

具有对称性量子图上 Schrödinger 算子的分解及谱条件

李世梅

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2026 年 4 月 13 日; 录用日期: 2026 年 5 月 7 日; 发布日期: 2026 年 5 月 15 日

摘要

该文分别考虑了 n 次中心对称量子图与笛卡尔积量子图. 根据循环群的不可约表示及两类对称图上平方可积函数空间的分解定理, 给出了定义在两对称结构量子图上 Schrödinger 算子的分解定理. 进一步考虑了一种特殊的 n 次中心对称量子图: 循环图. 在满足 δ 耦合顶点条件下给出了其上定义的 Lapace 算子的谱条件, 为进一步研究两类量子图的谱估计问题打下基础.

关键词

量子图, Schrödinger 算子, 自伴顶点条件, 谱分析

Decomposition of the Schrödinger Operator on Symmetric Quantum Graphs and Spectral Conditions

Shimei Li

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: April 13, 2026; accepted: May 7, 2026; published: May 15, 2026

Abstract

This paper considers n subcenter-symmetric quantum graphs and Cartesian product graphs. According to the irreducible representations of cyclic groups and the decomposition theorems of the square-integrable function space on these two types of symmetric graphs, it establishes decomposition theorems for the Schrödinger operators defined on the two symmetric quantum graphs. Furthermore, it considers a special class of n subcenter-symmetric quantum graphs: cyclic graphs, and establishes the spectral conditions of the Laplace operator under δ coupling vertex conditions, which lays a foundation for the further study of spectral estimates for these two types of quantum graphs.

Keywords

Quantum Graph, Schrödinger Operator, Self-Adjoint Vertex Conditions, Spectral Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在数学物理研究中, 量子图模型通常被用来模拟量子粒子在一维复形上的运动行为, 它由度量图及定义在其上的微分算子组成, 并需满足特定的顶点条件 [1]. 其中, 图的边表示粒子可能的运动路径, 顶点则对应路径的连接点, 通过运用代数拓扑, 谱理论, 偏微分方程与散射理论等方法分析相关的物理机制, 量子图被广泛的应用于固体物理 [2], 材料科学与纳米技术 [3, 4] 等领域. 根据边的数量及每边长度是否有限, 度量图可以分为紧致度量图与非紧致度量图两大类: 紧致度量图具有有限条边且每条边的长度均有限; 非紧致度量图则涵盖其余的一般情形 [5]. 紧致度量图凭借其结构的简单性, 为从谱数据重构图的几何结构提供了可能, 是等谱问题及逆谱问题研究的主要对象.

目前, 关于度量图上微分算子的分解已取得许多重要结论, 例如 Kuchment 和

Carlson 等人在文献 [6, 7] 中给出了周期度量图上周期微分算子的 Floquet-Bloch 分解定理, 将整体图上微分算子的谱分析转化为其基本域上纤维算子的谱分析; Kostenko 等在 [8] 中研究了径向反对称树上的谱性质, 将定义在其上的 Laplace 算子分解为 Sturm–Liouville 的直和, 得到了谱的离散性判定准则, 并给出了谱隙估计. 本文在 [9] 中给出的平方可积函数空间分解定理的基础上, 结合循环群的不可约表示理论给出了定义在 n 次中心对称图与笛卡尔积图上, 满足 δ 耦合顶点条件的 Schrödinger 算子的分解定理, 并进一步给出了循环图上 Laplace 算子的谱条件, 为研究其谱的结构提供了新的思路.

2. 基础知识

本章主要给出本文所需定义, 定理及符号表示, 更多内容详见 [1, 9, 10].

2.1. 量子图

图 Γ 是一个有序二元组 $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, \mathcal{V} 为顶点集, \mathcal{E} 为边集, \mathcal{V} 和 \mathcal{E} 互不相交. 若 \mathcal{V} 和 \mathcal{E} 均为有限集合, 则称 Γ 为有限图. $\mathcal{E}(v)$ 表示图中与顶点 v 相连的边集, $\mathcal{V} := |\mathcal{V}|$ 和 $\mathcal{E} := |\mathcal{E}|$ 分别表示顶点及边的数量, 记含 n 个顶点的图为 Γ_n . 顶点 v 的度 $d_v = |\mathcal{E}_v|$ 为图 Γ 中与其相连的边数. 若对 Γ 中的每条边 e 定义一个长度 $L_e \in [0, +\infty)$, 则称 Γ 为度量图, $L_e = +\infty$ 对应的边为一条射线. 度量图上的点除顶点外还包括所有边内点, 即图上函数 f 是沿边定义的. 沿边坐标的存在使得度量图上 Lebesgue 测度的定义自然成立, 进而可在度量图上定义标准的函数空间. 如度量图上的平方可积函数空间 $L^2(\Gamma)$ 及 Sobolev 空间 $H^2(\Gamma)$:

定义 2.1. 图 Γ 上的平方可积函数空间 $L^2(\Gamma)$ 由在每条边 e 上可测且平方可积的函数组成, 且满足以下条件:

$$\|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 := \sum_{e \in \mathcal{E}} \|f_e\|_{L^2(e)}^2 < \infty,$$

其中 f_e 表示限制在边 e 上的分段函数, $L^2(e)$ 表示定义在边 e 上的平方可积函数空间. 即 $L^2(\Gamma)$ 可表示为边上平方可积函数空间 $L^2(e)$ 的直和.

定义 2.2. 图 Γ 上的 Sobolev 空间 $H^2(\Gamma)$ 由满足以下条件的函数 f 组成:

$$H^2(\Gamma) = \{f = \{f_e\}_{e \in \mathcal{E}} : \text{函数 } f \text{ 连续; 对于所有的 } e \in \mathcal{E}, \\ f_e \in H^2(e); f, f', f'' \in L^2(\Gamma)\},$$

其中导数 f' 方向沿边指向边内, $f'' = D^2 f$ 为二阶弱导数.

本文主要研究定义在 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma)$ 上的 Schrödinger 算子, 其作用形式为:

$$(\mathcal{H}f)_e = -f_e'' + q_e(x)f_e, \quad \forall e \in \mathcal{E}, \quad (2.1)$$

其中势函数 $q(x) = \{q_e(x)\}_{e \in \mathcal{E}} \neq \{0\}$ 是实值的, 且对所有 $e \in \mathcal{E}$ 满足 $q_e \in C^\infty(e) \cap L^\infty(e)^*$. 特别的, 对任意边 $e \in \mathcal{E}$, 当势函数 $q_e(x) = 0$ 时, Schrödinger 算子退化为更简单的 Laplace 算子:

$$(\mathcal{H}f)_e = -f_e'', \quad \forall e \in \mathcal{E}.$$

谱的可观测性还要求定义在度量图上的微分算子满足自伴性, 即要求谱为实数. 本文主要考虑的自伴顶点条件为 δ 耦合顶点条件:

$$\begin{cases} \text{对任意的 } e \in \mathcal{E}(v), f_e(v) \text{ 在顶点 } v \text{ 处的值相等,} \\ \sum_{e \in \mathcal{E}(v)} f_e'(v) = \alpha f_e(v), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

特别的, 当 $\alpha = 0$ 时, 耦合条件(2.2)被称为 Kirchhoff 条件. 若同时顶点 v 为 2 度顶点, 则 Kirchhoff 条件等价于在两个连接边上“消除”该顶点. 研究表明, 在一条边上插入或删除满足 Kirchhoff 条件的 2 度顶点并不会改变原始量子图的谱, 这样的顶点被称为虚拟顶点 [1]. 综上有量子图的定义如下:

定义 2.3. 量子图由度量图及定义在度量图上 Hamiltonian 算子整体组成, 并满足特定的耦合顶点条件. 即量子图是一个三元组

$$\{\text{度量图, Hamiltonian 算子, 顶点条件}\}.$$

2.2. n 次中心对称图和笛卡尔积图

定义 2.4. 称具有 n 阶循环群 $G_n = \langle a \rangle$ 作用的度量图 Γ 为 n 次中心对称图, 若其存在映射 $(a^i, x) \in G_n \times \Gamma \mapsto a^i x \in \Gamma$ 满足以下性质:

- (1) 群作用: 对 $\forall a^i \in G_n$, 映射 $x \mapsto a^i x$ 是 Γ 到自身的双射; 对 $\forall x \in \Gamma$, $\dot{e}x = x$, 其中 $\dot{e} \in G_n$ 为单位元; 对 $\forall a^i \in G_n, x \in \Gamma$, 有 $(a^i a^j)x = a^i(a^j x)$;
- (2) 连续性: 对 $\forall a^i \in G_n$, Γ 到自身的映射 $x \mapsto a^i x$ 是连续的;
- (3) 忠实性: 如果有 $x \in \Gamma$ 满足 $a^i x = x$, 则 a^i 为 G_n 的单位元;
- (4) 离散性: 对 $\forall x \in \Gamma$, 存在 x 的邻域 U 使得当 $g \neq 0$, 有 $gx \notin U$;

* $C^\infty(e)$: 边 e 上全体光滑函数组成的集合; $L^\infty(e)$: 边 e 上全体有界函数组成的集合

(5) 结构保存: $a^i u$ 与 $a^j v$ 为相邻顶点当且仅当顶点 u 和 v 为相邻顶点, 对边内点作用方式同理; 群 G_n 的作用保持边长度不变: $L_{a^i e} = L_e$.

若 n 次中心对称图 Γ 中存在一个紧致部分 W 使得:

1) G_n 中所有群元作用在 W 的并可以覆盖整个图 Γ , 即:

$$\bigcup_{a^i \in G_n} a^i W = \Gamma;$$

2) 当 $a^i \neq a^j \in G_n$ 时对应的 $a^i W$ 和 $a^j W$ 仅有有限多个共同点, 且这些点中不含顶点.

则称满足上述条件的 W 为群 G_n 作用在图 Γ 上的一个基本域. 显然基本域 W 的选取并不是唯一的. 特别的, 作为一种特殊的 n 次中心对称图, 本文研究的循环图 [11] 的定义如下:

定义 2.5. 若 Γ_n 有循环群 G_n 作用, 且由向量 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_\chi)$ 定义, 则称该图为循环图, 记为 $C_n(\mathbf{s})$. 其中每个分量 $s_{\bar{\chi}} \in \mathbb{N}^*$, $\bar{\chi} = 1, 2, \dots, \chi$ 满足 $1 \leq s_{\bar{\chi}} \leq n/2$, 且两个顶点 v_i 与 v_j 相邻当且仅当对某个 $\bar{\chi} \in 1, 2, \dots, \chi$ 有 $i - j \pmod n \equiv \pm s_{\bar{\chi}}$.

例如循环图 $C_8(1, 2)$ 及其基本域见图 1(红色部分), 其中红色空心顶点为虚拟顶点.

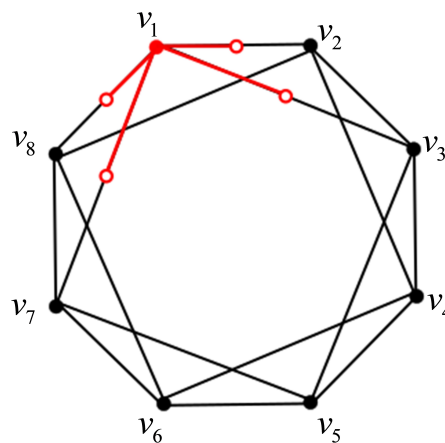


Figure 1. Circulant graph $C_8(1, 2)$ and its fundamental domain

图 1. 循环图 $C_8(1, 2)$ 及其基本域

对于笛卡尔积度量图, 其构造方式与图论中的笛卡尔积图保持一致, 但还需明确图中各边的长度. 其基本定义如下:

定义 2.6. 设 Γ_{n_1} 和 Γ_{n_2} 分别为具有 n_1 和 n_2 个顶点的度量图, 其顶点集分别为 $\mathcal{V}(\Gamma_{n_1}) = \{u_i\}_{i=1}^{n_1}$, $\mathcal{V}(\Gamma_{n_2}) = \{v_i\}_{i=1}^{n_2}$. 两者的笛卡尔积度量图定义为 $\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}$, 其顶点

集为 $\mathcal{V}(\Gamma_{n_1}) \times \mathcal{V}(\Gamma_{n_2})$, 边集由所有满足以下条件之一的顶点对 (u_i, v_i) 与 (u_j, v_j) 构成: 若 $v_i = v_j$, 则顶点对之间的边为 u_i 和 u_j 在 $\mathcal{E}(\Gamma_{n_1})$ 中的边; 若 $u_i = u_j$, 则顶点对之间的边为 v_i 和 v_j 在 $\mathcal{E}(\Gamma_{n_2})$ 中的边, 边的长度保持不变. 而对于其余情况, 顶点对 (u_i, v_i) 与 (u_j, v_j) 之间无连接边.

例如图 2(c) 是由边长为 2 的度量图 Γ_2 和边长为 1, 2 的度量图 Γ_3 构成的笛卡尔积图 $\Gamma_2 \square \Gamma_3$.

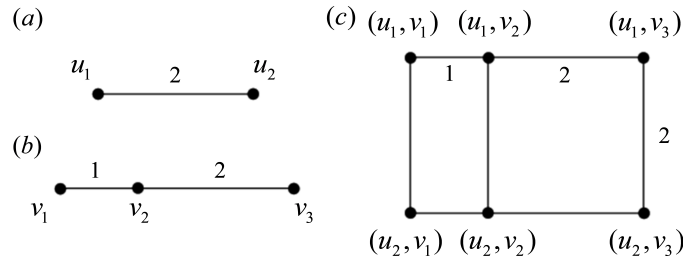


Figure 2. The metric graphs Γ_2 and Γ_3 , and their Cartesian product graph $\Gamma_2 \square \Gamma_3$

图 2. 度量图 Γ_2 和 Γ_3 及它们构成的笛卡尔积图 $\Gamma_2 \square \Gamma_3$

2.3. 群表示论

定义 2.7. 设 G 是一个群, $V \neq \{0\}$ 是数域 K 上的一个线性空间, $GL(V)$ 为 V 上所有可逆线性变换组成的群, 则从群 G 到 $GL(V)$ 上的一个群同态 ρ 称为 G 在数域 K 上的一个群表示.

对于 n 阶循环群 $G_n = \langle a \rangle$, 当数域 $K = \mathbb{C}$ 时, 循环群 G_n 有 n 个一次复表示 [10], 记 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根, G_n 的单位元为 e , 则 G_n 所有不可约复表示见表 1.

Table 1. Irreducible complex representations of the n -order cyclic group G_n

表 1. n 阶循环群 G_n 的不可约复表示

	e	a	a^2	a^3	...	a^{n-1}
ρ_1	1	1	1	1	...	1
ρ_2	1	ω	ω^2	ω^3	...	ω^{n-1}
ρ_3	1	ω^2	ω^4	ω^6	...	$\omega^{2(n-1)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
ρ_n	1	ω^{n-1}	$\omega^{2(n-1)}$	$\omega^{3(n-1)}$...	$\omega^{(n-1)^2}$

对于循环群的笛卡尔积 $G_{n_1} \otimes G_{n_2}$, 当数域 $K = \mathbb{C}$ 时, 由上述有循环群 $G_{n_1} = \langle a_1 \rangle$ 和 $G_{n_2} = \langle a_2 \rangle$ 分别具有 n_1 和 n_2 个复表示, 在此记为 π_s 和 ϱ_t , 其中 $s = 1, \dots, n_1, t = 1, \dots, n_2$. 则外张量积 $\pi_s \boxtimes \varrho_t$ 是 $G_{n_1} \otimes G_{n_2}$ 的不可约表示 (见文献 [10], 命题 2.3.23),

记为 $\tau_{s,t}$. 即对任意的 $(a_1^\kappa, a_2^\iota) \in G_{n_1} \otimes G_{n_2}, \kappa = 1, \dots, n_1, \iota = 1, \dots, n_2$, 有

$$\tau_{s,t}(a_1^\kappa, a_2^\iota) = \pi_s(a_1^\kappa) \boxtimes \rho_t(a_2^\iota), s = 1, \dots, n_1; t = 1, \dots, n_2.$$

记 ω_1 是 n_1 次单位根, ω_2 是 n_2 次单位根, 则 $\tau_{s,t}(a_1^\kappa, a_2^\iota) = (\omega_1^s)^\kappa (\omega_2^t)^\iota$. 因此群 $G_{n_1} \otimes G_{n_2}$ 共有 $n_1 n_2$ 个不可约复表示, 且对任意群元 $(a_1^\kappa, a_2^\iota) \in G_{n_1} \otimes G_{n_2}$, 其 $n_1 n_2$ 个不可约复表示之和有以下结论成立:

$$\sum_{s=1}^{n_1} \sum_{t=1}^{n_2} \tau_{s,t}(a_1^\kappa, a_2^\iota) = \begin{cases} n_1 n_2, & \text{若 } \kappa = n_1, \iota = n_2, \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases} \quad (2.3)$$

3. 两类对称结构量子图上 Schrödinger 算子的分解

本章基于两类对称结构量子图上平方可积函数空间分解定理 [9] 分别给出了定义在其上的 Schrödinger 算子在 δ 耦合顶点条件下的分解定理.

3.1. n 次中心对称图上 Schrödinger 算子的分解

在进行详细证明之前, 本节首先给出 n 次中心对称图上平方可积函数空间的分解:

引理 3.1. n 次中心对称图 Γ_n 具有循环群 $G_n = \langle a \rangle$ 的作用, 根据群 G_n 的全部不可约表示可以得到图上平方可积函数空间 $L^2(\Gamma_n)$ 的分解:

$$L^2(\Gamma_n) = \bigoplus_{t=1}^n \mathcal{F}_t,$$

其中 Γ_n 上平方可积函数空间 \mathcal{F}_t 中的函数 f_t 可由其在基本域 W 上的限制 $f_t|_W$ 表出:

$$f_t|_{a^i W} = \rho_t(a^{n-i}) f_t|_W.$$

假设 Γ_n 的基本域中共有 m 条边, 分别记为 e_1, \dots, e_m . 由引理3.1的证明过程可得, 存在函数 $f \in L^2(\Gamma_n)$ 到函数 $f_t \in \mathcal{F}_t$ 的等距同构映射 $P_t, t = 1, 2, \dots, n$, 使得:

$$P_t f_{e_k} = f_{t, e_k} = \frac{\rho_t(\dot{e}) f_{e_k} + \rho_t(a) f_{e_{k+m}} + \dots + \rho_t(a^{n-1}) f_{e_{k+m(n-1)}}}{n}. \quad (3.1)$$

对于定义在 Γ_n 上的 Schrödinger 算子, 其定义域中的函数仍满足上述映射关系成立, 据此我们给出以下算子分解:

定理 3.2. 定义在 n 次中心对称图 Γ_n 上的 *Schrödinger* 算子 \mathcal{H} 的作用形式为(2.1), 定义域中的函数 f 满足以下条件: $f \in H^2(\Gamma_n)$; 对任意的顶点 $v \in \mathcal{V}(\Gamma_n)$ 满足 δ 耦合顶点条件(2.2). 若势函数 $q(x)$ 为 G_n 周期势函数, 即对于任意的 $(x, a^i) \in \Gamma_n \times G_n, i = 1, \dots, n$, 势函数 $q(x)$ 满足:

$$(q(x)f)_e = q_e f_e, q_{a^i e}(x) = q_e(x),$$

则 \mathcal{H} 酉等价于定义在空间 \mathcal{F}_t 上纤维算子 \mathcal{H}_t 的直和, 即

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{t=1}^n \mathcal{H}_t,$$

算子 \mathcal{H}_t 的作用形式不变, 定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_t) = \{f_t : f_t, f'_t, f''_t \in \mathcal{F}_t;$$

f_t 在 Γ_n 的原顶点处满足强度为 α 的 δ 耦合条件,

f_t 在基本域的边界点处, 不妨设为连接边 e 和 $a^i e$ 的虚拟顶点 \hat{v} 和 $a^i \hat{v}$, 满足以

下条件: $f_{t,e}(\hat{v}) = \rho_t(a^i) f_{t,a^i e}(a^i \hat{v}), f'_{t,e}(\hat{v}) + \rho_t(a^i) f'_{t,a^i e}(a^i \hat{v}) = 0\}$.

且由算子的分解有以下谱关系成立:

$$\sigma(\mathcal{H}) = \bigcup_{t=1}^n \sigma(\mathcal{H}_t).$$

证明. 因为

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset L^2(\Gamma_n), \mathcal{D}(\mathcal{H}_t) = \mathcal{D}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}_t$$

则由引理3.1可得算子的定义域存在直和分解:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{t=1}^n \mathcal{D}(\mathcal{H}_t),$$

算子的作用形式不变. 对任意的 $f_t \in \mathcal{F}_t, \mathcal{H}_t$ 需满足 $\mathcal{H}_t f_t \in \mathcal{F}_t$. 假设 Γ_n 的基本域中有 m 条边, 分别记为 e_1, e_2, \dots, e_m , 则对于 $f_t \in \mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t f_t &= \mathcal{H}_t \{f_{t,e_1}, f_{t,e_2}, \dots, f_{t,e_m}, f_{t,e_{1+m}}, \dots, f_{t,e_{2m}}, \dots, f_{t,e_{nm}}\} \\ &= \{\mathcal{H}_t f_{t,e_1}, \mathcal{H}_t f_{t,e_2}, \dots, \mathcal{H}_t f_{t,e_m}, \mathcal{H}_t f_{t,e_{1+m}}, \dots, \mathcal{H}_t f_{t,e_{2m}}, \dots, \mathcal{H}_t f_{t,e_{nm}}\}, \end{aligned}$$

其中 e_{j+im} 表示由群元 a^i 作用于边 $e_j, j = 1, 2, \dots, m$ 后的对应边, 由公式 (3.1) 可得:

$$\begin{aligned}
f_{t,e_1} &= \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_1} + \rho_t(a)f_{e_{1+m}} + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}}{n}; \\
f_{t,e_2} &= \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_2} + \rho_t(a)f_{e_{2+m}} + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{2+m(n-1)}}}{n}; \\
&\vdots \\
f_{t,e_{nm}} &= \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_{nm}} + \rho_t(a)f_{e_m} + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{m(n-1)}}}{n}.
\end{aligned}$$

由于势函数 $q(x)$ 在群作用下保持不变, 即 $q_{e_j}(x) = q_{e_{j+im}}(x)$, 所以:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_t f_{t,e_1} &= - \left(\frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_1} + \rho_t(a)f_{e_{1+m}} + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}}{n} \right)'' \\
&+ q_{e_1}(x) \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_1} + \rho_t(a)f_{e_{1+m}} + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}}{n} \\
&= \frac{-\rho_t(\dot{e})f_{e_1}'' + q_{e_1}(x)\rho_t(\dot{e})f_{e_1} + \cdots - \rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}'' + q_{e_1}(x)\rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}}{n} \\
&= \frac{-\rho_t(\dot{e})f_{e_1}'' + q_{e_1}(x)\rho_t(\dot{e})f_{e_1} + \cdots - \rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}'' + q_{e_{1+m(n-1)}}(x)\rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}}{n} \\
&= \frac{\rho_t(\dot{e})\mathcal{H}f_{e_1} + \rho_t(a)\mathcal{H}f_{e_{1+m}} + \cdots + \rho_t(a^{n-1})\mathcal{H}f_{e_{1+m(n-1)}}}{n} \\
&= \mathcal{H}f_{t,e_1}.
\end{aligned}$$

同理有 $\mathcal{H}_t f_{t,e_2} = \mathcal{H}f_{t,e_2}, \dots, \mathcal{H}_t f_{t,e_{nm}} = \mathcal{H}f_{t,e_{nm}}$.

下面证明 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_t)$ 中的函数 f_t 满足所给顶点条件. 设 v 为 Γ_n 中的原顶点, 为了简化表示, 我们仍将其连接边排序记为 e_1, e_2, \dots, e_l , 则由引理3.1可得,

$$\begin{aligned}
f_{t,e_1}(v) &= \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_1}(v) + \rho_t(a)f_{e_{1+m}}(v) + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{1+m(n-1)}}(v)}{n}; \\
f_{t,e_2}(v) &= \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_2}(v) + \rho_t(a)f_{e_{2+m}}(v) + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{2+m(n-1)}}(v)}{n}; \\
&\vdots \\
f_{t,e_l}(v) &= \frac{\rho_t(\dot{e})f_{e_l}(v) + \rho_t(a)f_{e_{l+m}}(v) + \cdots + \rho_t(a^{n-1})f_{e_{l+m(n-1)}}(v)}{n}.
\end{aligned}$$

因为 f 在顶点 v 处满足 δ 耦合条件, 即

$$\begin{cases} f_{e_1}(v) = f_{e_2}(v) = \cdots = f_{e_l}(v), \\ f'_{e_1}(v) + f'_{e_2}(v) + \cdots + f'_{e_l}(v) = \alpha f_{e_1}(v), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

所以有:

$$\begin{cases} f_{t,e_1}(v) = f_{t,e_2}(v) = \cdots = f_{t,e_l}(v), \\ f'_{t,e_1}(v) + f'_{t,e_2}(v) + \cdots + f'_{t,e_l}(v) = \alpha f_{t,e_1}(v), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

即 f_t 在 Γ_n 中的原顶点处仍满足强度为 α 的 δ 耦合顶点条件, 且特别的, 对于边界点处的虚拟顶点 \hat{v} 有条件:

$$\begin{cases} f_{t,e_j}(\hat{v}) = \rho_t(a^i) f_{t,a^i e_j}(a^i \hat{v}), \\ f'_{t,e_j}(\hat{v}) + \rho_t(a^i) f'_{t,a^i e_j}(a^i \hat{v}) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

成立. □

如图 3 中所示, 4 次中心对称图 Γ_{20} 的基本域中共有 $m = 10$ 条边, 其中 v_1, v_6 为虚拟顶点 \hat{v} , 则由定理 3.2, 函数 f_t 限制在边 e_1, e_6 上的分段函数在虚拟顶点处的函数值满足条件 (3.2) 成立.

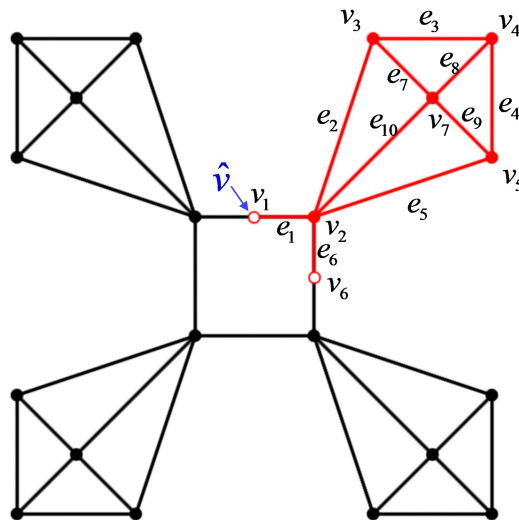


Figure 3. Metric graph Γ_{20} and its fundamental domain

图 3. 度量图 Γ_{20} 及其基本域

3.2. 笛卡尔积图上 Schrödinger 算子的分解

本节主要考虑由两个具有循环群 G_{n_1}, G_{n_2} 作用的度量图 Γ_{n_1} 和 Γ_{n_2} 构成的笛卡尔积图, 定义在其上的平方可积函数空间分解如下:

引理 3.3. 具有循环群 $G_{n_1} = \langle a_1 \rangle$ 和 $G_{n_2} = \langle a_2 \rangle$ 作用的图 Γ_{n_1} 和 Γ_{n_2} 的笛卡尔积图 $\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}$ 具有群 $G_{n_1} \otimes G_{n_2}$ 的作用. 则平方可积函数空间 $L^2(\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2})$ 可分解为 $n_1 n_2$ 个平方可积函数空间的直和, 即

$$L^2(\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}) \cong \bigoplus_{s=1}^{n_1} \left(\bigoplus_{t=1}^{n_2} \mathcal{F}_{s,t} \right),$$

其中 $\mathcal{F}_{s,t}$ 为 $\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}$ 上的平方可积函数空间, $\mathcal{F}_{s,t}$ 中的函数 $f_{s,t}$ 可由其在基本域 W 上的限制 $f_{s,t}|_W$ 表出:

$$f_{s,t}|_{(a_1^\kappa, a_2^\iota)W} = \begin{cases} f_{s,t}|_W, & \kappa = n_1, \iota = n_2 \\ \tau_{s,t}((a_1^{n_1-\kappa}, a_2^{n_2-\iota}))f_{s,t}|_W, & \kappa = 1, \dots, n_1 - 1, \iota = 1, \dots, n_2 - 1. \end{cases}$$

定理 3.4. 定义在具有群 $G_{n_1} \otimes G_{n_2}$ 作用的笛卡尔积图 $\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}$ 上的 Schrödinger 算子作用形式为(2.1), 定义域中的函数 f 满足以下条件: $f \in H^2(\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2})$; 对任意的顶点 $v \in \mathcal{V}(\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2})$ 满足 δ 耦合顶点条件(2.2). 若势函数 $q(x)$ 为 $G_{n_1} \otimes G_{n_2}$ 周期势函数, 即对于任意的 $(x, (a_1^\kappa, a_2^\iota)) \in \Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}, \kappa = 1, \dots, n_1, \iota = 1, \dots, n_2$, 势函数 $q(x)$ 满足:

$$(q(x)f)_e = q_e f_e, \quad q_{(a_1^\kappa, a_2^\iota)e}(x) = q_e(x),$$

则算子 \mathcal{H} 酉等价于定义在空间 $\mathcal{F}_{s,t}$ 上纤维算子 $\mathcal{H}_{s,t}$ 的直和, 即

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{s=1}^{n_1} \bigoplus_{t=1}^{n_2} \mathcal{H}_{s,t},$$

算子 $\mathcal{H}_{s,t}$ 的作用形式不变, 定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_{s,t}) = \{f_{s,t} : f_{s,t}, f'_{s,t}, f''_{s,t} \in \mathcal{F}_{s,t};$$

$f_{s,t}$ 在 $\Gamma_n \square \Gamma_{n_2}$ 的原顶点处满足强度为 α 的 δ 耦合条件,

$f_{s,t}$ 在基本域的边界点处, 不妨设为连接边 e 和 $(a_1^\kappa, a_2^\iota)e$ 的虚拟顶点 \hat{v} 和 $(a_1^\kappa, a_2^\iota)\hat{v}$, 满足以

下条件: $f_{s,t,e}(\hat{v}) = \tau_{s,t}(a_1^\kappa, a_2^\iota)f_{s,t,(a_1^\kappa, a_2^\iota)e}(a^i\hat{v}), f'_{s,t,e}(\hat{v}) + \tau_{s,t}(a_1^\kappa, a_2^\iota)f'_{t,(a_1^\kappa, a_2^\iota)e}((a_1^\kappa, a_2^\iota)\hat{v}) = 0\}$.

且由算子的分解有以下谱关系成立:

$$\sigma(\mathcal{H}) = \bigcup_{s=1}^{n_1} \bigcup_{t=1}^{n_2} \sigma(\mathcal{H}_{s,t}).$$

证明. 因为

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) \in L^2(\Gamma_n \square \Gamma_{n_2}),$$

则由引理3.3中的函数空间分解有:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{s=1}^{n_1} \bigoplus_{t=1}^{n_2} \mathcal{D}(\mathcal{H}_{s,t}),$$

对任意的 $f_{s,t} \in \mathcal{F}_{s,t}$, 需满足 $\mathcal{H}_{s,t} \in \mathcal{F}_{s,t}$. 同理定理3.2, 令 $\mathcal{V}(\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}) = \{v_i\}_{i=1}^{n_1 n_2}$, 假设 $\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}$ 的基本域中有 m 条边, 分别标号为 $e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,m}$, 令 $a_{\kappa,t} = (a_1^\kappa, a_2^\kappa)$, $\kappa = 1, \dots, n_1, t = 1, \dots, n_2$, 为了便于符号区分, 这里用 $f_{s,t}|_{e_{i,m}}$ 表示函数 $f_{s,t}$ 在边 $e_{i,m}$ 上的限制, 则对于 $f_{s,t} \in \mathcal{F}_{s,t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t} &= \mathcal{H}_{s,t} \{f_{s,t}|_{e_{1,1}}, f_{s,t}|_{e_{1,2}}, \dots, f_{s,t}|_{e_{1,m}}, f_{s,t}|_{e_{2,1}}, f_{s,t}|_{e_{2,2}}, \dots, f_{s,t}|_{e_{2,m}}, \dots, f_{s,t}|_{e_{n_1 n_2, 1}}, \\ & f_{s,t}|_{e_{n_1 n_2, 2}}, \dots, f_{s,t}|_{e_{n_1 n_2, m}}\} \\ &= \{\mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{1,1}}, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{1,2}}, \dots, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{1,m}}, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{2,1}}, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{2,2}}, \dots, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{2,m}}, \\ & \dots, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{n_1 n_2, 1}}, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{n_1 n_2, 2}}, \dots, \mathcal{H}_{s,t} f_{s,t}|_{e_{n_1 n_2, m}}\}, \end{aligned}$$

其中 $a_{\kappa,t} e_{i,j}, i = 1, \dots, n_1 n_2, j = 1, \dots, m$, 表示由群元 (a_1^κ, a_2^κ) 作用在边 $e_{i,j}$ 后对应的边, 由引理3.3的证明可得, 对于函数 $f_{s,t} \in \mathcal{F}_{s,t}$ 有以下等式成立:

$$\begin{aligned} f_{s,t}|_{e_{i,j}} &= \frac{1}{n_1 n_2} [\tau_{s,t}(a_{1,1})f|_{a_{1,1}e_{i,j}} + \tau_{s,t}(a_{2,1})f|_{a_{2,1}e_{i,j}} + \dots + \tau_{s,t}(a_{n_1,1})f|_{a_{n_1,1}e_{i,j}} \\ & + \tau_{s,t}(a_{1,2})f|_{a_{1,2}e_{i,j}} + \tau_{s,t}(a_{2,2})f|_{a_{2,2}e_{i,j}} + \dots + \tau_{s,t}(a_{n_1,2})f|_{a_{n_1,2}e_{i,j}} \\ & + \dots \\ & + \tau_{s,t}(a_{1,n_2})f|_{a_{1,n_2}e_{i,j}} + \tau_{s,t}(a_{2,n_2})f|_{a_{2,n_2}e_{i,j}} + \dots + \tau_{s,t}(a_{n_1,n_2})f|_{a_{n_1,n_2}e_{i,j}}]. \end{aligned}$$

这里 $a_{n_1, n_2} \in G_{n_1} \otimes G_{n_2}$ 为单位元. 由于势函数 $q(x)$ 在群作用下保持不变, 所以:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{s,t}f_{s,t}|_{e_{i,j}} &= -f''_{s,t}|_{e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)f_{s,t}|_{e_{i,j}} \\
&= -\frac{1}{n_1n_2} [\tau_{s,t}(a_{1,1})f''|_{a_{1,1}e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)\tau_{s,t}(a_{1,1})f|_{a_{1,1}e_{i,j}} + \cdots \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{n_1,1})f''|_{a_{n_1,1}e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)\tau_{s,t}(a_{n_1,1})f|_{a_{n_1,1}e_{i,j}} \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{1,2})f''|_{a_{1,2}e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)\tau_{s,t}(a_{1,2})f|_{a_{1,2}e_{i,j}} + \cdots \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{n_1,2})f''|_{a_{n_1,2}e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)\tau_{s,t}(a_{n_1,2})f|_{a_{n_1,2}e_{i,j}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{1,n_2})f''|_{a_{1,n_2}e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)\tau_{s,t}(a_{1,n_2})f|_{a_{1,n_2}e_{i,j}} + \cdots \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{n_1,n_2})f''|_{a_{n_1,n_2}e_{i,j}} + q_{e_{i,j}}(x)\tau_{s,t}(a_{n_1,n_2})f|_{a_{n_1,n_2}e_{i,j}}] \\
&= \frac{1}{n_1n_2} [-\tau_{s,t}(a_{1,1})f''|_{a_{1,1}e_{i,j}} + qa_{1,1}e_{i,j}(x)\tau_{s,t}(a_{1,1})f|_{a_{1,1}e_{i,j}} + \cdots \\
&\quad - \tau_{s,t}(a_{n_1,1})f''|_{a_{n_1,1}e_{i,j}} + qa_{n_1,1}e_{i,j}(x)\tau_{s,t}(a_{n_1,1})f|_{a_{n_1,1}e_{i,j}} \\
&\quad - \tau_{s,t}(a_{1,2})f''|_{a_{1,2}e_{i,j}} + qa_{1,2}e_{i,j}(x)\tau_{s,t}(a_{1,2})f|_{a_{1,2}e_{i,j}} + \cdots \\
&\quad - \tau_{s,t}(a_{n_1,2})f''|_{a_{n_1,2}e_{i,j}} + qa_{n_1,2}e_{i,j}(x)\tau_{s,t}(a_{n_1,2})f|_{a_{n_1,2}e_{i,j}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad - \tau_{s,t}(a_{1,n_2})f''|_{a_{1,n_2}e_{i,j}} + qa_{1,n_2}e_{i,j}(x)\tau_{s,t}(a_{1,n_2})f|_{a_{1,n_2}e_{i,j}} + \cdots \\
&\quad - \tau_{s,t}(a_{n_1,n_2})f''|_{a_{n_1,n_2}e_{i,j}} + qa_{n_1,n_2}e_{i,j}(x)\tau_{s,t}(a_{n_1,n_2})f|_{a_{n_1,n_2}e_{i,j}}] \\
&= \frac{1}{n_1n_2} [\tau_{s,t}(a_{1,1})\mathcal{H}f|_{a_{1,1}e_{i,j}} + \cdots + \tau_{s,t}(a_{n_1,1})\mathcal{H}f|_{a_{n_1,1}e_{i,j}} \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{1,2})\mathcal{H}f|_{a_{1,2}e_{i,j}} + \cdots + \tau_{s,t}(a_{n_1,2})\mathcal{H}f|_{a_{n_1,2}e_{i,j}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \tau_{s,t}(a_{1,n_2})\mathcal{H}f|_{a_{1,n_2}e_{i,j}} + \cdots + \tau_{s,t}(a_{n_1,n_2})\mathcal{H}f|_{a_{n_1,n_2}e_{i,j}}] \\
&= \mathcal{H}f_{s,t}|_{e_{i,j}}.
\end{aligned}$$

即分解后的纤维算子 $\mathcal{H}_{s,t}$ 作用在 $f_{s,t}$ 上等价于原算子 \mathcal{H} 的作用. 下证 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{s,t})$ 中的函数 $f_{s,t}$ 满足所给顶点条件. 因为 f 在原顶点 v_i 处满足 δ 耦合条件, 即

$$\begin{cases} f_{e_{i,1}}(v_i) = f_{e_{i,2}}(v_i) = \cdots = f_{e_{i,m}}(v_i), \\ f'_{e_{i,1}}(v_i) + f'_{e_{i,2}}(v_i) + \cdots + f'_{e_{i,m}}(v_i) = \alpha f_{e_{i,1}}(v_i), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases} f_{s,t}|_{e_{i,1}}(v_i) = f_{s,t}|_{e_{i,2}}(v_i) = \cdots = f_{s,t}|_{e_{i,m}}(v_i), \\ f'_{s,t}|_{e_{i,1}}(v_i) + f'_{s,t}|_{e_{i,2}}(v_i) + \cdots + f'_{s,t}|_{e_{i,m}}(v_i) = \alpha f_{s,t}|_{e_{i,1}}(v_i), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

即 $f_{s,t}$ 在 $\Gamma_{n_1} \square \Gamma_{n_2}$ 中的原顶点处仍满足强度为 α 的 δ 耦合顶点条件, 且特别的, 对于边界点处的虚拟顶点 \hat{v} 有条件:

$$\begin{cases} f_{s,t}|_e(\hat{v}) = \tau_{s,t}(a_{\kappa,t})f_{s,t}|_{a_{\kappa,t}e}(a_{\kappa,t}\hat{v}), \\ f'_{s,t}|_e(\hat{v}) + \tau_{s,t}(a_{\kappa,t})f'_{s,t}|_{a_{\kappa,t}e}(a_{\kappa,t}\hat{v}) = 0. \end{cases}$$

成立. 证明成立 □

4. δ 耦合顶点条件下循环图上 Laplace 算子的谱条件

本节主要考虑循环图 $C_n(s)$ 上满足强度为 α 的 δ 耦合条件的 Laplace 算子, 其中令 $\chi = m$, 则其基本域中有 $2m$ 条边. 为了简化表示, 省略部分顶点及边绘制见图 4.

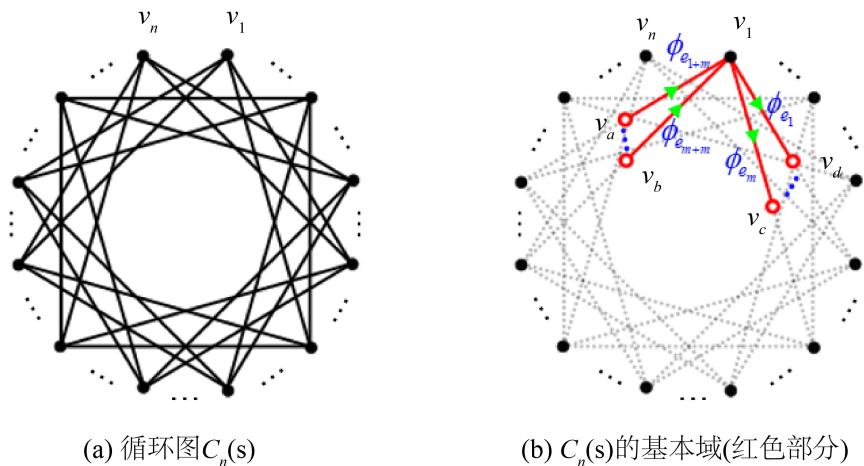


Figure 4. Circulant graph $C_n(s)$ and its fundamental domain

图 4. 循环图 $C_n(s)$ 及其基本域

按图 4(b) 中的排序方式, 我们将基本域中的边分别记为 $e_1, \dots, e_m, e_{1+m}, \dots, e_{2m}$, 显然, 边长 $\mathcal{L}_{e_i} = \mathcal{L}_{e_{i+m}}$, 不妨将其记为 $a_1/2, a_2/2, \dots, a_m/2$. 将基本域中的边进行参数化, 坐标增加方向如图 4 所示, 限制在各边的分段函数为 $\phi_1(x), \dots, \phi_m(x), \phi_{1+m}(x), \dots, \phi_{2m}(x)$:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \alpha_1^+ e^{ikx} + \alpha_1^- e^{-ikx}, \quad x \in [0, \frac{a_1}{2}], \\
&\vdots \\
\phi_m(x) &= \alpha_m^+ e^{ikx} + \alpha_m^- e^{-ikx}, \quad x \in [0, \frac{a_m}{2}], \\
\phi_{1+m}(x) &= \alpha_{1+m}^+ e^{ikx} + \alpha_{1+m}^- e^{-ikx}, \quad x \in [-\frac{a_1}{2}, 0], \\
&\vdots \\
\phi_{2m}(x) &= \alpha_{2m}^+ e^{ikx} + \alpha_{2m}^- e^{-ikx}, \quad x \in [-\frac{a_m}{2}, 0].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

则由引理3.1和定理3.2可得, $\phi_1(x)$ 至 $\phi_{2m}(x)$ 在基本域的边界点处满足以下拟周期条件:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\frac{a_1}{2}) &= \rho_t(a^m)\phi_{1+m}(-\frac{a_1}{2}), \quad \phi_1'(\frac{a_1}{2}) = \rho_t(a^m)\phi_{1+m}'(-\frac{a_1}{2}), \\
&\vdots \\
\phi_m(\frac{a_m}{2}) &= \rho_t(a^m)\phi_{2m}(-\frac{a_m}{2}), \quad \phi_m'(\frac{a_m}{2}) = \rho_t(a^m)\phi_{2m}'(-\frac{a_m}{2}),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\rho_t(a^m) = e^{\frac{2\pi i}{n}(t-1)m}$. 记 $\theta_1 = \frac{2\pi(t-1)m}{n}, t = 1, \dots, n-1; 1 \leq m \leq n/2; n, m$ 均为正整数, 将 (4.2) 代入到 (4.1) 中, α_1^\pm 到 α_m^\pm 用 α_{1+m}^\pm 到 α_{2m}^\pm 来表示为:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^+ &= \alpha_{1+m}^+ \cdot e^{i(\theta_1 - a_1 k)}, \quad \alpha_1^- = \alpha_{1+m}^- \cdot e^{i(\theta_1 + a_1 k)}, \\
&\vdots \\
\alpha_m^+ &= \alpha_{2m}^+ \cdot e^{i(\theta_1 - a_m k)}, \quad \alpha_m^- = \alpha_{2m}^- \cdot e^{i(\theta_1 + a_m k)}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

基本域中顶点处满足强度为 α 的 δ 耦合条件意味着:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \dots = \phi_m(0) = \phi_{1+m}(0) = \dots = \phi_{2m}(0), \\ \phi_1'(0) + \dots + \phi_m'(0) - \phi_{1+m}'(0) + \dots - \phi_{2m}'(0) = \alpha\phi_1(0). \end{cases} \tag{4.4}$$

将 (4.4) 代入至 (4.1) 中可得:

$$\begin{cases} \alpha_1^+ + \alpha_1^- = \dots = \alpha_m^+ + \alpha_m^- = \alpha_{1+m}^+ + \alpha_{1+m}^- = \dots = \alpha_{2m}^+ + \alpha_{2m}^-, \\ ik(\alpha_1^+ - \alpha_1^- + \dots + \alpha_m^+ - \alpha_m^- - \alpha_{1+m}^+ + \alpha_{1+m}^- - \dots - \alpha_{2m}^+ + \alpha_{2m}^-) = \alpha(\alpha_1^+ + \alpha_1^-). \end{cases} \tag{4.5}$$

联立式 (4.3) 和 (4.5) 可得关于系数 α_{1+m}^\pm 至 α_{2m}^\pm 的 $2m$ 个线性方程, 记 $\xi =$

$(\alpha_{1+m}^+ \alpha_{1+m}^- \alpha_{2+m}^+ \alpha_{2+m}^- \cdots \alpha_{2m}^+ \alpha_{2m}^-)^\top$, 将其改写为矩阵形式为:

$$A\dot{A}\xi + B\dot{B}\xi = \mathbf{0},$$

其中矩阵 A, \dot{A}, B, \dot{B} 均为 $2m \times 2m$ 阶矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} e^{i(\theta_1 - a_1 k)} & e^{i(\theta_1 + a_1 k)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\theta_1 - a_2 k)} & e^{i(\theta_1 + a_2 k)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i(\theta_1 - a_m k)} & e^{i(\theta_1 + a_m k)} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{B} = \begin{pmatrix} ike^{i(\theta_1 - a_1 k)} & -ike^{i(\theta_1 + a_1 k)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ike^{i(\theta_1 - a_2 k)} & -ike^{i(\theta_1 + a_2 k)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ike^{i(\theta_1 - a_m k)} & -ike^{i(\theta_1 - a_m k)} \\ ik & -ik & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik & -ik & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ik & -ik \end{pmatrix}$$

计算其对应的系数矩阵行列式 $\det(A\dot{A} + B\dot{B})$ 并化简, 忽略非零因子可得以下谱条件:

$$\sum_{i=1}^m \left((\tau - \cos a_i k) \prod_{j=1, j \neq i}^m \sin a_j k \right) = \frac{\alpha}{2k} \prod_{j=1}^m \sin a_j k, \tag{4.6}$$

其中 $\tau := \cos \theta_1$. 因此, 能量 $E > 0$ 属于 $\sigma(H_\alpha)$ 当且仅当 $k = E^{\frac{1}{2}}$ 满足关系式 (4.5), 其

中 $-1 \leq \tau \leq 1$ 为在所有离散点 θ_1 处的余弦值. 此时, 纤维算子的谱分析转化为对满足等式 (4.6) 的 k 值的求解问题. 而对于 $E < 0$ 的情况, 将准动量 k 替换为 $i\kappa, \kappa > 0$ 进行分析即可, 此时谱条件 (4.6) 转化为

$$\sum_{i=1}^m \left((\tau - \cosh a_i \kappa) \prod_{j=1, j \neq i}^m \sinh a_j \kappa \right) = \frac{\alpha}{2\kappa} \prod_{j=1}^m \sinh a_j \kappa. \quad (4.7)$$

参考文献

- [1] Berkolaiko, G. and Kuchment, P. (2013) Introduction to Quantum Graphs. Vol. 186. American Mathematical Society.
https://books.google.com/books?hl=zh-CN&lr=&id=QAs8tiBsvEoC&oi=fnd&pg=PR11&dq=introduction+to+quantum+graph&ots=tK54fj_6I9&sig=HuboMufca2wbhu8UkZBgQ3qRge4#v=onepage&q=introduction%20to%20quantum%20graph&f=false
- [2] Zhou, T. (2025) Control of Quantum Transmission through Two Quantum Wires Connected by Nonreciprocally Coupled Quantum Dots. *Indian Journal of Physics*.
<https://doi.org/10.1007/s12648-025-03903-7>
- [3] Lawrie, T.M., Starkey, T.A., Tanner, G., Moore, D.B., Savage, P. and Chaplain, G.J. (2024) Application of Quantum Graph Theory to Metamaterial Design: Negative Refraction of Acoustic Waveguide Modes. *Physical Review Materials*, **8**, Article 105201. <https://doi.org/10.1103/physrevmaterials.8.105201>
- [4] Niikuni, H. (2017) Schrödinger Operators on a Periodically Broken Zigzag Carbon Nanotube. *Proceedings—Mathematical Sciences*, **127**, 471-516.
<https://doi.org/10.1007/s12044-017-0342-7>
- [5] Kurasov, P. (2024) Spectral Geometry of Graphs. Springer, 1-149.
- [6] Kuchment, P. (1991) On the Floquet Theory of Periodic Difference Equations. In: *Geometrical and Algebraical Aspects in Several Complex Variables*, EditEl, 201-209.
- [7] Carlson, R. (2003) Spectral Theory and Spectral Gaps for Periodic Schrödinger Operators on Product Graphs. *Waves in Random Media*, **14**, S29-S45.
<https://doi.org/10.1088/0959-7174/14/1/009>
- [8] Kostenko, A. and Nicolussi, N. (2021) Quantum Graphs on Radially Symmetric Antitrees. *Journal of Spectral Theory*, **11**, 411-460. <https://doi.org/10.4171/jst/346>

- [9] 张凯. 具有循环群作用的量子图的可约性 [D]: [硕士学位论文]. 天津: 河北工业大学, 2024.
- [10] Kowalski, E. (2025) An Introduction to the Representation Theory of Groups: Vol. 155. American Mathematical Society.
- [11] Yu, X., Shao, Z. and Li, Z. (2024) On the Classification and Dispersability of Circulant Graphs with Two Jump Lengths. *Discrete Applied Mathematics*, **355**, 268-286. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.05.012>