s} * \big(H_R(u_R(s)) - H_R(v_R(s))\big)\,\mathrm{d}s\right\|^2 \\
&\qquad \le \frac{3}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^t C_2(t-s)^{-3/4} L_R \|e_R(s)\|\,\mathrm{d}s\right)^2 \\
&\qquad \le 12C_2^2R^2T^{1/4}\int_0^t (t-s)^{-3/4}\mathbb{E}\|e_R(s)\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

对随机项之差，由 Itô 等距定理及 Σ_R 的 Lipschitz 条件得：

$$
\begin{aligned}
&3\mathbb{E}\left\|\int_0^t G_{t-s} * \big(\Sigma_R(u_R(s)) - \Sigma_R(v_R(s))\big)\,\mathrm{d}W(s)\right\|^2 \\
&\qquad \le 3\int_0^t \|G_{t-s}\|^2 \mathbb{E}\|\Sigma_R(u_R(s)) - \Sigma_R(v_R(s))\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \le 3C_1^2L_\sigma^2\int_0^t (t-s)^{-1/2}\mathbb{E}\|e_R(s)\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

综合上述估计，记 $\Psi(t) = \sup_{s\in[0,t]}\mathbb{E}\|e_R(s)\|^2$，令常数 $M_1 = 12C_2^2R^2T^{1/4}$ 与 $M_2 = 3C_1^2L_\sigma^2$，有：

$$
\Psi(t) \le 3\|u_0 - v_0\|^2 + \int_0^t \Big(M_1(t-s)^{-3/4} + M_2(t-s)^{-1/2}\Big)\Psi(s)\,\mathrm{d}s.
$$

由广义 Gronwall 引理 [11]，存在常数 $C_{T,R} > 0$ 使得 $\Psi(T) \le C_{T,R}\|u_0 - v_0\|^2$。

记对应初值 u_0 与 v_0 的随机积分上确界分别为 $Z_T(u_R)$ 与 $Z_T(v_R)$。定义事件

$$
\widetilde{\Omega}_0 = \{Z_T(u_R) < R/4\} \cap \{Z_T(v_R) < R/4\},
$$

由定理 5 的估计知 $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_0) \ge 1-2\delta$。在 $\widetilde{\Omega}_0$ 上，恒有 $\sup_{t\in[0,T]}\|u_R(t)\| < R$ 且 $\sup_{t\in[0,T]}\|v_R(t)\| < R$，此时 u_R 与 v_R 即为原方程 (1) 的温和解 u 与 v。由此即得原方程温和解在 $\widetilde{\Omega}_0$ 上的连续依赖性。证毕。

5. 结论

本文在 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中确立了乘性时空白噪声驱动的随机 Burgers 方程在小参数条件下的全局温和解适定性。为处理非线性漂移项 $\partial_x(u^2)$ 的增长性，该研究构造了闭球投影截断算子，有效避免了指数加权空间引发的“权重丢失”问题及对特定代数变换的依赖。结合 Young 卷积不等式等技巧，证明了在小参数条件下，该方程以高概率存在唯一的温和解。尽管该方法能为无界域上非线性 SPDE 的适定性研究提供理论参考，但目前仍存在一定局限性。其一是高度依赖小参数条件，其二是受限于一维热核导数的时间局部可积性，向高维空间推广时面临积分发散的理论挑战。针对上述局限，未来的研究可重点关注两个拓展方向。首先是尝试探讨大初值条件下的局部解与可能发生的有限时间爆破机制，其次是将此截断思想推广应用于其他类型的非线性 SPDE，例如随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程，以丰富随机动力系统的分析工具。后续的研究工作将对此进行深入讨论。

参考文献

[1] Bertini, L., Cancrini, N. and Jona-Lasinio, G. (1994) The Stochastic Burgers equation. *Communications in Mathematical Physics*, **165**, 211-232. https://doi.org/10.1007/BF02099769

[2] Da Prato, G., Debussche, A. and Temam, R. (1994) Stochastic Burgers' Equation. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **1**, 389-402. https://doi.org/10.1007/BF01194987

[3] Gyöngy, I. (1998) Existence and Uniqueness Results for Semilinear Stochastic Partial Differential Equations. *Stochastic Processes and their Applications*, **73**, 271-299. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(97)00103-8

[4] Gyöngy, I. and Nualart, D. (1999) On the Stochastic Burgers' Equation in the Real Line. *The Annals of Probability*, **27**, 782-802. https://doi.org/10.1214/aop/1022677386

[5] Manthey, R. and Zausinger, T. (1999) Stochastic Evolution Equations in $L^{2\nu}_{\rho}$. *Stochastics and Stochastic Reports*, **66**, 37-85. https://doi.org/10.1080/17442509908834186

[6] Liu, W. and Röckner, M. (2015) Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction. Springer.

[7] Hairer, M. and Weber, H. (2013) Rough Burgers-Like Equations with Multiplicative Noise. *Probability Theory and Related Fields*, **155**, 71-126. https://doi.org/10.1007/s00440-011-0392-1

[8] Cerrai, S. (2003) Stochastic Reaction-Diffusion Systems with Multiplicative Noise and Non-Lipschitz Reaction Term. *Probability Theory and Related Fields*, **125**, 271-304. https://doi.org/10.1007/s00440-002-0230-6

[9] Liu, Z. and Shi, Z. (2025) Invariant Measures for Atochastic Burgers Equation on Unbounded Domains. https://arxiv.org/abs/2506.07119

[10] Da Prato, G. and Zabczyk, J. (2014) Stochastic Equations in Infinite Dimensions. 2nd Edition, Cambridge University Press.

[11] Henry, D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 840, Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/BFb0089647