

由 Lévy 过程驱动的有限记忆自排斥扩散的遍历性与大数定律

杨毅, 田琳琳*, 闫理坦

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026 年 4 月 13 日; 录用日期: 2026 年 5 月 7 日; 发布日期: 2026 年 5 月 19 日

摘要

本文研究由一维 Lévy 过程驱动的有限记忆自排斥扩散过程 $X^T(t)$ 。将该过程的路径增量构造为 Skorokhod 空间 $D[0, T]$ 上的马尔可夫链并证明了该链的 Harris 正常返性及其不变测度的有限性, 由此得出该过程的强大数定律。

关键词

自排斥扩散, 有限记忆近似, Lévy 过程, Harris 正常返, 强大数定律

Ergodicity and the Strong Law of Large Numbers for Finite-Memory Self-Repelling Diffusions Driven by Lévy Processes

Yi Yang, Linlin Tian*, Litan Yan

College of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: April 13, 2026; accepted: May 7, 2026; published: May 19, 2026

* 通讯作者。

Abstract

This paper investigates a finite-memory self-repelling diffusion process $X^T(t)$ driven by a one-dimensional Lévy process. By formulating the path increments of the process as a Markov chain on the Skorokhod space $D[0, T]$, we establish the Harris recurrence of the chain and the finiteness of its invariant measure. Consequently, the strong law of large numbers for this process is derived.

Keywords

Self-Repelling Diffusion, Finite-Memory Approximation, Lévy Processes, Harris Recurrence, Strong Law of Large Numbers

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自排斥扩散常被用于模拟聚合物链的生长或多孔介质中微粒的运动轨迹 [1, 2]。这类运动的核心特征是粒子在移动过程中会留下某种“气味”或物理占据空间，从而对其未来的路径产生排斥作用。

经典的自排斥扩散模型是最初由 Durrett 和 Rogers [3] 提出的布朗聚合物模型，并由 Cranston 和 Mountford [4] 进一步完善了其渐近行为的严格证明。然而，真实的物理环境往往伴随着非连续的随机冲击。为了更真实地刻画这种具有跳跃特征的复杂噪声，我们将驱动过程推广为一维 Lévy 过程 $L(t)$ 。本文我们研究以下随机微分方程：

$$X(t) = L(t) + \int_0^t ds \int_0^s f(X(s) - X(u)) du \quad (1)$$

其中， $f \geq 0$ 是排斥函数。该方程描述了一个非马尔可夫的系统：粒子在时刻 t 的位移不仅受到当前白噪声的驱动，还受到其整个历史轨迹 $X([0, t])$ 的积分排斥。这种全历史依赖导致过程的自然状态空间是无穷维的，给直接分析其遍历性和渐近行为带来了极大困难。

为了克服无穷维状态空间带来的技术困难，我们引入了一个截断参数 $T > 0$ ，构造具有有限记

忆的近似过程 $X^T(t)$ 。具体而言, 我们考虑如下由 Lévy 过程驱动有限记忆泛函随机微分方程:

$$X^T(t) = L(t) + \int_0^t ds \int_{(s-T) \vee 0}^s f(X^T(s) - X^T(u)) du \quad (2)$$

为保证后续遍历性分析的严谨性, 我们对驱动过程 $L(t)$ 和排斥函数 f 作出如下假设:

(假设 A) 一维 Lévy 过程 $L(t)$ 的生成元三元组为 (σ^2, ν, b) , 且满足:

- 具有严格的平均正向漂移: $E[L_1] > 0$ 。
- Lévy 测度具有二阶矩: $\int_{\mathbb{R} \setminus 0} x^2 \nu(dx) < \infty$ 。
- 存在指数矩: 即存在 $\theta_0 > 0$, 使得对所有 $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$, 有 $E[e^{\theta L_1}] < \infty$ 。
- 高斯分量非退化: $\sigma^2 > 0$ 。

关于 Lévy 过程的更多基础性质, 可以参考 [5-8]。

(假设 B) 假设交互函数 f 为非负、Lipschitz 连续且具有紧支撑的函数。不失一般性, 我们假设 $\text{supp } f \subseteq [-1, 1]$ 且 $\|f\|_\infty \leq 1$ 。

注记 严格正向平均漂移 $E[L_1] > 0$ 模拟了粒子在一个具有主导方向的环境中运动 (如重力场或稳定的流体动力)。非退化的高斯分量 $\sigma^2 > 0$ 则代表了环境中无处不在的基础噪声。

本文的核心内容是刻画上述有限记忆近似过程 $X^T(t)$ 的长时间渐近行为。我们的工作包括主要两个方面:

首先, 将连续时间过程 $X^T(t)$ 的增量切分为长度为 T 的路径片段:

$$Y_n(s) \equiv X^T((n-1)T + s) - X^T((n-1)T), \quad 0 \leq s \leq T \quad (3)$$

由于截断, 序列 $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ 构成了一个定义在 Skorokhod 空间 $D[0, T]$ 上的马尔可夫链。我们将利用 Lévy-Itô 分解分离出连续高斯项, 证明该马尔可夫链的 Harris 正常返性。

其次, 在确立了遍历性的基础上, 我们将证明其不变测度 μ_T 的有限性, 并进一步建立过程 $X^T(t)$ 的强大数定律。即证明存在一个仅依赖于截断长度 T 的严格正向常数速度 c_T , 使得以下极限成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X^T(t)}{t} = c_T \quad \text{a.s.} \quad (4)$$

2. 预备知识

在本节中, 我们简要介绍本文所依赖的核心数学概念与工具。

2.1. Lévy 过程与 Lévy-Itô 分解

本文的驱动噪声是一维 Lévy 过程 $L(t)$, 其由特征三元组 (σ^2, ν, b) 完全决定。对于任意时间段 $[0, T]$ 上的 Lévy 增量 $L'_s \equiv L(nT + s) - L(nT)$, 给定截断常数 $\epsilon > 0$, 根据 Lévy-Itô 分解 [5, 6], 我们可以将其表示为以下四个独立部分的和:

$$L'_s = \gamma_\epsilon s + \sigma W_s + J_s^\epsilon + M_s^\epsilon \quad (5)$$

其中:

- $\gamma_\epsilon s$ 为截断后的线性漂移项。
- σW_s 为连续的中心化高斯分量, 根据假设 A, 该分量是非退化的 (即 $\sigma^2 > 0$)。
- $J_s^\epsilon = \int_0^s \int_{|x| > \epsilon} x N(dr, dx)$ 为描述绝对值大于 ϵ 的跳跃的复合泊松过程, 其跳跃强度为有限值 $\lambda_\epsilon = \nu(\{x : |x| > \epsilon\}) < \infty$ 。
- $M_s^\epsilon = \int_0^s \int_{|x| \leq \epsilon} x \tilde{N}(dr, dx)$ 为由小跳跃构成的纯跳补偿泊松鞅。

2.2. Skorokhod 空间与马尔可夫链的离散化

由于方程中存在积分排斥项 $\int_{(s-T) \vee 0}^s f(X^T(s) - X^T(u)) du$, 过程 $X^T(t)$ 的瞬时演化依赖于过去长度为 T 的历史轨道, 因此它本身不是一个马尔可夫过程。

为克服这一困难, 我们引入离散时间骨架。记 $D[0, T]$ 为赋予 Skorokhod 拓扑的右连续且带有左极限 (càdlàg) 的函数空间 (参考 [9, 10])。我们定义过程在第 n 个时间窗口 $[(n-1)T, nT]$ 内的路径增量片段为:

$$Y_n(s) \equiv X^T((n-1)T + s) - X^T((n-1)T), \quad 0 \leq s \leq T$$

对于 $n \geq 1$, 上述定义将连续时间的非马尔可夫过程转化为了状态空间 $D[0, T]$ 上的离散时间序列 $\{Y_n\}$ 。由于 Lévy 过程具有独立平稳增量, 且记忆长度严格截断于 T , 序列 $\{Y_n\}$ 构成了一个定义在无穷维泛函空间 $D[0, T]$ 上的马尔可夫链。

2.3. 正常返与不变测度

对于定义在一般状态空间 (如 $D[0, T]$) 上的马尔可夫链, 经典的离散状态空间遍历理论不再适用。我们需要依赖 Harris 链理论 [11–14]。

设 $p(y, K) \equiv P(Y_{n+1} \in K | Y_n = y)$ 为马尔可夫链的一步转移概率。如果在 Skorokhod 拓扑下, 对于任意非空开集 $K \subset D[0, T]$, 存在一个严格大于零的常数 $C_K > 0$, 使得对所有初始状态 $y \in D[0, T]$ 均有:

$$p(y, K) \geq C_K$$

则称该马尔可夫链 $\{Y_n\}$ 是 Harris 正常返的。

根据 Harris 链的基本性质, 若链是 Harris 正常返的, 则其必然存在一个不变测度 μ_T 。进一步地, 为了建立大数定律, 我们需要确保该不变测度是有限的。

对于一不变测度有限的 Harris 链, 我们有以下重要结论, 即 Birkhoff 遍历定理, 其证明过程可参考 [15]。

定理 1.1 设 $\Phi = \{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ 为定义在一般可测状态空间 (E, \mathcal{E}) 上的马尔可夫链。若 Φ 是 Harris 正常返的, 则它存在唯一的 (至多相差一个乘法常数) 不变测度。进一步地, 若该不变测度是有限的 (即 Φ 为正 Harris 常返链), 我们可以将其无损地归一化为唯一的不变概率测度 π 。对于任意满足绝对可积条件的实值可测函数 (或观测泛函) $f \in L^1(E, \pi)$, 即 $\int_E |f(x)|\pi(dx) < \infty$, 则对于任意的初始状态 $\Phi_1 = x \in E$, 下列极限在几乎必然 (P_x -a.s.) 的意义下成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\Phi_k) = \int_E f(y)\pi(dy) \quad \text{a.s.}$$

3. 主要定理及证明

本节的核心目标是严格证明有限记忆自排斥扩散过程的强大数定律。我们的主定理如下:

定理 3.1 在满足 Lévy 过程假设 (假设 A) 与自排斥函数假设 (假设 B) 的条件下, 存在一个严格正的常数 c_T , 使得有限记忆近似过程满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X^T(t)}{t} = c_T \quad \text{a.s.} \tag{6}$$

为了证明该定理, 我们将连续时间过程的增量转化为离散马尔可夫链 $\{Y_n\}$, 并通过以下四个关键引理完成论证。

3.1. Harris 正常返性

引理 2.2 设 $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ 为定义在 càdlàg 函数的 Skorokhod 空间 $D[0, T]$ 上的马尔可夫链。假设驱动 Lévy 过程的高斯分量非退化 (即 $\sigma^2 > 0$), 则对于 $D[0, T]$ 中的任意非空开集 K , 存在一个常数 $C_K > 0$, 使得对所有初始状态 $y \in D[0, T]$, 一步转移概率满足:

$$p(y, K) \equiv P(Y_{n+1} \in K | Y_n = y) \geq C_K$$

因此, 序列 $\{Y_n\}$ 是一个 Harris 正常返马尔可夫链。

证明 首先, 对区间 $[0, T]$ 上的 Lévy 增量 $L'_s \equiv L(nT + s) - L(nT)$ 进行 Lévy-Itô 分解:

$$L'_s = \gamma_\epsilon s + \sigma W_s + J_s^\epsilon + M_s^\epsilon$$

其中, $\gamma_\epsilon s$ 为线性漂移项, σW_s 为连续高斯部分, J_s^ϵ 为跳跃强度为 $\lambda_\epsilon < \infty$ 的大跳跃复合泊松

过程, M_s^ϵ 为小跳跃纯跳补偿鞅。

由方程定义可知, 路径 Y_{n+1} 是 Lévy 增量与继承自上一路径 y 的漂移项 $b_r(y)$ 的积分之和。根据假设 B, 交互函数 f 有界, 因此存在常数 M 使得对于所有的 y 和 r , 都有 $|b_r(y)| \leq M$ 。

定义事件 E_1 为复合泊松过程 J_s^ϵ 在 $[0, T]$ 上无跳跃。由于独立增量性质, 该事件的概率为 $P(E_1) = e^{-\lambda_\epsilon T} > 0$ 。在给定事件 E_1 的条件下, $Y_{n+1}(s)$ 可化简为高斯分量 σW_s 与扰动项 $\Delta_s(y)$ 之和:

$$Y_{n+1}(s)|_{E_1} = \sigma W_s + \Delta_s(y)$$

对于小跳跃鞅, 由 Doob 的 L^2 不等式和马尔可夫不等式可知其上确界是依概率有界的。给定 $\delta > 0$, 定义事件 $E_2 \equiv \{\sup_{s \in [0, T]} |M_s^\epsilon| \leq 1\}$, 使得其概率大于 $1 - \delta$ 。我们可以证明, 在交事件 $E_1 \cap E_2$ 上, 扰动项 $\Delta_s(y)$ 在一致范数下被一致有界控制:

给定初始状态 $Y_0 = y$, 定义由初始历史 y 产生的瞬时漂移扰动项为:

$$\Delta_s(y) = \int_{(s-T) \vee 0}^s f(X^T(s) - X^T(u)) du + \int_{s-T}^{(s-T) \vee 0} f(X^T(s) - y(u)) du$$

根据假设 B, 交互函数 f 是有界的 (即 $\|f\|_\infty \leq 1$) 且非负, 对于任意 $y \in D[-T, 0]$ 以及任意时刻 $s \in [0, T]$, 我们有绝对一致的积分上界:

$$|\Delta_s(y)| \leq \int_{s-T}^s \|f\|_\infty du \leq T \cdot 1 = T$$

且这一上界独立于初始状态 y 和过程的演化路径。

由于 K 是 Skorokhod 空间中的非空开集, 它必然包含一个以某连续路径 w_0 为中心的开球 $B(w_0, \rho)$ 。目标事件 $\{Y_{n+1} \in K\}$ 发生的条件可转化为高斯分量 σW_s 落在平移后的开球 $B_{D[0, T]}(w_0 - \Delta(y), \rho)$ 内。由于缩放的 Wiener 测度在连续函数空间上具有全支集, 且扰动中心被限制在紧集内, 该概率存在一个与 y 无关的严格正向一致下界 $C_K'' > 0$ 。

从而, 转移概率的下界可放缩为:

$$\begin{aligned} p(y, K) &\geq P(Y_{n+1} \in K \cap E_1 \cap E_2 | Y_n = y) \\ &= P(Y_{n+1} \in K | Y_n = y, E_1, E_2) \cdot P(E_1 \cap E_2 | Y_n = y) \\ &\geq C_K'' \cdot P(E_1) P(E_2) \\ &\geq C_K'' \cdot e^{-\lambda_\epsilon T} (1 - \delta) \end{aligned}$$

令 $C_K = C_K'' \cdot e^{-\lambda_\epsilon T} (1 - \delta)$, 我们即找到了独立于初始状态的正向一致下界, 故链的 Harris 正常返性得证。

3.2. 不变测度的有限性

既然 $\{Y_n\}$ 是 Harris 正常返的, 它必然拥有一个不变测度 μ_T 。

引理 3.3 上述不变测度 μ_T 必须是有限测度, 即 $\mu_T(D[0, T]) < \infty$ 。

证明 用反证法。假设 μ_T 是无限的不变测度。根据 Harris 链理论, 对于任何有界且 μ_T -可积的函数 f , 其期望序列必将收敛于零。我们选取指示函数 $f(y) = 1_K(y)$, 其中 K 为前述开集。应用 Revuz 定理, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \in K | Y_1 = y) = 0$$

然而, 由引理 3.2 可知, 单步转移概率始终有下界 $p(y, K) \geq C_K > 0$, 这必然导致:

$$P(Y_n \in K | Y_1 = y) \geq C_K > 0$$

两者产生矛盾。因此, 不变测度 μ_T 不可能为无限测度, 必然是有限测度。

3.3. 泛函可积性及主定理的证明

为了应用遍历定理, 最后需要验证路径泛函关于上述不变测度 μ_T 是可积的。

引理 3.4 路径泛函 $f(y) = y(T)$ 关于不变测度 μ_T 是可积的, 即 $f \in L^1(\mu_T)$ 。

证明 对条件期望进行放缩:

$$E_w[|Y_{n+1}(T)|] \leq E_w[|L((n+1)T) - L(nT)|] + E_w \left[\left| \int_0^T b_r(w) dr \right| \right]$$

由于 Lévy 过程具有有限均值 $E[L_1] < \infty$ 且交互函数有界导致漂移项一致有界, 上式可进一步放缩为:

$$E_w[|Y_{n+1}(T)|] \leq TE_w[L_1] + T^2 \cdot C_f$$

记该有界常数为 $C_T = TE_w[L_1] + T^2 \cdot C_f$ 。在整个状态空间上积分可得:

$$\int_{D[0, T]} |y(T)| \mu_T(dy) \leq C_T \cdot \mu_T(D[0, T]) < \infty$$

这充分证明了 $f(y) = y(T) \in L^1(\mu_T)$ 。

引理 3.4 假设序列 $\{X^T(nT)\}_{n=0}^\infty$ 满足离散形式的强大数定律, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^T(nT)}{nT} = c_T$ a.s.。在假设 A 与 B 的条件下, 连续时间过程的渐近速度几乎必然收敛于同一确定性极限, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X^T(t)}{t} = c_T \quad \text{a.s.}$$

证明 对于任意连续时间 $t \geq 0$, 定义其所处的离散时间区间序号为 $n(t) = \lfloor t/T \rfloor$, 显然有 $n(t)T \leq t < (n(t) + 1)T$, 我们有如下分解:

$$\frac{X^T(t)}{t} = \frac{X^T(n(t)T)}{t} + \frac{X^T(t) - X^T(n(t)T)}{t}$$

由于 $\frac{n(t)}{t} \leq \frac{1}{T}$ 且当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{n(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{T}$, 分解式中第一项的极限由离散大数定律直接给出:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X^T(n(t)T)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{X^T(n(t)T)}{n(t)} \cdot \frac{n(t)}{t} \right) = c_T \quad \text{a.s.}$$

定义第 n 个离散区间内的最大绝对波动为:

$$\xi_n = \sup_{s \in [nT, (n+1)T]} |X^T(s) - X^T(nT)|$$

由假设 B 知排斥函数有界 ($\|f\|_\infty \leq 1$), 故在长度为 T 的区间内, 漂移项的绝对增量严格被 T 有界控制。因此:

$$\xi_n \leq \sup_{s \in [nT, (n+1)T]} |L(s) - L(nT)| + T^2$$

利用 Lévy 过程增量的平稳独立性, 定义随机变量序列:

$$\zeta_n = \sup_{s \in [nT, (n+1)T]} |L(s) - L(nT)|$$

可知 $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ 是独立同分布的随机变量序列。根据假设 A, 驱动噪声的 Lévy 测度具有有限二阶矩, 由 Doob 极大值不等式, ζ_1 具有有限的二阶矩, 即 $E[\zeta_1^2] < \infty$ 。从而推导出 $E[\xi_n^2] < \infty$ 。

利用 Chebyshev 不等式, 对于任意给定的常数 $\epsilon > 0$:

$$P(\xi_n > \epsilon n) \leq \frac{E[\xi_n^2]}{\epsilon^2 n^2} = \frac{E[\zeta_1^2]}{\epsilon^2 n^2}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ 收敛, 根据 Borel-Cantelli 引理, 事件 $\{\xi_n > \epsilon n\}$ 发生的次数几乎必然有限。由 ϵ 的任意性可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{n} = 0 \quad \text{a.s.}$$

回到分解式的第二项, 我们有:

$$\frac{|X^T(t) - X^T(n(t)T)|}{t} \leq \frac{\xi_{n(t)}}{n(t)T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\xi_{n(t)}}{n(t)} \right)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $n(t) \rightarrow \infty$, 上述界限几乎必然收敛于 0。结合两项的收敛性, 应用夹逼定理, 我们严密地确立了从离散时间到连续时间的极限过渡。

定理 3.1 的证明 基于上述结论, 马尔可夫链 $\{Y_n\}$ 满足应用 Birkhoff 遍历定理的所有条件。对泛函 $f(Y_k) = Y_k(T)$ 取均值, 几乎必然有:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k(T) \rightarrow \int w(T) d\mu_T(w) \quad \text{a.s.}$$

由于 $\sum_{k=1}^n Y_k(T)$ 恰好等于离散时间点 nT 处的总位移 $X^T(nT)$, 将其代入并除以时间窗口长度 T , 我们得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^T(nT)}{nT} = \frac{1}{T} \int w(T) d\mu_T(w) = c_T \quad \text{a.s.}$$

最后, 通过控制时间窗口 $[nT, (n+1)T)$ 内部的有界波动, 该离散极限等价于连续时间的渐近行为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X^T(t)}{t} = c_T \quad \text{a.s.}$$

定理 3.1 证明完毕。

4. 结论与后续研究展望

本文研究了由一维 Lévy 过程驱动的有限记忆自排斥扩散模型, 我们引入了截断时间窗口 T , 并将连续时间过程的轨道增量转化为 Skorokhod 空间 $D[0, T]$ 上的离散马尔可夫链。通过运用 Lévy-Itô 分解分离跳跃项与连续高斯分量, 严格证明了该离散骨架的 Harris 正常返性及其不变测度的有限性。基于此确立了该有限记忆近似过程的强大数定律, 证明了其存在确定的渐近漂移速度 c_T 。未来的研究工作可沿着以下方向展开:

- 本文确立了系统的一阶极限行为 (大数定律)。探讨该有限记忆过程的次级波动, 例如建立对应的泛函中心极限定理或大偏差原理 [16], 将有助于精确量化系统向不变测度收敛的速率与轨道波动的尾概率。
- 当截断参数 $T \rightarrow \infty$ 时, 探讨有限记忆过程 $X^T(t)$ 的渐近速度 c_T 能否严格收敛于原始无限记忆过程 $X(t)$ 的渐近速度是一个极具价值的公开问题。由于 Lévy 过程具有任意的双边跳跃, 这要求对跳跃产生的过冲误差进行极度精细的测度变换与概率耦合控制。
- 若放宽 $\sigma^2 > 0$, 即对于纯跳跃 Lévy 过程, 过程的转移概率可能不再对 Lebesgue 测度绝对连续。此时证明 Harris 正常返将需要利用 Lévy 测度 ν 的算术性质来证明状态空间的可分性。

参考文献

- [1] Pemantle, R. (2007) A Survey of Random Processes with Reinforcement. *Probability Surveys*, **4**, 1-79. <https://doi.org/10.1214/07-PS094>
- [2] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. <https://doi.org/10.1007/s004400100161>
- [3] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymers. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. <https://doi.org/10.1007/BF01300560>
- [4] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *The Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. <https://doi.org/10.1214/aop/1065725183>
- [5] Applebaum, D. (2009) Lévy Processes and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781>
- [6] Sato, K.I. (1999) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.
- [7] Bertoin, J. (1996) Lévy Processes. Cambridge University Press.
- [8] Kyprianou, A.E. (2014) Fluctuations of Lévy Processes with Applications. 2nd Edition, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-37632-0>
- [9] Billingsley, P. (1999) Convergence of Probability Measures. 2nd Edition, John Wiley and Sons. <https://doi.org/10.1002/9780470316962>
- [10] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G. (1986) Markov Processes: Characterization and Convergence. John Wiley and Sons. <https://doi.org/10.1002/9780470316658>
- [11] Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. (2009) Markov Chains and Stochastic Stability. 2nd Edition, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626630>
- [12] Revuz, D. (1984) Markov Chains. 2nd Edition, North-Holland.
- [13] Nummelin, E. (1984) General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526237>
- [14] Hairer, M. (2009) Ergodic Properties of Markov Processes. Lecture Notes, University of Warwick.
- [15] Birkhoff, G. D. (1931) Proof of the Ergodic Theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **17**, 656-660. <https://doi.org/10.1073/pnas.17.2.656>
- [16] Jacod, J. and Shiryaev, A.N. (2013) Limit Theorems for Stochastic Processes. 2nd Edition, Springer.