

关于不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$$

张婉丽

西南大学数学与统计学院, 重庆

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月26日

摘要

本文运用Pell方程、二次平方剩余、递归序列等方法, 对不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$ 展开研究, 证明了该方程共有16组整数解, 且不存在正整数解。

关键词

不定方程, 整数解, 递归序列, 平方剩余

On the Diophantine Equation

$$5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$$

Wanli Zhang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

In this paper, we use Pell equation, quadratic residue, recursive sequence and other

methods to study the $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$ Diophantine equation. It is proved that the equation has 16 groups of integer solutions, and there is no positive integer solution.

Keywords

Diophantine Equation, Integer Solution, Recursive Sequence, Squared Residual

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言与结论

对于形如 $px(x+1)(x+2)(x+3) = qy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $(p, q) = 1, p, q \in \mathbb{N}^*$) 的不定方程, 其正整数解的研究长期受到数论领域的关注 [1-4], 现已有一些重要结论. 1971年Cohn证明了当 $p = 1, q = 2$ 时, 不定方程仅有正整数解 $(x, y) = (5, 4)$ [1]; 1991年罗明证明了 $p = 1, q = 7$ 时, 仅有正整数解 $(x, y) = (4, 2)$ [2]; 2024年张艺宝证明了当 $p = 5, q = 42$ 时, 仅有正整数解 $(x, y) = (6, 3)$ [3]; 2025年李涵证明了当 $p = 5, q = 11$ 时, 无正整数解 [4]. 但当 $p = 5, q = 19$ 时, 方程转化后得到的递推序列系数相对于前者较大, 直接计算与验证的难度显著提升, 故该方程整数解的问题仍未解决. 本文将证明 $p = 5, q = 19$ 时, 即方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3) \quad (1)$$

无正整数解.

2. 预备知识

化简(1)得:

$$\begin{aligned} 25[x(x+3)][(x+1)(x+2)] &= 95[y(y+3)][(y+1)(y+2)] \\ 25(x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1) &= 95(y^2 + 3y + 1 - 1)(y^2 + 3y + 1 + 1) \\ 25(x^2 + 3x + 1)^2 - 25 &= 95(y^2 + 3y + 1)^2 - 95, \end{aligned}$$

由此得到如下形式:

$$[5(x^2 + 3x + 1)]^2 - 95(y^2 + 3y + 1)^2 = -70. \quad (2)$$

易知方程 $X^2 - 95Y^2 = -70$ 的全部整数解由以下两个结合类给出:

$$\begin{aligned} X_n + Y_n\sqrt{95} &= \pm (5 + \sqrt{95}) (u_n + v_n\sqrt{95}) = \pm (5 + \sqrt{95}) (39 + 4\sqrt{95})^n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ \bar{X}_n + \bar{Y}_n\sqrt{95} &= \pm (-5 + \sqrt{95}) (u_n + v_n\sqrt{95}) = \pm (-5 + \sqrt{95}) (39 + 4\sqrt{95})^n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

其中 $5 + \sqrt{95}$ 是方程 $X^2 - 95Y^2 = -70$ 的最小正整数解, $39 + 4\sqrt{95}$ 是 Pell 方程 $X^2 - 95Y^2 = 1$ 的基本解。易知 $\bar{y}_n = y_{-n}$, 且方程(2)的解需要满足以下两个式子

$$(2y + 3)^2 = 4y_n + 5, \quad (2\bar{y} + 3)^2 = 4\bar{y}_n + 5.$$

故 $y_n \geq -1$, $\bar{y}_n \geq -1$, 并且方程 $X^2 - 95Y^2 = -70$ 的两个结合类都只取正号, 于是方程(2)的解需要满足

$$(2y + 3)^2 = \pm 4y_n + 5. \quad (3)$$

不难推出以下关系式成立:

$$y_{n+1} = 78y_n - y_{n-1}, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 59, \quad (4)$$

$$u_{n+1} = 78u_n - u_{n-1}, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 39, \quad (5)$$

$$v_{n+1} = 78v_n - v_{n-1}, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 4, \quad (6)$$

$$u_{2n} = u_n^2 + 95v_n^2 = 2u_n^2 - 1, \quad v_{2n} = 2u_nv_n, \quad (7)$$

$$y_n = u_n + 5v_n, \quad (8)$$

$$y_{n+2^k m} \equiv -y_n \pmod{u_m}, \quad (9)$$

$$u_{n+2^k m} \equiv -u_n \pmod{u_m}, \quad (10)$$

$$v_{n+2^k m} \equiv -v_n \pmod{u_m}. \quad (11)$$

以下的内容将证明(3)式仅在 $n = 0$ 时成立, 进而求得方程(2)的全部整数解, 最后得到方程(1)的全部整数解。

3. 分类讨论

3.1. 当 $(2y + 3)^2 = 4y_n + 5$ 时

引理3.1. 设 $2 \mid m$, $m > 0$, 则

$$\left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}} \right) = - \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{111} \right).$$

证明. 当 $2 \mid m$, $m > 0$ 时, 由(5)式知 $2 \nmid u_m$, 由(7)式知 $u_{2m} = 2u_m^2 - 1 \equiv 1 \pmod{8}$, $u_m \equiv 1$

(mod 4), 于是有

$$\left(\frac{-1}{u_m}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{u_{2m}}\right) = 1, \quad \left(\frac{5}{u_{2m}}\right) = 1,$$

因此

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) &= \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 10u_m^2}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 40u_mv_m + 10u_m^2}{u_{2m}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{u_{2m}}\right) \left(\frac{5}{u_{2m}}\right) \left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right) \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{u_{2m}}\right) \\ &= \left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right) \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{u_m^2 + 95v_m^2}{u_m \pm 4v_m}\right) \\ &= \left(\frac{95v_m^2 \pm u_m^2}{u_m \pm 4v_m}\right) = \left(\frac{111}{u_m \pm 4v_m}\right) = \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{111}\right). \end{aligned}$$

□

引理3.2. 若 $4y_n + 5$ 是平方数, 则 $n \equiv 0 \pmod{2^3 \times 3 \times 5}$.

证明. 对序列 $\{4y_n + 5\}$ 取不同的模进行平方剩余测试. 对于每个模数 p , 计算 $\{4y_n + 5\}$ 模 p 的周期, 若某剩余类对应的值为平方非剩余, 则排除该 n 的同余类.

以模101为例, 计算 $\{4y_n + 5\}$ 模101的前几项如表1所示. 从表中可见, 当 $n \equiv 1, 2 \pmod{5}$ 时, $4y_n + 5 \equiv 39, 27 \pmod{101}$, 而39和27均是模101的平方非剩余 (Jacobi符号为-1), 故排除这两类.

Table 1. $4y_n + 5 \pmod{101}$ and Jacobi symbol

表 1. $4y_n + 5 \pmod{101}$ 与 Jacobi 符号

n	$4y_n + 5 \pmod{101}$	$\left(\frac{4y_n + 5}{101}\right)$
0	9	+1
1	39	-1
2	27	-1
3	71	+1
4	81	+1

表2汇总了各模数的排除信息以及排除后剩余的 n 的同余类.

逐步合并上述排除条件 (利用中国剩余定理), 最终得到

$$n \equiv 0 \pmod{120}.$$

□

引理3.3. 设 $n \equiv 0 \pmod{2^3 \times 3 \times 5}$, 则 $4y_n + 5$ 是平方数当且仅当 $n = 0$.

Table 2. Overview of the modular exclusion process

表 2. 模排除过程一览

模数 p	序列周期	被排除的 $n \pmod{\text{周期}}$	剩余的 $n \pmod{\text{周期}}$
101	5	$n \equiv 1, 2$	0, 3, 4
3041	8	$n \equiv 2, 3, 5$	0, 1, 4, 6, 7
111	6	$n \equiv 1, 5$	0, 2, 3, 4
2027	12	$n \equiv 2, 7, 9, 10, 11$	0, 1, 3, 4, 5, 6, 8
151	15	$n \equiv 2, 5, 6, 7, 10, 11, 14$	0, 1, 3, 4, 8, 9, 12, 13
719	20	$n \equiv 9, 15, 16, 18, 19$	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 17
2789	45	2, 3, 5, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 21, 24, 27, 29, 30, 31, 35, 39, 43, 44	0, 1, 4, 7, 8, 9, 12, 16, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 40, 41, 42

证明. 设 $n \neq 0$, 令 $n = (4k \pm 1) \times 2 \times 3 \times 5 \times 2^t$ (其中 $t \geq 1$). 现取 m 为 2^t 、 5×2^t 、 3×2^t 之一, 由引理1和(8)、(19)可推出

$$4y_n + 5 \equiv 4u_n + 20v_n + 5 \equiv \pm 20v_{2m} + 5 \pmod{u_{2m}}.$$

故

$$\left(\frac{4y_n + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{u_m \pm 4v_m}{111}\right).$$

对 $\{u_m \pm 4v_m\}$ 取 $\text{mod}111$, 经计算得到的两个剩余序列周期均为36, 再对 $\{2^t\}$ 取 $\text{mod}36$, 得到的剩余周期为6.

情况1 对于序列 $\{u_m - 4v_m\}$, m 的选择如下:

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 0, 4, 5 \pmod{6}, \\ 3 \times 2^t, & t \equiv 3 \pmod{6}, \\ 5 \times 2^t, & t \equiv 2 \pmod{6}, \\ 3 \times 5 \times 2^t, & t \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

对于表 3 中的所有 m , 均有 $\left(\frac{u_m - 4v_m}{111}\right) = -1$, 进而 $\left(\frac{4y_n + 5}{u_{2m}}\right) = -1$, 所以 $4y_n + 5$ 为非平方数.

Table 3. The case of $u_m - 4v_m \pmod{111}$

表 3. $u_m - 4v_m \pmod{111}$ 的情形

$t \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
$m \pmod{36}$	28	30	20	24	8	32
$u_m - 4v_m \pmod{111}$	19	104	94	103	31	13

情况2 对于序列 $\{u_m + 4v_m\}$, m 的选择如下:

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 0, 1, 4, 5 \pmod{6}, \\ 3 \times 2^t, & t \equiv 2 \pmod{6}, \\ 5 \times 2^t, & t \equiv 3 \pmod{6}, \end{cases}$$

Table 4. The case of $u_m + 4v_m \pmod{111}$

表 4. $u_m + 4v_m \pmod{111}$ 的情形

$t \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
$m \pmod{36}$	28	2	4	8	16	32
$u_m - 4v_m \pmod{111}$	19	71	31	19	94	52

同理对于表 4 中所有的 m , 均有 $\left(\frac{u_m+4v_m}{111}\right) = -1$, 进而 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right) = -1$, 所以 $4y_n + 5$ 为非平方数。

因此当 $n = 0$ 时, $4y_0 + 5 = 3^2$ 为平方数。□

引理3.4. 设 $n \equiv -1 \pmod{2^2 \times 3^2 \times 5}$, 则 $4y_n + 5$ 是平方数当且仅当 $n = -1$ 。

证明. 设 $n \neq -1$, 令 $n = -1 + 2 \times (4k \pm 1) \times 3^2 \times 5 \times 2^t$ (其中 $t \geq 1$), 由(19)式可知,

$$4y_n + 5 = 4y_{-1+2 \times (4k \pm 1) \times 3^2 \times 5 \times 2^t} + 5 \equiv -4y_{-1} + 5 \equiv -111 \pmod{u_m},$$

其中 $y_{-1} = 29$, m 为 $2^t, 3 \times 2^t, 5 \times 2^t, 3 \times 5 \times 2^t$ 中的任意一个。

因为 $2 \mid m$, 此时 $u_m \equiv 1 \pmod{4}$, 又由(5)易推出 $u_m \equiv 1 \pmod{3}$, 则

$$\left(\frac{4y_n + 5}{u_m}\right) = \left(\frac{-111}{u_m}\right) = \left(\frac{-1}{u_m}\right) \left(\frac{3}{u_m}\right) \left(\frac{37}{u_m}\right) = \left(\frac{37}{u_m}\right).$$

对 u_m 取 $\pmod{37}$, 剩余序列周期为 38, 对序列 $\{2^t\}$ 取 $\pmod{38}$, 剩余序列周期为 18. 令 $m = 2^t$, 则对应的 $u_m \pmod{37}$ 均为平方非剩余, 从而 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right) = -1$, 故 $4y_n + 5$ 不可能为平方数. 因此 $n = -1$, 此时 $4y_{-1} + 5 = 19^2$ 为平方数。□

3.2. 当 $(2y + 3)^2 = 4\bar{y}_n + 5$ 时

引理3.5. $4\bar{y}_n + 5$ 是平方数当且仅当 $n = 0$ 。

证明. 因为 $(2y + 3)^2 = 4\bar{y}_n + 5 = -4y_n + 5 \geq 0$, 解得 $y_n \leq 1$. 由(4)知 $y_0 = 1$, 且 $\{y_n\}$ 是递增序列, 又因为 $-4y_0 + 5 = 1^2$, 所以当且仅当 $n = 0$ 时, $4\bar{y}_n + 5$ 是平方数。□

4. 定理证明

定理4.1. 不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的全部整数解为

$$(x, y) = (0, 0), (-1, 0), (-2, 0), (-3, 0), (0, -3), (-1, -3), (-2, -3), (-3, -3), \\ (0, -1), (-3, -1), (-2, -1), (-1, -1), (0, -2), (-1, -2), (-2, -2), (-3, -2),$$

其中无正整数解。

证明. 由引理3知 $(2y+3)^2 = 4y_0 + 5 = 3^2$, 解得 $y = 0$ 或 $y = -3$, 相对应的整数解为

$$(-3, -3), (-2, -3), (-1, -3), (0, -3), (-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0).$$

由引理5知 $(2y+3)^2 = -4y_0 + 5 = 1^2$, 解得 $y = -1$ 或 $y = -2$, 相对应的整数解为

$$(-3, -2), (-2, -2), (-1, -2), (0, -2), (-3, -1), (-2, -1), (-1, -1), (0, -1).$$

综上所述, 该不定方程有16组整数解, 没有正整数解。 □

5. 结论

本文以不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$ 为研究对象, 综合运用数论中的Pell方程理论、递归序列分析及二次平方剩余判定方法, 完成了对方程整数解的完整探究。研究首先通过代数变形将原方程转化为 $[5(x^2+3x+1)]^2 - 95(y^2+3y+1)^2 = -70$ 的形式, 明确其解与Pell方程 $X^2 - 95Y^2 = -70$ 两个结合类的对应关系, 并推导得出递归序列 $\{y_n\}$ 的递推关系 $y_{n+1} = 78y_n - y_{n-1}$ (初始值 $y_0 = 1, y_1 = 59$)及相关同余性质; 随后通过多轮模运算 (如模13、模101、模11等) 与引理证明, 逐步排除非解情形, 最终证实该方程共存在16组整数解, 且不存在正整数解。

本文的核心贡献在于填补了特定参数组合下同类不定方程的研究空白。对于形如 $px(x+1)(x+2)(x+3) = qy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $\gcd(p, q) = 1, p, q \in \mathbb{N}^*$)的不定方程, 此前学界已在 $(p, q) = (1, 7), (5, 42), (5, 11)$ 等参数下取得求解成果, 但 $(p, q) = (5, 19)$ 的情形长期未得到解决。本文通过严谨的推导与验证, 明确了该参数组合下方程的解的数量与具体形式, 进一步完善了此类不定方程的解谱, 为后续同类方程的研究提供了关键的基础结论。

参考文献

- [1] Cohn, J.H.E. (1971) The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 2y(y+1)(y+2)(y+3)$. *Pacific Journal of Mathematics*, **37**, 331-335. <https://doi.org/10.2140/pjm.1971.37.331>

-
- [2] 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991(1): 1-8.
- [3] 张艺宝. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2105-2109.
- [4] 李涵. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 199-204.