Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 284-298
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155229

关于算子的对数次控制形式 Audenaert 不等式的一个推广

李 赟，韩亚洲

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2026年4月19日；录用日期：2026年5月13日；发布日期：2026年5月20日

摘 要

本文在半有限 von Neumann 代数的情形下，研究了一类与 Audenaert 不等式相关的对数次控制不等式。特别地，我们还将此类不等式推广到了扇形算子的情形。

关键词

von Neumann 代数，对数次控制不等式，加权几何均值

On a Logmajorization Version of Audenaert's Inequality for Operators

Yun Li, Yazhou Han

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 20, 2026

Abstract

In the setting of semifinite von Neumann algebras, we study a class of log-majorization

文章引用: 李赟, 韩亚洲. 关于算子的对数次控制形式 Audenaert 不等式的一个推广[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 284-298. DOI: 10.12677/aam.2026.155229

inequalities related to the Audenaert inequality. In particular, we extend such inequalities to the case of sectorial operators.

Keywords

von Neumann Algebra, Log-Submajorization Inequality, Weighted Geometric Mean

1. 引言

设 $M_n(\mathbb{C})$ 表示全体 $n \times n$ 复矩阵所构成的代数. 若对任意非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 都有 $x^* A x \geq 0$, 则称 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 为半正定矩阵. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 称 A 被 B弱控制(weak majorization), 记为 $A \prec_w B$ 或 $s(A) \prec_w s(B)$, 若对任意的 $k = 1, \ldots, n$ 都有

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(A) \leq \sum_{i=1}^{k} s_i(B),$$

其中 $\{s_i(A)\}$ 和 $\{s_i(B)\}$ 分别为 A 和 B 的奇异值. 若进一步在 $k = n$ 时等号成立, 则称 A 被 B 控制(majorization), 记为 $A \prec B$ 或 $s(A) \prec s(B)$. 类似地, 称 A 被 B对数弱控制(weak log-majorization), 记为 $A \prec_{w\log} B$ 或 $s(A) \prec_{w\log} s(B)$, 若对任意的 $k = 1, \ldots, n$ 都有

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(A) \leq \prod_{i=1}^{k} s_i(B).$$

若进一步在 $k = n$ 时等号成立, 则称 A 被 B对数控制(log-majorization), 记为 $A \prec_{\log} B$ 或 $s(A) \prec_{\log} s(B)$.

对 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 记其实部与虚部分别为 $\Re A$ 与 $\Im A$. 若 $\Re A$ 正定, 则称 A 为增生算子(accretive) [1]. A 的数值域定义为

$$W(A) = \{x^* A x : \|x\| = 1\}.$$

对 $\theta \in [0, \pi/2)$, 定义扇形

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0,\ |\Im z| \leq \tan\theta\, \Re z\}.$$

设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$满足 $W(A),\ W(B) \subseteq S_\theta$, 且 $\alpha \in (0,1)$. 定义 A 与 B 的 α-加权几何均值 [2]为

$$A\sharp_\alpha B := \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(A^{-1}+tB^{-1})^{-1}dt.$$

等价地

$$A\sharp_\alpha B = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}A(B+tA)^{-1}dt.$$

当 A, B 为严格正算子时, 该定义退化为经典表达式

$$A\sharp_\alpha B = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(A^{-1}+tB^{-1})^{-1}dt = A^{1/2}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{1/2}.$$

在研究矩阵不等式及其在算子理论中的应用时, Fan 支配原理扮演着重要角色. 该原理指出, 对任意两个矩阵 A, B, $s(A) \prec_w s(B)$ 成立当且仅当对所有酉不变范数都有 $|||A||| \le |||B|||$. 在对矩阵次可加性不等式的研究中, Bourin [3] 提出如下问题: 给定两个半正定矩阵 A, B 与正实数 p, q, 是否对于任意酉不变范数 $|||\cdot|||$总有

$$|||A^{p+q}+B^{p+q}||| \le |||(A^p+B^p)(A^q+B^q)|||$$

成立? 后来, Hayajneh 与 Kittaneh [4] 将上述问题推广为更一般的猜想. 他们考虑满足交换条件 $A_1B_1 = B_1A_1$ 与 $A_2B_2 = B_2A_2$ 的半正定矩阵 A_1, A_2, B_1, B_2, 并猜想对任意酉不变范数有

$$|||A_1B_1+A_2B_2||| \le |||(A_1+A_2)(B_1+B_2)|||.$$

他们在文献 [4]中验证了上述不等式对迹范数与 Hilbert-Schmidt 范数成立. 之后, Audenaert [5] 进一步推广了上述结果, 证明了对任意酉不变范数, 更一般的不等式

$$\left|\left|\left|\sum_{i=1}^m A_iB_i\right|\right|\right| \le \left|\left|\left|\left(\sum_{i=1}^m A_i\right)\left(\sum_{i=1}^m B_i\right)\right|\right|\right|,$$

总是成立的, 其中 $A_iB_i = B_iA_i$ 且 A_i, B_i 均为半正定矩阵. 关于这一方向的进一步发展, 可参见文献 [6]. 在此基础上, Hoa [2] 将其推广到非交换情形, 得到了关于得到了关于加权几何均值的范数不等式:

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\left(\sum_{i=1}^m (A_i\sharp_\alpha B_i)\right)^r\right|\right|\right| &\le \left|\left|\left|\left(\left(\sum_{i=1}^m B_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\left(\sum_{i=1}^m A_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m B_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\right|\right|\right| \\ &\le \left|\left|\left|\left(\left(\sum_{i=1}^m A_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m B_i\right)^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{p}}\right|\right|\right|, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 A_i, B_i 为正定矩阵, $r \ge 1$、$p > 0$、$\alpha \in [0,1]$. 随后, Hayajneh 与 Kittaneh [7]进一步得到了更

为精细的对数控制形式:

$$s\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\sharp_\alpha B_i\right)^r \prec_{\log} s\left(\left(\sum_{i=1}^{m}B_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^{m}B_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\right)^{1/p}$$
$$\prec_{\log} s\left(\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^{m}B_i\right)^{\alpha pr}\right)^{1/p}. \tag{2}$$

我们注意到上述不等式均对正定矩阵成立, 而在算子半群理论和偏微分方程领域, 需要考虑更一般的矩阵或算子. 为此, 学者们开始探索将几何均值的概念推广到扇形矩阵. 对于 $\theta \in [0, \pi/2)$, 定义扇形区域:

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0,\ |\Im z| \le \tan\theta\, \Re z\}.$$

若矩阵 A 的数值范围 $W(A) \subset S_\theta$, 则称 A 为扇形矩阵. 在扇形矩阵情形下, Tan 与 Chen [8] 证明了

$$\Re\big(A\sharp_\alpha B\big) \le \sec^2(\theta)\,\big(\Re A\sharp_\alpha \Re B\big).$$

将该结论与(2) 结合, 可得

$$s\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\sharp_\alpha B_i\right)^r \prec_{\log} sec^{3r}(\theta) s\left(\left(\sum_{i=1}^{m}B_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^{m}B_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\right)^{1/p}$$
$$\prec_{\log} sec^{3r}(\theta) s\left(\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^{m}B_i\right)^{\alpha pr}\right)^{1/p}, \tag{3}$$

其中 $A_i, B_i \in S_\theta$, 且 $r, p > 0,\ \alpha \in [0, 1]$.

我们知道有限维的矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 是一类特殊的有限 von Neumann 代数, 自然产生一个问题, 上述不等式 (1)-(3) 对一般的 von Neumann 代数是否仍然成立? 本文给出了肯定的回答, 我们将上述矩阵情形的不等式 (1)-(3) 推广到半有限 von Neumann 代数的情形. 具体地, 我们证明: 若 $0 \le x_i,\ y_i \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$、$\alpha \in [0, 1]$、$p, r > 0$ 且 $pr > 1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i\sharp_\alpha y_i)\right)^r \prec_{\log} \left(\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^{m}y_i\right)^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{p}},$$

另外, 当 $\{x_i\}_{i=1}^m,\ \{y_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{M}$ 满足 $W(x_i), W(y_i) \subset S_\theta$ 时, 我们有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i\sharp_\alpha y_i)\right)^r \prec_{\log} \sec^{3r}(\theta)\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\Re x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^{m}\Re y_i\right)^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. 准备知识

设 $\mathcal{H}$ 为可分 Hilbert 空间, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为带有忠实正规有限迹 τ 的半有限 von Neumann 代数. 记 $\mathbb{I}$ 为 $\mathcal{M}$ 的单位元, $P(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 中全体投影构成的集合. 定义在 $\mathcal{H}$ 上、定义域为 $\mathcal{D}(x)$ 的线性算子 x 称为附属于$\mathcal{M}$，若它与交换子代数 $\mathcal{M}'$ 中的每个酉元可交换，即对任意酉元 $u \in \mathcal{M}'$, 都有 $ux = xu$. 若 x 自伴, 记其谱测度为 e_x, 则 x 附属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当对任意 Borel 集 $B \subseteq \mathbb{R}$, 均有 $e_x(B) \in P(\mathcal{M})$. 一个附属于 $\mathcal{M}$ 的闭稠定算子 x 称为 τ-可测的, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在投影 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, 使得 $e(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(x)$ 且 $\tau(e^{\perp}) \leq \varepsilon$. 全体 τ-可测算子构成的集合记为 $L_0(\mathcal{M})$. 更多有关 τ-可测算子的基础知识见文献 [9].

对 $x \in L_0(\mathcal{M})$ 与 $s > 0$, 定义 x 的第 s 个奇异值为

$$\mu_s(x) = \inf\{\|xe\|: \ e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \ \tau(\mathbf{1} - e) \leq s\}, \ s > 0.$$

对任意 $0 < p \leq \infty$ 时, 定义非交换 L_p 空间

$$L_p(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \mu(x) \in L_p(\mathbb{R})\},$$

并定义

$$L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M} = \{x : x = y + z, y \in L_1(\mathcal{M}), z \in \mathcal{M}\},$$

其范数分别为

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M})} = \|\mu(x)\|_{L_p}, \|x\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} = \inf_{x=z+y} \left\{\|y\|_{L_1(\mathcal{M})} + \|z\|_{\mathcal{M}}\right\}.$$

记 $L_{\log_+}(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \log_+ |x| \in L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}\}$, 其中 $\log_+ t = \max\{\log t, 0\}$, $t > 0$. 易知, $L_{\log_+}(\mathcal{M})$ 构成一个代数, 且

$$L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M} \subseteq L_{\log_+}(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M}).$$

更多有关非交换 L_p 空间及广义奇异值的基础知识见文献 [10, 11].

对于 x, $y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ 及 $t > 0$, 若

$$\int_0^t \mu_s(x)ds \leq \int_0^t \mu_s(y)ds,$$

则称 x 被 y 次控制(submajorized), 记作 $x \prec y$(或 $\mu_s(x) \prec \mu_s(y)$). 类似地, 若

$$\int_0^t \log \mu_s(x)\, ds \leq \int_0^t \log \mu_s(y)\, ds,$$

则称 x 被 y 对数次控制(logarithmically submajorized), 记作 $x \prec_{\log} y$ (或 $\mu_s(x) \prec_{\log} \mu_s(y)$). 注意, 当 $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$ 且迹为通常的矩阵迹时, 上述算子意义下的次控制(对数次控制)即退化为矩阵论中

的弱控制(对数弱控制). 更多有关次控制的基础知识见文献 [10].

对 $x \in L_0(\mathcal{M})$, 记其实部与虚部分别为

$$\Re x = \frac{x+x^*}{2}, \qquad \Im x = \frac{x-x^*}{2i}.$$

若 $\Re x$ 正定, 则称 x 为增生算子 [1]. x 的数值域定义为

$$W(x) = \{\langle x\xi, \xi\rangle : \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}.$$

对 $\theta \in [0, \pi/2)$, 定义扇形

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0,\ |\Im z| \le \tan\theta\, \Re z\}.$$

若 $x \in \mathcal{M}$ 满足 $W(x) \subseteq S_\theta$, 则称 x 为扇形算子. 此时 x 可逆, 且 $\Re x > 0$. 若 $x = y + iz$ 是其笛卡尔分解, 则

$$|\langle z\xi, \xi\rangle| \le \tan(\theta)\langle y\xi, \xi\rangle$$

即

$$\pm z \le (\tan\theta)\, y.$$

若 $W(x), W(y) \subseteq S_\theta$, 则容易验证

$$W(x+y) \subseteq S_\theta,\ \ W(x^{-1}) \subseteq S_\theta.$$

若 $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ 满足 $W(x), W(y) \subseteq S_\theta$, 且 $\alpha \in (0,1)$, 定义 α-加权几何均值为

$$x\sharp_\alpha y := \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(x^{-1}+ty^{-1})^{-1}dt = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}x(y+tx)^{-1}dt.$$

当 $x, y \ge 0$ 时, 该定义与经典表达式一致: $x\sharp_\alpha y = x^{1/2}(x^{-1/2}yx^{-1/2})^\alpha x^{1/2}$. 为便于表述, 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 将 $x\sharp_\alpha y$ 记为 $x\sharp y$. 更多有关扇形算子及加权几何均值的基础知识见文献 [1].

引理 1.1 [12]. 设 $x, y \in L_{\log(+)}(\mathcal{M})$ 为两个可逆的正算子, 且 $\alpha \in [0,1]$, 则有$x\sharp_\alpha y = y\sharp_{1-\alpha}x$.

易验证 $f(x,y) = x\sharp_\alpha y$ 满足齐次性$(sx)\sharp_\alpha(ty) = s^{1-\alpha}t^\alpha(x\sharp_\alpha y)$ 且具有联合凹性, 这里 s, t 均为常数. 因此,

$$\sum_{i=1}^n x_i\sharp_\alpha y_i \le \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\sharp_\alpha\Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big), \tag{4}$$

其中 $0 \le x_i, y_i \in L_0(\mathcal{M})$. 更为详细的结果可参见 [1, 12–14].

对 $x \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$, 定义 Fuglede-Kadison 型行列式函数

$$\Lambda_t(x) = \exp\left(\int_0^t \log\mu_s(x)ds\right), t > 0,$$

并定义 Fuglede-Kadison 行列式

$$\Delta(x) = \lim_{t\to\infty} \Lambda_t(x).$$

若 x 在 $\mathcal{M}$ 中可逆, 则 $\tilde{\Delta}(x) = \exp(\tau(\log|x|))$; 否则定义 $\tilde{\Delta}(x) = \inf \tilde{\Delta}(x+\varepsilon 1)$. 注意 $\Delta(x) = \tilde{\Delta}(x)$. 若 $\tau(\mathbb{I}) = 1$, 则 $\Delta(x) = \Lambda_1(x)$. 更多有关 Fuglede-Kadison 行列式型函数的基础知识见文献 [1,10,12,15]. 为了方便阅读, 我们列出了 Fuglede-Kadison 行列式型函数的一些性质, 这些性质对于研究对数次控制不等式有重要作用.

命题 1.2. 设 $x, y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ 且 $t > 0$. 则:

(i) $\Lambda_t(xy) \le \Lambda_t(x)\Lambda_t(y)$。

(ii) $\Lambda_t(x) = \Lambda_t(x^*) = \Lambda_t(|x|) = \Lambda_t(x^*x)^{\frac{1}{2}}$。

(iii) $\Lambda_t(|x|^r) = \Lambda_t(|x|)^r$, 其中 $r \in \mathbb{R}^+$。

(iv) 若 $0 \le x \le y$, 则 $\Lambda_t(x) \le \Lambda_t(y)$。

(v) 若 xy 是自伴算子,则 $\Lambda_t(xy) \le \Lambda_t(yx)$。

(vi) 若 $x, y \ge 0$, 则 $\Lambda_t(|xy|^r) \le \Lambda_t(x^r y^r)$, 其中 $r \ge 1$。

(vii) 若 $x, y \ge 0$, 则 $\Lambda_t(x \#_\alpha y) \le \Lambda_t(x^{1-\alpha} y^\alpha)$, 其中 $0 \le \alpha \le 1$。

在下文中, 若无特别说明, $\mathcal{M}$ 均表示一个半有限von Neumann 代数。

3. 主要结论

3.1. 正算子均值的不等式

在给出主要结果之前, 我们先引入若干关键引理和命题。

引理 2.1 [16]. 设 $x, y \in L_0(\mathcal{M})$. 若 x 为次正规算子(即满足 $x^*x \ge xx^*$), 则

$$\mu_s(x^*y) \le \mu_s(xy).$$

命题 2.2. 设 $0 \le x, y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$, 且 $\alpha \in [0,1]$. 对任意 $p \ge 1$, 有

$$x \sharp_\alpha y \prec_{\log} \left(x^{(1-\alpha)p} y^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外, 若 $y^{\alpha/2} x^{1-\alpha}$ 为次正规算子, 则

$$x \sharp_\alpha y \prec_{\log} \left(y^{\frac{\alpha p}{2}} x^{(1-\alpha)p} y^{\frac{\alpha p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明：第一个不等式由命题 1.2 (iii)、(vi) 和 (vii) 直接推出. 对于第二个不等式, 由于 $x^{1-\alpha} y^\alpha = \left(y^{\frac{\alpha}{2}} x^{(1-\alpha)}\right)^* y^{\frac{\alpha}{2}}$, 应用引理 2.1 和命题 1.2 (ii)可得

$$\Lambda_t(x\sharp_\alpha y) \leq \Lambda_t(x^{1-\alpha}y^\alpha) = \Lambda_t\left(\left(y^{\frac{\alpha}{2}}x^{(1-\alpha)}\right)^* y^{\frac{\alpha}{2}}\right) \leq \Lambda_t\left(y^{\frac{\alpha}{2}}x^{(1-\alpha)}y^{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

再结合第一个不等式即证.

推论 2.3. 设 $0 \leq x, y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$, 且 $\alpha \in [0,1]$. 若 $p, r > 0$ 且 $pr \geq 1$, 则有

$$(x\sharp_\alpha y)^r \prec_{\log} \left(x^{(1-\alpha)pr}y^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外, 若 $y^{\alpha/2}x^{1-\alpha}$为次正规算子, 则

$$(x\sharp_\alpha y)^r \prec_{\log} \left(y^{\frac{\alpha pr}{2}}x^{(1-\alpha)pr}y^{\frac{\alpha pr}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明：第一个不等式可由命题 2.2 直接推出. 对于第二个不等式, 应用命题 1.2 (vi) 和命题 2.2 可得

$$\begin{aligned}
\Lambda_t(x\sharp_\alpha y) &\leq \Lambda_t\left(y^{\frac{\alpha}{2}}x^{(1-\alpha)}y^{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \Lambda_t\left(\left(y^{\frac{\alpha}{2}}x^{(1-\alpha)}y^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{pr\cdot\frac{1}{pr}}\right) \\
&= \Lambda_t\left(\left(y^{\frac{\alpha}{2}}x^{(1-\alpha)}y^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{pr}\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&\leq \Lambda_t\left(y^{\frac{\alpha pr}{2}}x^{(1-\alpha)pr}y^{\frac{\alpha pr}{2}}\right)^{\frac{1}{pr}}.
\end{aligned}$$

定理 2.4. 设 $0 \leq x_i, y_i \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$, $i = 1, \cdots, m$. 则对任意 $\alpha \in [0,1]$ 及满足 $pr > 1$ 的 $p, r > 0$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^m (x_i\sharp_\alpha y_i)\right)^r \prec_{\log} \left(\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外, 若$\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\alpha/2}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{1-\alpha}$为次正规算子, 则

$$\left(\sum_{i=1}^m (x_i\sharp_\alpha y_i)\right)^r \prec_{\log} \left(\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明：该结论可由推论 2.3 与不等式 (4) 直接得到. 事实上, 结合推论 2.3 与不等式 (4), 可得

$$\begin{aligned}
\Lambda_t\left(\sum_{i=1}^m (x_i\sharp_\alpha y_i)\right) &\leq \Lambda_t\left(\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)\sharp_\alpha\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)\right) \\
&\leq \Lambda_t\left(\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{pr}}.
\end{aligned}$$

第二个不等式的证明类似.

设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的对称拟 Banach 空间. 与之对应的非交换对称拟 Banach 空间 $E(\mathcal{M})$ 定义为

$$E(\mathcal{M}) := \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \mu(x) \in E\}, \quad \|x\|_{E(\mathcal{M})} = \|\mu(x)\|_E.$$

记

$$\mathbf{S}(\mathcal{M})^+ = \{x \in \mathcal{M} : \tau(s(x)) < \infty\},$$

其中 $s(x)$ 表示正算子x 的支撑投影；再令 $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ 表示由 $\mathbf{S}(\mathcal{M})^+$ 张成的线性空间. 为保证下述推论中右端表达式总是有限的, 本文暂假设 $x_i, y_i \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$. 若允许右端取值为 $+\infty$, 则不需要这一限制. 关于非交换对称空间的更多内容, 可参见 [10] 及其参考文献.

由定理 2.4 以及对称拟 Banach 空间中拟范数的性质, 可得如下推论.

推论 2.5. 设 $0 \le x_i, y_i \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$, $i = 1, \cdots, m$, 且 $(E, \|\cdot\|_E)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的对称拟 Banach 空间. 则对任意 $\alpha \in [0,1]$ 及满足 $pr > 1$ 的 $p, r > 0$, 有

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^m (x_i \sharp_\alpha y_i) \right)^r \right\|_{E(\mathcal{M})} \le \left\| \left(\left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^{(1-\alpha)pr} \left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^{\alpha pr} \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{E(\mathcal{M})}.$$

并且,

$$\Delta \left(\sum_{i=1}^m (x_i \sharp_\alpha y_i) \right)^r \le \Delta \left(\left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^{(1-\alpha)pr} \left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^{\alpha pr} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外, 若 $\left(\sum\limits_{i=1}^m y_i \right)^{\alpha/2} \left(\sum\limits_{i=1}^m x_i \right)^{1-\alpha}$ 为次正规算子, 则

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^m (x_i \sharp_\alpha y_i) \right)^r \right\|_{E(\mathcal{M})} \le \left\| \left(\left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^{\frac{\alpha pr}{2}} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^{(1-\alpha)pr} \left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^{\frac{\alpha pr}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{E(\mathcal{M})}.$$

注 2.6. 在此, 我们仍不清楚在不附加次正规条件的情况下, 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^m (x_i \sharp_\alpha y_i) \right)^r \prec_{\log} \left(\left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^{\frac{\alpha pr}{2}} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^{(1-\alpha)pr} \left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^{\frac{\alpha pr}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

是否仍然成立.

3.2. 扇形算子几何平均的不等式

为了建立关于扇形算子的所需结果, 我们先给出几个有用的引理. 特别地, 与文献 [17,

Proposition 3.2] 中的论证类似, 可得如下不等式.

引理 2.7. 设 $x \in \mathcal{M}$ 满足 $W(x) \subset S_\theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. 则当 $0 < s < 1$, 有 $\mu_s(\Re x) \leq \mu_s(x)$.

证明：直接计算可得

$$t^2 x^* x + \frac{1}{t^2}\mathbb{I} \geq 2\Re x \geq 0.$$

于是对 $0 < s < 1$,

$$\mu_s\left(t^2 x^* x + \frac{1}{t^2}\mathbb{I}\right) \geq \mu_s(2\Re x).$$

取 $t = \frac{1}{\mu_s(x)^{\frac{1}{2}}}$, 则

$$\mu_s\left(t^2 x^* x + \frac{1}{t^2}\mathbb{I}\right) = t^2 \mu_s(x)^2 + \frac{1}{t^2}1 = 2\mu_s(x) \geq 2\mu_s(\Re x),$$

由此即得 $\mu_s(\Re x) \leq \mu_s(x)$.

与文献 [1, Lemmas 3.2 and 3.4] 中的论证类似, 下述结果在半有限情形下同样成立. 详细证明从略.

引理 2.8. 设 $x \in \mathcal{M}$ 满足 $W(x) \subset S_\theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. 则:

(i) $\Re x^{-1} \leq (\Re x)^{-1}$.

(ii) $\cos^2(\theta)(\Re x)^{-1} \leq \Re x^{-1}$, 即$(\Re x)^{-1} \leq \sec^2(\theta)\Re x^{-1}$.

(iii) 若 $y \in \mathcal{M}$ 且 $W(x) \subset S_\theta$, 则$\big(\Re x^{-1} + \Re y^{-1}\big)^{-1} \leq \sec^2(\theta)\big((\Re x)^{-1} + (\Re y)^{-1}\big)^{-1}$.

引理 2.9. 设 $x \in \mathcal{M}$ 满足 $W(x) \subset S_\theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. 则对任意 $t > 0$, 有

$$\Lambda_t(x) \leq \sec^t(\theta)\, \Lambda_t(\Re x).$$

证明：设 $x = y + iz$ 为 x 的笛卡尔分解. 由条件 $W(x) \subset S_\theta(\theta \in [0, \pi/2))$ 知

$$\pm z \leq \tan(\theta) y.$$

于是

$$\pm y^{-1/2} z y^{-1/2} \leq \tan(\theta)\mathbb{I},$$

两边平方可得

$$\pm y^{-1/2} z y^{-1} z y^{-1/2} \leq \tan^2(\theta)\mathbb{I},$$

即

$$\pm z y^{-1} z \leq \tan^2(\theta) y.$$

由此可推出

$$\sec(\theta) y \geq x\big(\sec(\theta) y\big)^{-1} x^* = \frac{1}{\sec(\theta)}\big(y + z y^{-1} z\big).$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix} \sec(\theta)y & x^* \\ x & \sec(\theta)y \end{bmatrix} \geq 0.$$

对 x 取极分解 $x = u|x|$, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & u^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sec(\theta)y & x^* \\ x & \sec(\theta)y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec(\theta)y & |x| \\ |x| & \sec(\theta)u^*yu \end{bmatrix} \geq 0.$$

因此, 由 [12, Proposition 3.33 and Theorem 3.41] 可知

$$\Lambda_t(x) \leq \Lambda_t\left(\sec(\theta)y \sharp \sec(\theta)u^*yu\right) \leq \Lambda_t\left(\sec(\theta)y^{1/2}(u^*yu)^{1/2}\right).$$

再应用命题 1.2 即得

$$\Lambda_t(x) \leq \sec^t(\theta)\,\Lambda_t(y)$$

对任意 $t > 0$ 都成立.

引理 2.10. 设 $x, y \in \mathcal{M}$ 满足 $W(x), W(y) \subset S_\theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. 则

$$\Re\big(x\sharp_\alpha y\big) \leq \sec^2(\theta)\left(\Re x \sharp_\alpha \Re y\right).$$

证明：应用引理 2.8 (i) 和(iii), 有

$$\begin{aligned} \Re(x\sharp_\alpha y) &= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\Re[(x^{-1}+ty^{-1})^{-1}]dt \\ &\leq \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(\Re x^{-1}+t\Re y^{-1})^{-1}dt \\ &\leq \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\sec^2(\theta)[(\Re x)^{-1}+t(\Re y)^{-1}]^{-1}dt \\ &= \sec^2(\theta)\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}[(\Re x)^{-1}+t(\Re y)^{-1}]^{-1}dt \\ &= \sec^2(\theta)(\Re x\sharp_\alpha\Re y). \end{aligned}$$

命题 2.11. 设 $x, y \in \mathcal{M}$ 满足 $W(x), W(y) \subset S_\theta$, 且 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. 则对任意 $\alpha \in [0, 1]$ 及 $p \geq 1$, 有

$$x\sharp_\alpha y \prec_{\log} \sec^3(\theta)\left((\Re x)^{(1-\alpha)p}(\Re y)^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外, 若 $(\Re y)^{\frac{\alpha}{2}}(\Re x)^{1-\alpha}$ 是次正规算子, 则

$$x\sharp_\alpha y \prec_{\log} \sec^3(\theta)\left((\Re y)^{\frac{\alpha p}{2}}(\Re x)^{(1-\alpha)p}(\Re y)^{\frac{\alpha p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明：该结论可由引理 2.9, 引理 2.10 和命题 2.2 直接推出. 事实上, 对任意 $t>0$, 有

$$\begin{aligned}\Lambda_t(x\sharp_\alpha y) &\le \sec^t(\theta)\Lambda_t(\Re(x\sharp_\alpha y))\\ &\le \sec^t(\theta)\Lambda_t\left(\sec^2(\theta)(\Re x\sharp_\alpha \Re y)\right)\\ &\le \sec^{3t}(\theta)\Lambda_t\left((\Re x)^{(1-\alpha)p}(\Re y)^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

引理 2.12. 设 $\{x_i\}_{i=1}^m,\{y_i\}_{i=1}^m\subset\mathcal{M}$ 满足 $W(x_i),W(y_i)\subset S_\theta$, 其中 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$. 则对任意 $\alpha\in[0,1]$, 有

$$\Lambda_t\left(\sum_{i=1}^m x_i\sharp_\alpha y_i\right)\le \sec^{3t}(\theta)\Lambda_t\left(\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)\sharp_\alpha\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)\right),\quad t>0.$$

等价地,

$$\sum_{i=1}^m x_i\sharp_\alpha y_i \prec_{\log} \sec^3(\theta)\left(\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)\sharp_\alpha\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)\right).$$

证明：直接应用引理 2.9 以及 引理 2.10, 可得

$$\begin{aligned}\Lambda_t\left(\sum_{i=1}^m (x_i\sharp_\alpha y_i)\right) &\le \sec^t(\theta)\Lambda_t\left(\Re\left(\sum_{i=1}^m (x_i\sharp_\alpha y_i)\right)\right)\\ &= \sec^t(\theta)\Lambda_t\left(\sum_{i=1}^m \Re(x_i\sharp_\alpha y_i)\right)\\ &\le \sec^{3t}(\theta)\Lambda_t\left(\sum_{i=1}^m (\Re x_i\sharp_\alpha \Re y_i)\right)\\ &\le \sec^{3t}(\theta)\Lambda_t\left(\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)\sharp_\alpha\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)\right),\quad t>0.\end{aligned}$$

定理 2.13. 设 $\{x_i\}_{i=1}^m,\{y_i\}_{i=1}^m\subset\mathcal{M}$ 满足 $W(x_i),W(y_i)\subset S_\theta$, 其中 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$. 设 $\alpha\in[0,1]$, 且 $p,r>0$ 满足 $pr>1$. 则

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\sharp_\alpha y_i\right)^r \prec_{\log} \sec^{3r}(\theta)\left[\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)^{\alpha pr}\right]^{1/p}.$$

此外, 若$\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\alpha/2}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{1-\alpha}$ 是次正规算子, 则

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\sharp_\alpha y_i\right)^r \prec_{\log} \sec^{3r}(\theta)\left[\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\right]^{1/p}.$$

证明：由推论 2.3 以及引理 2.12 可得

$$\begin{aligned}\Lambda_t\left(\sum_{i=1}^m (x_i\sharp_\alpha y_i)\right)^r &\le \sec^{3tr}(\theta)\Lambda_t\left(\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)\sharp_\alpha\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)\right)^r\\ &\le \sec^{3tr}(\theta)\Lambda_t\left(\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)^{\alpha pr}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad t>0.\end{aligned}$$

其余推导与命题 2.2 的证明完全类似, 故不再赘述.

作为上述定理的一个推论, 由定理 2.13 结合对称拟 Banach 空间中拟范数的性质, 可得如下结果.

推论 2.14. 设 $0\le\{x_i\}_{i=1}^m,\{y_i\}_{i=1}^m\subset\mathcal{M}$ 满足 $W(x_i),W(y_i)\subset S_\theta$, 其中 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$. 设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的一个对称拟Banach 空间. 则当 $\alpha\in[0,1]$ 且 $p,r>0$ 满足 $pr>1$ 时,

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^m x_i\sharp_\alpha y_i\right)^r\right\|_{E(\mathcal{M})}\le\sec^{3r}(\theta)\left\|\left[\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)^{\alpha pr}\right]^{1/p}\right\|_{E(\mathcal{M})}.$$

此外, 若$(\sum_{i=1}^m \Re y_i)^{\alpha/2}(\sum_{i=1}^m \Re x_i)^{1-\alpha}$ 是次正规算子, 则

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^m x_i\sharp_\alpha y_i\right)^r\right\|_{E(\mathcal{M})}\le\sec^{3r}(\theta)\left\|\left[\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\left(\sum_{i=1}^m \Re x_i\right)^{(1-\alpha)pr}\left(\sum_{i=1}^m \Re y_i\right)^{\frac{\alpha pr}{2}}\right]^{1/p}\right\|_{E(\mathcal{M})}.$$

最后, 我们补充一个有限维的直观说明. 取 $\mathcal{M}=M_n(\mathbb{C})$ 且 $\tau=Tr$, 则本文中的 τ-可测算子退化为矩阵, 广义奇异值函数 $\mu_s(x)$ 退化为矩阵奇异值 $s(\cdot)$. 因此, 本文定理 2.4 在有限维正定矩阵情形下与引言中的不等式 (2) 保持一致, 而定理 2.13 在扇形矩阵情形下则退化为不等式 (3).

为便于读者理解, 下面给出一个具体的 2×2 例子, 说明定理 2.4 在 $m=2$ 时的情形. 设

$$x_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\quad y_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\quad y_2=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

则这四个矩阵均为正定矩阵. 取$\alpha=\frac{1}{2}$, $p=2$, $r=1$. 此时 $pr=2>1$. 直接计算得

$$x_1+x_2=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix},\qquad y_1+y_2=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

于是,

$$\Big((x_1+x_2)(y_1+y_2)\Big)^{1/2}=\begin{pmatrix}\sqrt{15}&0\\0&\sqrt{12}\end{pmatrix}.$$

不等式左边$x_1\# y_1+x_2\# y_2$, 可通过几何均值的定义, 得到一个具体的 2×2 矩阵.通过计算可知

$$(x_1\#y_1 + x_2\#y_2) \prec_{\log} \Big((x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\Big)^{1/2}.$$

这与定理 2.4的结论保持一致. 同理, 可验证定理 2.13.

参考文献

[1] Wang, Y. and Shao, J. (2021) Some Logarithmic Submajorisations and Determinant Inequalities for Operators with Numerical Ranges in a Sector. *Annals of Functional Analysis*, **12**, Article No. 27. https://doi.org/10.1007/s43034-021-00117-w

[2] Hoa, D.T. (2016) An Inequality for t-Geometric Means. *Mathematical Inequalities & Applications*, **19**, 765-768. https://doi.org/10.7153/mia-19-56

[3] Bourin, J. (2009) Matrix Subadditivity Inequalities and Block-Matrices. *International Journal of Mathematics*, **20**, 679-691. https://doi.org/10.1142/s0129167x09005509

[4] Hayajneh, S. and Kittaneh, F. (2013) Trace Inequalities and a Question of Bourin. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **88**, 384-389. https://doi.org/10.1017/s0004972712001104

[5] Audenaert, K. (2015) A Norm Inequality for Pairs of Commuting Positive Semidefinite Matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **30**, 80-84. https://doi.org/10.13001/1081-3810.2829

[6] Bikchentaev, A.M., Kittaneh, F., Moslehian, M.S. and Seo, Y. (2024) Trace Inequalities: For Matrices and Hilbert Space Operators. Springer, 332 p.

[7] Hayajneh, S. and Kittaneh, F. (2025) A Log-Majorization Version of Audenaert's Inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **548**, Article ID: 129372. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129372

[8] Tan, F. and Che, H. (2019) Inequalities for Sector Matrices and Positive Linear Maps. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **35**, 418-423. https://doi.org/10.13001/ela.2019.5239

[9] 许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾. 算子代数与非交换L_p引论[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[10] Dodds, P.G., Dodds, T.K., Sukochev, F.A. and Zanin, D. (2020) Logarithmic Submajorization, Uniform Majorization and Hölder Type Inequalities for τ-Measurable Operators. *Indagationes Mathematicae*, **31**, 809-830. https://doi.org/10.1016/j.indag.2020.02.004

[11] Fack, T. and Kosaki, H. (1986) Generalized s-Numbers of τ-Measurable Operators. *Pacific Journal of Mathematics*, **123**, 269-300. https://doi.org/10.2140/pjm.1986.123.269

[12] Hiai, F. and Kosaki, H. (2021) Connections of Unbounded Operators and Some Related Topics: Von Neumann Algebra Case. *International Journal of Mathematics*, **32**, Article ID: 2150024. https://doi.org/10.1142/s0129167x21500245

[13] Kubo, F. and Ando, T. (1980) Means of Positive Linear Operators. *Mathematische Annalen*, **246**, 205-224. https://doi.org/10.1007/bf01371042

[14] Lawson, J., Lee, H. and Lim, Y. (2012) Weighted Geometric Means. *Forum Mathematicum*, **24**, 1067-1090. https://doi.org/10.1515/form.2011.096

[15] Kosaki, H. (1992) An Inequality of Araki-Lieb-Thirring (Von Neumann Algebra Case). *Proceedings of the American Mathematical Society*, **114**, 477-481. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1992-1065951-1

[16] Bikchentaev, A.M. (2017) On τ-Compactness of Products of τ-Measurable Operators. *International Journal of Theoretical Physics*, **56**, 3819-3830. https://doi.org/10.1007/s10773-017-3318-6

[17] Han, Y.Z. and Yan, C. (2021) Harnack Type Inequalities for Operators in Logarithmic Submajorisation. *Operators and Matrices*, **15**, 1109-1129. https://doi.org/10.7153/oam-2021-15-69