

聚类系数对单纯复形网络上SIS模型多稳态的影响

王亚楠, 李明涛, 裴鑫

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年4月13日; 录用日期: 2026年5月7日; 发布日期: 2026年5月15日

摘要

本文基于单纯复形网络上SIS对逼近模型, 系统研究了聚类系数对传染病传播的影响。证明了不存在聚类时, 平凡平衡点为鞍点, 系统存在唯一全局渐近稳定的非平凡平衡点, 且严格证明了不变直线的存在性, 澄清了原模型的近似性。研究表明, 当存在聚类系数时, 系统发生Isola分支, 多稳态行为显著。随着聚类系数增大, Isola分支范围扩张, 多稳态参数区域增大, 高聚类系数还会放大系统对初始感染条件的敏感性。进一步研究表明, 高阶结构参数(2-单纯形的平均数量)对多稳态具有抑制作用, 相同聚类系数下, 2-单纯形的平均数量越小, Isola分支范围越大; 聚类系数越高, 2-单纯形的平均数量的抑制效应越显著。综上, 我们的研究结果揭示了聚类系数是诱发系统多稳态与Isola分支的关键因素, 并明确了2-单纯形的平均数量在聚类调控中的作用, 为针对聚集性活动的非极端防控策略提供了理论依据。

关键词

单纯复形网络, 聚类系数, 对逼近, SIS传染病模型, Isola分支

Effect of Clustering Coefficient on Multistability of SIS Model on Simplicial Complex Networks

Yanan Wang, Mingtao Li, Xin Pei

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: April 13, 2026; accepted: May 7, 2026; published: May 15, 2026

Abstract

We systematically investigate the influence of the clustering coefficient on epidemic spreading based on a pairwise SIS approximation model on simplicial complexes. We prove that in the absence of clustering, the trivial equilibrium is a saddle point, the system admits a unique globally asymptotically stable nontrivial equilibrium, and the existence of the invariant line is rigorously established, thereby clarifying the approximation used in the original model. The results show that in the presence of a clustering, the system exhibits an Isola bifurcation and significant multistability. As the clustering coefficient increases, the Isola bifurcation range expands, the region of multistability enlarges, and a higher clustering coefficient also amplifies the system's sensitivity to initial infection conditions. Further analysis indicates that the higher-order structural parameter (the average number of 2-simplices per node) suppresses multistability: for a fixed clustering coefficient, a smaller average number of 2-simplices leads to a larger Isola bifurcation range; the higher the clustering coefficient, the more pronounced the suppressive effect of the average number of 2-simplices. In summary, our findings reveal that the clustering coefficient is a key factor inducing multistability and Isola bifurcation in the system, and clarify the role of the average number of 2-simplices in clustering modulation, providing a theoretical basis for non-extreme intervention strategies targeting gathering activities.

Keywords

Simplicial Complex Networks, Clustering Coefficient, Pair Approximation, SIS Epidemic Model, Isola Bifurcation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复杂网络已成为描述社会、生物和技术系统中相互作用的重要框架，尤其在传染病传播、信息扩散和社交影响等动力学过程中发挥了关键作用。传统的网络模型 [1-4] 主要刻画节点间的两两相互作用，难以反映现实中普遍存在的群体相互作用。近年来，高阶网络 [5, 6]（如超图、单纯复形）的提出为研究群体相互作用下的传播动力学提供了更精确的数学结构。Wang 等人 [7] 构建了基于单纯复形的社会传播模型，推导出了信息爆发的潜在临界条件，并与蒙特卡洛模拟进行了比较。Landry 和 Restrepo [8] 提出并分析了超图上的 SIS 模型的动力学，深入研究了异质性对超图传染模型的影响。

在高阶传播动力学研究中，基于个体的平均场近似 [9, 10] 往往会忽略节点间的局部相关性，难以准确预测系统在临界点附近的行为。对逼近模型 [11] 不仅能够刻画节点自身的特性，还能捕捉节点之间的相互作用，从而更有效地反映度相关性和聚类结构 [12] 对传播过程的影响，有助于进一步提升高阶网络模型的精度，这使得该方法被广泛应用。Frasca 和 Sharkey [13] 分别从个体和对两个层面上建立了离散时间矩封闭模型，通过数值验证，发现对逼近模型在精度上显著优于基于个体的模型。Malizia 等人 [14] 提出的单纯复形 SIS 对逼近模型正是该方向的重要进展，其构建了包含边与三角形感染机制的单纯复形 SIS 对逼近模型，并在闭合近似下得到了可分析的简化系统。然而，现有对逼近模型尚未系统探讨聚类系数对高阶传播动力学行为的调控机制。

我们基于单纯复形 SIS 对逼近模型，研究聚类对传染病传播的影响，通过对 $\phi = 0$ （无聚类）和 $\phi > 0$ （存在聚类）两种情况的对比分析，揭示了聚类系数如何使系统产生多稳态，并明确了 2-单纯形平均数量在聚类调控中的抑制作用，为防控策略提供理论依据。本文结构如下：第 2 节介绍模型的建立；第 3 节分析系统的平衡点及其稳定性；第 4 节数值模拟；最后在第 5 节总结研究结论。

2. 模型的建立

我们所研究的单纯复形 SIS 对逼近模型 [14]，从节点对层面描述系统的演化状态，更准确地刻画出含高阶交互的复杂传染过程。模型具体为

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{S} \rangle = \mu \langle I \rangle - \beta k \langle SI \rangle - \beta_{\Delta} k_{\Delta} \langle ISI^{\Delta} \rangle, \\ \langle \dot{I} \rangle = -\mu \langle I \rangle + \beta k \langle SI \rangle + \beta_{\Delta} k_{\Delta} \langle ISI^{\Delta} \rangle, \\ \langle \dot{S}S \rangle = 2\mu \langle SI \rangle - 2\beta(k-1) \langle SSI \rangle - 2\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} (k-2) \langle IIS^{\Delta}S \rangle, \\ \langle \dot{S}I \rangle = \mu \langle II \rangle - \mu \langle SI \rangle + \beta(k-1) \langle SSI \rangle - \beta(k-1) \langle ISI \rangle - \beta \langle SI \rangle \\ \quad + \beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} (k-2) \langle IIS^{\Delta}S \rangle - 2\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} \langle ISI^{\Delta} \rangle - \beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} (k-2) \langle IIS^{\Delta}I \rangle, \\ \langle \dot{I}I \rangle = -2\mu \langle II \rangle + 2\beta(k-1) \langle ISI \rangle + 2\beta \langle SI \rangle + 4\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} \langle ISI^{\Delta} \rangle \\ \quad + 2\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} (k-2) \langle IIS^{\Delta}I \rangle. \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, k 为节点平均度且 $k > 2$, $\phi \in [0, 1]$ 为全局聚类系数, β 为节点对感染过程的感染率, β_Δ 为2-单纯形的感染过程的感染率, k_Δ 为每个节点连接的2-单纯形的平均数量, μ 为恢复率, 所有参数均为正数。对原模型进行封闭 [2, 14], 将三元组 $(\langle SSI \rangle, \langle ISI \rangle)$ 和四元组 $(\langle IIS^\Delta S \rangle, \langle IIS^\Delta I \rangle)$ 用一元组 $(\langle S \rangle, \langle I \rangle)$ 和二元组 $(\langle SS \rangle, \langle SI \rangle, \langle II \rangle)$ 表示,

$$\langle SSI \rangle \approx (1 - \phi) \frac{\langle SS \rangle \langle SI \rangle}{\langle S \rangle} + \phi \frac{\langle SS \rangle \langle SI \rangle^2}{\langle S \rangle^2 \langle I \rangle},$$

$$\langle ISI \rangle \approx (1 - \phi) \frac{\langle SI \rangle^2}{\langle S \rangle} + \phi \frac{\langle SI \rangle^2 \langle II \rangle}{\langle S \rangle \langle I \rangle^2},$$

$$\begin{aligned} \langle IIS^\Delta S \rangle &= (1 - \phi)^2 \frac{\langle SI \rangle^2 \langle II \rangle \langle SS \rangle}{\langle S \rangle^2 \langle I \rangle^2} + 2(1 - \phi)\phi \frac{\langle SI \rangle^3 \langle II \rangle \langle SS \rangle}{\langle S \rangle^3 \langle I \rangle^3} \\ &+ \phi^2 \frac{\langle SI \rangle^4 \langle II \rangle \langle SS \rangle}{\langle S \rangle^4 \langle I \rangle^4}, \end{aligned}$$

$$\langle IIS^\Delta I \rangle = (1 - \phi)^2 \frac{\langle SI \rangle^3 \langle II \rangle}{\langle S \rangle^2 \langle I \rangle^2} + 2(1 - \phi)\phi \frac{\langle SI \rangle^3 \langle II \rangle^2}{\langle S \rangle^2 \langle I \rangle^4} + \phi^2 \frac{\langle SI \rangle^3 \langle II \rangle^3}{\langle S \rangle^2 \langle I \rangle^6},$$

为研究传播初期的动力学行为, 并避免系统在感染密度趋于零时出现奇异性, 定义了两个快速变量:

$$x = \frac{\langle SI \rangle}{\langle I \rangle}, \quad y = \frac{\langle II \rangle}{\langle I \rangle},$$

其流行病学意义可阐释为: x 表示平均每个感染者所接触的易感者数量; y 表示平均每个感染者所接触的其他感染者数量。这两个变量在感染初期 ($\langle I \rangle \rightarrow 0$) 仍保持有限, 能有效刻画感染节点周围的局部相关结构。因此根据系统(1)可以得到如下两维的快速变量动力学模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = [(k - 1)(1 - \phi) - 1]\beta x + \mu y + [(k - 1)\phi - k]\beta x^2 \\ \quad + [-\beta(k - 1)\phi + \beta_\Delta \frac{k_\Delta}{k}(k - 2)(1 - \phi)^2 - 2\beta_\Delta \frac{k_\Delta}{k}]x^2 y - \beta_\Delta k_\Delta x^3 y, \\ \dot{y} = 2\beta x - \mu y - \beta k x y + [2\beta(k - 1)\phi + 4\beta_\Delta \frac{k_\Delta}{k}]x^2 y - \beta_\Delta k_\Delta x^2 y^2. \end{cases} \quad (2)$$

接下来, 我们来分析系统(2)的动力学。

3. 平衡点分析

显然当 $\phi \in [0, 1]$, 系统(2)始终存在一个平凡平衡点 $E_0(x_0, y_0) = (0, 0)$, 我们有如下定理。

定理3.1. 对于任意 $\phi \in [0, 1]$, 系统(2)的平凡平衡点(0, 0)是一个鞍点。

证明. 对于任意 $\phi \in [0, 1]$, 系统(2)在平凡平衡点(0, 0)处的雅可比矩阵为

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \beta[(k-1)(1-\phi) - 1] & \mu \\ 2\beta & -\mu \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + (\mu - \alpha)\lambda - \mu(\alpha + 2\beta) = 0,$$

其中 $\alpha = \beta[(k-1)(1-\phi) - 1]$ 。因为 $\mu > 0, \beta > 0, k > 2, \phi \in [0, 1]$, 所以 $\alpha + 2\beta > 0$, 故特征值为一正一负的两实根, 因此 $(0, 0)$ 是一个鞍点。

□

由定理3.1可知, 系统(2)的平凡平衡点 $(0, 0)$ 始终不稳定, 接下来分析系统(2)是否存在满足 $x^* > 0, y^* > 0$ 的非平凡平衡点, 其存在性直接决定早期传播能否过渡到持续感染稳态。

定理3.2. 对于任意 $\phi \in [0, 1]$, 系统(2)至少存在一个非平凡平衡点。

证明. 系统(2)的非平凡平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 需满足:

$$\begin{cases} [(k-1)(1-\phi) - 1]\beta x + \mu y + [(k-1)\phi - k]\beta x^2 \\ + [-\beta(k-1)\phi + \beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k}(k-2)(1-\phi)^2 - 2\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k}]x^2 y - \beta_{\Delta} k_{\Delta} x^3 y = 0, \\ 2\beta x - \mu y - \beta k x y + [2\beta(k-1)\phi + 4\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k}]x^2 y - \beta_{\Delta} k_{\Delta} x^2 y^2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

若方程组(3)存在正解 (x, y) , 由方程组(3)的第二个方程, 有

$$y = y(x) = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 8\beta_{\Delta} k_{\Delta} \beta x^3}}{2\beta_{\Delta} k_{\Delta} x^2},$$

其中, $A = \mu + \beta k x - (2\beta(k-1)\phi + \frac{4\beta_{\Delta} k_{\Delta}}{k})x^2$.

下证 $x > 0$ 的存在性, 将 $y(x)$ 的表达式代入方程组(3)的第一个方程, 整理得

$$H(x) = ax + \mu y(x) + A_1 x^2 + A_2 x^2 y(x) - \beta_{\Delta} k_{\Delta} x^3 y(x),$$

其中, $A_1 = ((k-1)\phi - k)\beta$, $A_2 = -\beta(k-1)\phi + \frac{\beta_{\Delta} k_{\Delta}}{k}(k-2)(1-\phi)^2 - \frac{2\beta_{\Delta} k_{\Delta}}{k}$.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$H(x) \sim \beta[(k-1)(1-\phi) + 1]x > 0,$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$H(x) \sim -(2\beta(k-1)\phi + \frac{4\beta_{\Delta} k_{\Delta}}{k})x < 0.$$

由介值定理可知, 存在 $x^* \in (0, +\infty)$ 使 $H(x^*) = 0$, 综上, 对于任意 $\phi \in [0, 1]$, 系统(2)至少存在一个非平凡平衡点。 □

对于非平凡平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 其雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 均为包含 x^*, y^* 和多个参数的复杂表达式。无法解析求出稳定性条件, 我们采用数值方法来研究其稳定性。

3.1. $\phi = 0$ 时, 系统(2)的平衡点分析

本节研究聚类系数 $\phi = 0$ 时, 系统(2)的动力学行为。此时, 系统(2)简化为

$$\begin{cases} \dot{x} = (k-2)\beta x + \mu y - k\beta x^2 + \beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} (k-4)x^2 y - \beta_{\Delta} k_{\Delta} x^3 y \triangleq P(x, y), \\ \dot{y} = 2\beta x - \mu y - \beta k x y + 4\beta_{\Delta} \frac{k_{\Delta}}{k} x^2 y - \beta_{\Delta} k_{\Delta} x^2 y^2 \triangleq Q(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

定理3.3. 系统(4)在正不变集 $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ 内不存在周期轨道。

证明. 在边界 $x = 0, y > 0$ 上, 有 $\dot{x} = \mu y > 0$; 边界 $y = 0, x > 0$ 上, 有 $\dot{y} = 2\beta x > 0$; 原点 $(0, 0)$ 为系统的不稳定平衡点, 系统(4)初值从 D 出发的解始终停留在 D 内。因此, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ 是系统(4)的正不变集。

在正不变集 D 内, 取Dulac函数

$$B(x, y) = \frac{1}{x^2 y},$$

计算向量场散度

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -\left(\frac{\beta(k-2)}{x^2 y} + 2\mu \frac{1}{x^3} + 2\beta_{\Delta} k_{\Delta} + \frac{2\beta}{xy^2}\right),$$

因为 $k > 2$, 所以

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0.$$

根据Bendixson-Dulac判别法, 系统(4)在 D 内不存在周期轨道。

□

定理3.4. 系统(4)存在不变直线 $L = \{(x, y) \mid x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 且所有从 $D_1 = D \setminus \{(0, 0)\}$ 内出发的解最终都吸引到直线 L 。

证明. 令 $s = x + y$, 计算其沿系统(4)轨线的导数:

$$\dot{s} = \dot{x} + \dot{y} = (1-s)(k\beta x + \beta_{\Delta} k_{\Delta} x^2 y).$$

若 $s = 1$, 则 $\dot{s} = 0$, 故直线 L 是不变集。

当 $s > 1$ 时, $\dot{s} < 0$; 当 $s < 1$ 时, $\dot{s} > 0$ 。因此 $s(t)$ 单调地趋于 1, 并且始终介于 $\min\{s(0), 1\}$ 与 $\max\{s(0), 1\}$ 之间, 故有界。从而 $x(t), y(t)$ 也有界, 解全局存在。

定义李雅普诺夫函数 $V = (s - 1)^2$, 则

$$\dot{V} = -2(s - 1)^2(k\beta x + \beta_{\Delta}k_{\Delta}x^2y).$$

令 $E = \{(x, y) \in D | \dot{V} = 0\}$, 由 $\dot{V} = 0$ 当且仅当 $s = 1$ 或 $x = 0$, 即 $E = L \cup \{(0, y) | y \geq 0\}$ 。直线 L 本身是不变集, 在直线 $x = 0$ 上, 若 $y > 0$, 轨线立即离开 $x = 0$; 原点不稳定, 故不存在 D_1 出发的解以原点为 ω -极限点。因此对任意 $(x_0, y_0) \in D_1$, 其 ω -极限集不能包含 $x = 0$ 上的非原点的点。

最后根据系统(4)解的有界性和 LaSalle 不变性原理, 每条轨线的 ω -极限集是非零紧致不变集, 且包含于 E 。由上述不变集的分析, 该极限集必包含于 L 。从而由 V 的单调性, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(t) \rightarrow 0$ 。故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) + y(t)) = 1.$$

即所有从 D_1 出发的解最终都吸引到直线 L 上。 □

由定理 3.1 易知, 系统(4)始终存在不稳定的平凡平衡点 $(0, 0)$ 。因此, 系统能否形成持续感染稳态, 关键取决于非平凡平衡点的存在性与稳定性, 下面分析非平凡平衡点的存在性及稳定性。

定理 3.5. 系统(4)存在唯一的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 且 E^* 在 D_1 上是全局渐近稳定的。

证明. 由定理 3.4, 系统(4)的轨线最终都收敛到不变直线 L , 因此可将系统限制在直线 L 上分析, 此时满足 $x = 1 - y$ 且 $y \in (0, 1)$ 。从平衡点存在性过程整理得到参数 μ 关于 y 的函数为:

$$\mu(y) = \beta \frac{(1-y)(2-ky)}{y} + \beta_{\Delta}k_{\Delta}(1-y)^2\left(\frac{4}{k} - y\right), \quad y \in (0, 1).$$

注意到, 当 $y \rightarrow 0^+$ 时, $\mu(y) \rightarrow +\infty$; 当 $y \rightarrow 1^-$ 时, $\mu(y) \rightarrow 0^-$ 。对 $\mu(y)$ 求导得

$$\mu'(y) = f(y) - g(y),$$

其中 $f(y) = \beta(k - \frac{2}{y^2})$ (严格递增), $g(y) = \beta_{\Delta}k_{\Delta}(1-y)(\frac{8}{k} + 1 - 3y)$ 。在端点处 $\mu'(0^+) < 0$, $\mu'(1^-) > 0$, 由连续性知 $\mu'(y) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个解。

当 $k \leq 4$ 时, $g(y)$ 在 $(0, 1)$ 上严格递减, 故 $\mu'(y)$ 严格递增, 从而有唯一零点。

当 $k > 4$ 时, $g(y)$ 先减后增, 存在唯一极小值点 $y_0 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3k} \in (0, 1)$, 且 $\mu'(y_0) > 0$ 。在 $(0, y_0)$ 上, $g(x)$ 递减, $f(x)$ 递增, 所以 $\mu'(y)$ 严格递增, 且 $\mu'(0^+) < 0$, $\mu'(y_0) > 0$, 故存在唯一 $y_c \in (0, y_0)$ 使得 $\mu'(y_c) = 0$ 。在 $(y_0, 1)$ 上, $g(x)$ 递增, $f(x)$ 递增, 且 $\mu''(y) = f'(y) - g'(y)$ 递减。由 $\mu''(y_0) > 0$ 及 $\mu'(1^-) > 0$, 结合 $\mu''(y)$ 单调性可知, $\mu'(y)$ 在 $(y_0, 1)$ 上恒正, 因此无零点。故 $\mu'(y) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内部有唯一解 y_c , 且 $\mu'(y)$ 在 $(0, y_c)$ 上严格递减, 在 $(y_c, 1)$ 上严格递增, 极小值 $\mu(y_c) < 0$ 。

综上, 对任意给定的 $\mu > 0$, 方程 $\mu = \mu(y)$ 在 $(0, y_c)$ 内有唯一解 y^* , 对应系统(4)存在唯一的正平衡点 $E^*(1 - y^*, y^*) \in L$ 。

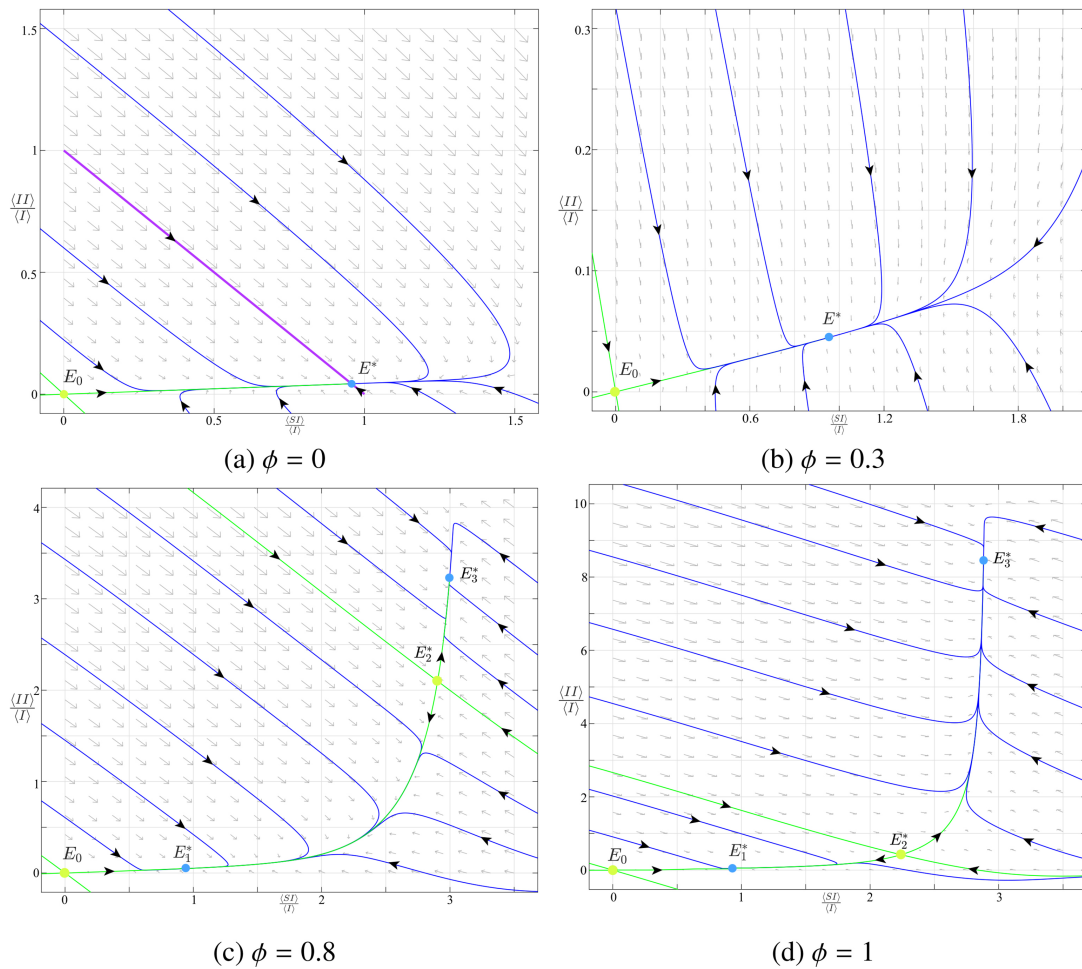


Figure 1. Phase portrait of x and y , where $k = 5$, $\beta = 0.01$, $\beta_{\Delta} = 0.001$, $k_{\Delta} = 2$, $\mu = 0.4$

图 1. x 和 y 的相图，其中 $k = 5$, $\beta = 0.01$, $\beta_{\Delta} = 0.001$, $k_{\Delta} = 2$, $\mu = 0.4$

在直线 L 上，系统(4)的动力学可简化为关于 y 的方程，由系统(4)可得：

$$\dot{y} = -y(\mu - \mu(y)), \quad y \in (0, 1). \tag{5}$$

由 $\mu(y)$ 性质知：当 $0 < y < y^*$ 时， $\mu(y) > \mu$ ，故 $\dot{y} > 0$ ；当 $y^* < y < 1$ 时， $\mu(y) < \mu$ ，故 $\dot{y} < 0$ 。因此 y^* 是方程(5)在 $(0, 1)$ 内的全局渐近稳定平衡点，即从任何 $y_0 \in (0, 1)$ 出发的解都有 $y(t) \rightarrow y^*$ 。

对于原系统(4)在 D_1 内的任意轨线，由定理3.4知，其 ω -极限集包含于 L 。由于在 L 上，除去平衡点 E^* 外所有点都沿方程(5)趋向于 E^* ，故 L 上无其他不变子集。因此 ω -极限集必为 $\{E^*\}$ ，即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (1 - y^*, y^*).$$

从而 E^* 在 D_1 内全局渐近稳定。

□

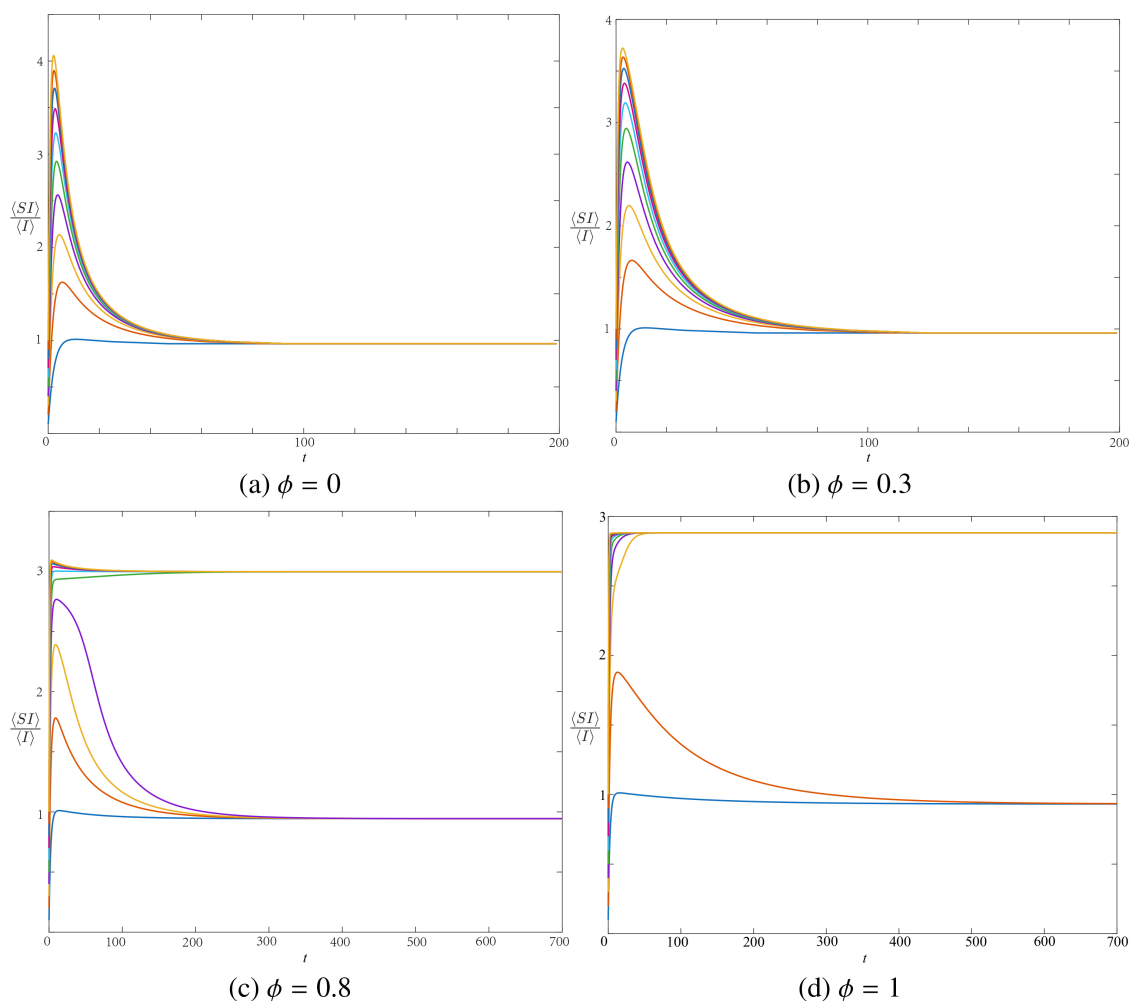


Figure 2. Time series of x under different clustering coefficients, where $k = 5$, $\beta = 0.01$, $\beta_{\Delta} = 0.001$, $k_{\Delta} = 2$, $\mu = 0.4$

图 2. 不同聚类下的 x 的时间序列, 其中 $k = 5$, $\beta = 0.01$, $\beta_{\Delta} = 0.001$, $k_{\Delta} = 2$, $\mu = 0.4$

综上, $\phi = 0$ (无聚类) 时, 系统的所有正解都被吸引到不变直线 L 上的唯一正平衡点, 该平衡点 E^* 全局渐近稳定, 原点为不稳定平衡点, 不在其吸引域范围内。

4. 数值模拟

为了更好地探究聚类结构对模型的影响, 本节从数值模拟方面对系统的动力学行为进行研究。

选取参数值 $k = 5$, $\beta = 0.01$, $\beta_{\Delta} = 0.001$, $k_{\Delta} = 2$, $\mu = 0.4$, 当 $\phi = 0$ 时, 如图 1(a) 所示, 平衡点 $E_0(0, 0)$ 是鞍点, 非平凡平衡点 $E^*(0.957, 0.043)$ 全局渐近稳定且落在紫色线上, 这条紫色线即不变直线 L 。当 $\phi = 0.3$ 时, 如图 1(b) 所示, 不变直线 L 消失, 但仍存在鞍点 $E_0(0, 0)$ 和一个稳定的非平凡平衡点 $E^*(0.954, 0.045)$ 。当 ϕ 增大到 0.8 时, 如图 1(c) 所示, 系统 (2) 中除存在鞍点 $E_0(0, 0)$ 外, 还存在三个非平凡平衡点 $E_1^*(0.944, 0.049)$, $E_2^*(2.903, 2.100)$, $E_3^*(2.997, 3.227)$, 其

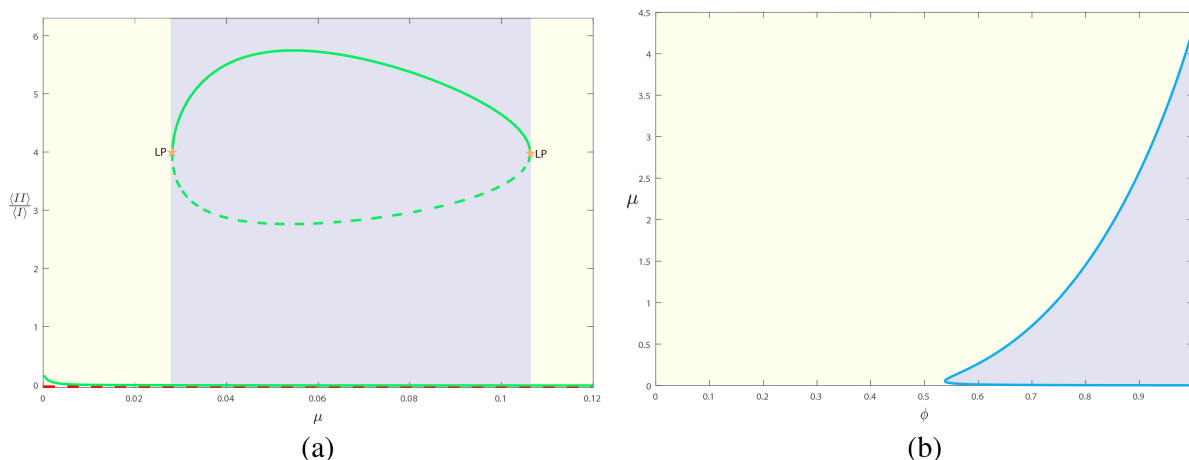


Figure 3. (a) Bifurcation diagram of system (2) for $\phi = 0.55$. LP denotes limit point; solid lines represent stable branches, dashed lines unstable branches; the green line corresponds to the nontrivial equilibrium E^* , and the red line corresponds to the trivial equilibrium E_0 . (b) Two-parameter bifurcation diagram in ϕ and μ

图 3. (a) $\phi = 0.55$ 时, 系统(2)的分支图, LP表示极限点, 实线表示稳定, 虚线表示不稳定, 绿线代表非平凡平衡点 E^* , 红线代表平凡平衡点 E_0 ; (b) ϕ 和 μ 的双参数分支图

中 E_1^* , E_3^* 是稳定平衡点, E_2^* 是鞍点。当 ϕ 继续增大到1时, 如图 1(d)所示, 系统(2)存在三个非平凡平衡点 $E_1^*(0.931, 0.050)$, $E_2^*(2.241, 0.421)$, $E_3^*(2.882, 8.458)$ 和鞍点 $E_0(0, 0)$, 它们的稳定性未发生改变, 但吸引域发生了变化。

在图 2中, 我们继续沿用图 1的参数取值, 在不同聚类系数下, 选取同一组初值(0.1, 1), (0.2, 2), (0.3, 3), (0.4, 4), (0.5, 5), (0.6, 6), (0.7, 7), (0.8, 8), (0.9, 9), (1.0, 10), 绘制了变量 x 的时间序列图。当 $\phi = 0$, $\phi = 0.3$ 时, 如图 2(a)、图 2(b)所示, 不同初值的解都呈现出先增后减的趋势, 且最终都收敛到稳定的非平凡平衡点 E_1^* 。在图 2(c)中, 当 $\phi = 0.8$ 时, 不同初值的解仍保持先增后减的趋势, 但一部分解最终收敛到稳定的非平凡平衡点 E_1^* , 另一部分解收敛到稳定的非平凡平衡点 E_3^* 。在图 2(d)中, 当 ϕ 取到1时, 大部分的解增大并快速收敛到稳定非平凡平衡点 E_3^* , 较少的解呈现先增后减的趋势且最终收敛到稳定的非平凡平衡点 E_1^* 。由图 2可知, 当聚类程度较低时, 系统具有唯一稳定的非平凡平衡点, 不同初始条件的疫情均收敛至同一感染水平, 传播路径单一可预测; 随着聚类程度的增大, 系统出现双稳态。不同的初始条件可使疫情分别走向低流行水平 E_1^* 或高流行水平 E_3^* , 对初值产生依赖性; 聚类系数继续增大到1后, 大部分初始条件的解均落入高感染平衡点 E_3^* 的吸引域, 使疾病更易发生大规模的暴发。上述结果表明, 高聚类结构不仅会引发多稳态, 还会放大系统对初始感染条件的敏感性, 进而产生不同疫情暴发结局。

接下来, 我们固定参数 $k = 20$, $\beta = 0.0001$, $k_\Delta = 5$, $\beta_\Delta = 0.00001$, $\phi = 0.55$, 以 μ 为分支参数, 得到系统(2)的单参数分支图, 如图 3(a) 所示。图 3(a)中稳定平衡点与不稳定平衡点交错出现, 形成类似孤岛或环状结构。特别是在 μ 的某一区间内, 稳定平衡点与不稳定平衡点通过两个LP点相连, 构成封闭的区域, 使系统(2)呈现出多稳态特征。

这表明聚类结构可使系统发生Isola分支 [15, 16], 导致系统在不同参数区间出现多稳态转换。我们从图 3(a)中的LP分支点可以得到系统(2)的双参数分支图, 如图 3(b)所示, 其中淡黄色区域对

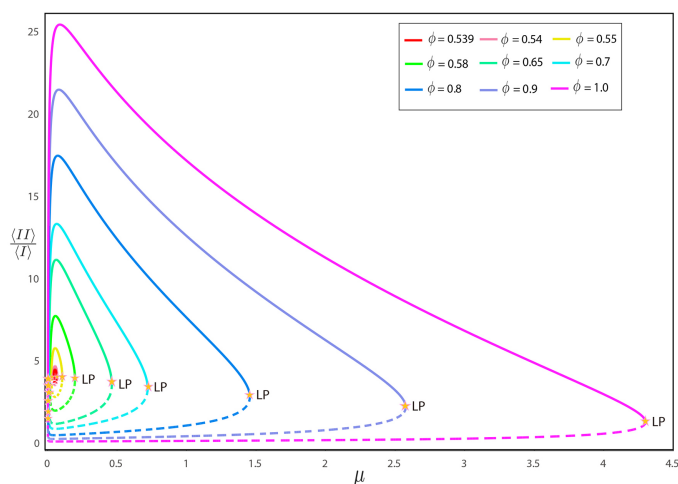


Figure 4. Bifurcation diagrams of Isola bifurcation occurring in system (2) under different clustering coefficients

图 4. 不同聚类下, 系统(2)发生Isola的分支图

应系统(2)存在一个非平凡平衡点, 紫色区域存在3个非平凡平衡点, 当参数 ϕ 和 μ 在紫色区域内取值时, 系统(2)出现多稳态特征。上述结果表明, 聚类系数是使系统发生Isola分支的关键因素。为深入探究其调控作用, 需进一步分析聚类系数对Isola分支结构的影响。

固定参数 $k = 20$ 、 $\beta = 0.0001$ 、 $k_{\Delta} = 5$ 、 $\beta_{\Delta} = 0.00001$, 通过数值计算得到不同聚类系数下的Isola分支图(见图4)。结果表明, 随着聚类系数的增大, Isola分支结构的范围随之扩张, 系统呈现多稳态的参数区域相应增大, 多稳态行为更为显著; 当聚类系数减小时, Isola分支结构逐步收缩并最终消失。由此可见, 较高的聚类系数能够促使系统产生Isola分支, 并强化系统的多稳态特性。

最后研究高阶结构参数 k_{Δ} 对Isola分支结构的调控作用。固定参数 $k = 20$ 、 $\beta = 0.0001$ 、 $\beta_{\Delta} = 0.000001$, 分别在聚类系数 $\phi = 0.3, 0.5, 0.9$ 下改变 k_{Δ} 的取值, 得到对应的Isola分支图(见图5)。结果显示, 在相同的聚类系数下, 2-单纯形的平均数量 k_{Δ} 越小, Isola分支结构的范围越大, 系统出现多稳态的参数区域也越大, 即 k_{Δ} 对系统的多稳态具有抑制作用。同时, 聚类系数越高, k_{Δ} 对多稳态的抑制效应越显著。

综上, 我们分别从系统(2)的相图、时间序列图与分支图三个方面, 揭示了聚类结构对系统动力学的影响以及2-单纯形的平均数量对聚类结构的影响, 为疾病防控策略提供了依据。

5. 结论

我们基于单纯复形SIS对逼近模型, 通过理论与数值模拟, 系统研究了聚类结构对高阶传播动力学的调控机制, 主要得到以下结论: 在 $\phi = 0$ (无聚类)情况下, 我们严格证明了原模型[14]中近似条件 $\frac{\langle SI \rangle}{\langle I \rangle} + \frac{\langle II \rangle}{\langle I \rangle} \approx 1$ 可精确为 $\frac{\langle SI \rangle}{\langle I \rangle} + \frac{\langle II \rangle}{\langle I \rangle} = 1$, 并证明了此时系统存在唯一全局渐近稳定的非平凡平衡点。这一结果从根本上澄清了原模型的近似性带来的理论模糊性, 为无聚类结构

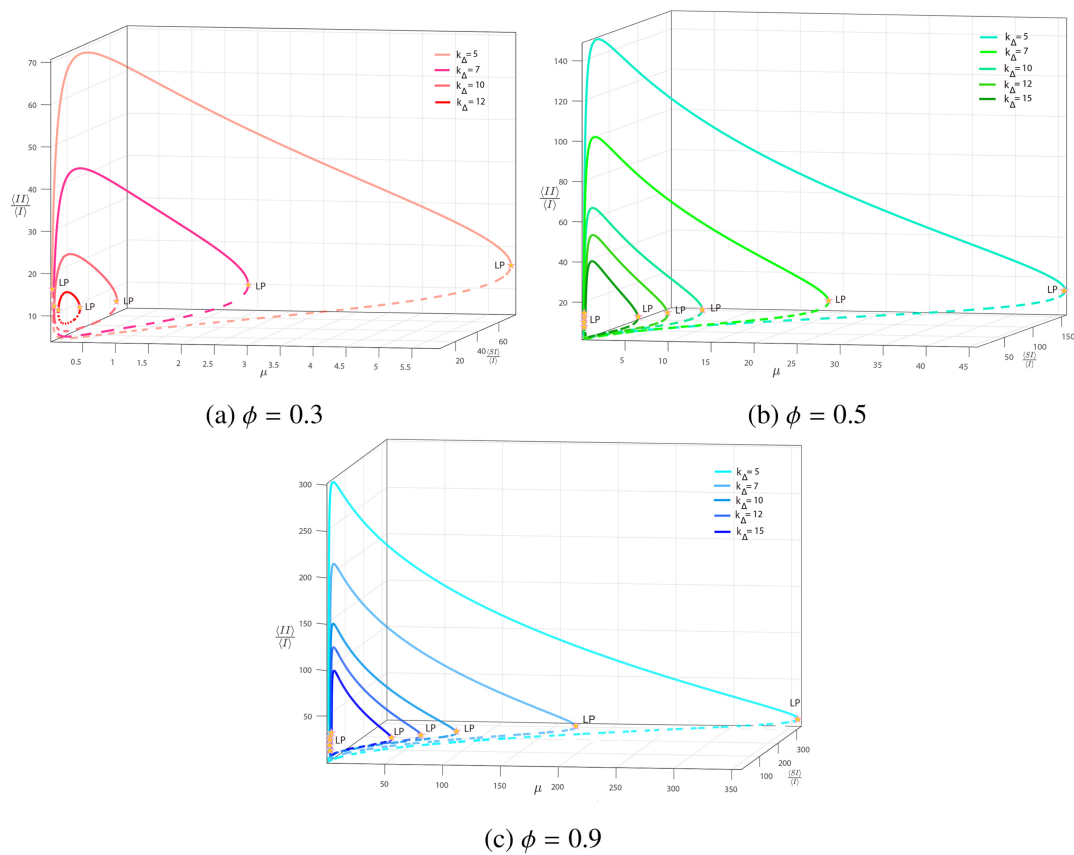


Figure 5. Effect of the higher-order parameter k_{Δ} on Isola bifurcation for different clustering coefficients
图 5. 不同聚类下，高阶结构参数 k_{Δ} 对 Isola 分支的影响

下的高阶传播动力学奠定了严格的理论基础。当 $\phi > 0$ 时，聚类结构使系统从确定性收敛转变为多稳态演化。数值模拟分析表明，系统会出现多个非平凡平衡点，并伴随 Isola 分支，形成稳态区域，揭示了聚类结构的存在增加了疾病传播的复杂性。进一步研究发现，2-单纯形的平均数量 k_{Δ} 能够抑制聚类结构引起的多稳态特征，且聚类系数越高，这种抑制效果越明显。

上述发现对制定分层、动态的防控策略具有重要启示。在疫情初期，若监测到局部聚集性活动频繁发生，则应迅速采取限制小群体接触等措施，以有效降低聚类系数 ϕ ，从而抑制多稳态的出现，避免系统收敛到持续感染态。对于已经形成较高聚类系数的社区，可进一步通过控制 2-单纯形平均数量 k_{Δ} （例如限制频繁的三人以上的聚集活动）来抑制多稳态的扩张，且聚类系数越高，这种抑制措施的效果越显著。因此，防控策略应依据实时估计的聚类系数动态调整干预强度：低聚类时可采取常规监测，高聚类时则需升级为强力干预。与传统网络上的多稳态研究相比，本文首次在单纯复形框架下揭示，即使所有节点度相同、感染率为线性，仅凭聚类系数 ϕ 的高阶结构即可诱发 Isola 分支和多稳态。这证明了高阶相互作用本身是一种独立的多稳态生成机制，丰富了传播动力学的理论图景。但本研究也存在以下的不足：模型仅考虑 SIS 动力学，未涉及免疫、潜伏期等更复杂的流行病学特征。未来可扩展至 SIR、SEIR 等模型，探讨聚类对爆发阈值和最终规模的影响。

参考文献

- [1] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M. and Hwang, D. (2006) Complex Networks: Structure and Dynamics. *Physics Reports*, **424**, 175-308.
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
- [2] 靳祯, 孙桂全, 刘茂省. 网络传染病动力学建模与分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [3] Keeling, M.J. and Eames, K.T.D. (2005) Networks and Epidemic Models. *Journal of The Royal Society Interface*, **2**, 295-307. <https://doi.org/10.1098/rsif.2005.0051>
- [4] Danon, L., Ford, A.P., House, T., Jewell, C.P., Keeling, M.J., Roberts, G.O., *et al.* (2011) Networks and the Epidemiology of Infectious Disease. *Interdisciplinary Perspectives on Infectious Diseases*, **2011**, 1-28. <https://doi.org/10.1155/2011/284909>
- [5] Boccaletti, S., De Lellis, P., del Genio, C.I., Alfaro-Bittner, K., Criado, R., Jalan, S., *et al.* (2023) The Structure and Dynamics of Networks with Higher Order Interactions. *Physics Reports*, **1018**, 1-64. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2023.04.002>
- [6] Gao, Z., Ghosh, D., Harrington, H.A., Restrepo, J.G. and Taylor, D. (2023) Dynamics on Networks with Higher-Order Interactions. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **33**, Article 040401. <https://doi.org/10.1063/5.0151265>
- [7] Wang, D., Zhao, Y., Leng, H. and Small, M. (2020) A Social Communication Model Based on Simplicial Complexes. *Physics Letters A*, **384**, Article 126895.
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126895>
- [8] Landry, N.W. and Restrepo, J.G. (2020) The Effect of Heterogeneity on Hypergraph Contagion Models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **30**, Article 103117.
<https://doi.org/10.1063/5.0020034>
- [9] Leng, H., Zhao, Y., Luo, J. and Ye, Y. (2022) Simplicial Epidemic Model with Birth and Death. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article 093144.
<https://doi.org/10.1063/5.0092489>
- [10] Wang, D., Zhao, Y., Luo, J. and Leng, H. (2021) Simplicial SIRS Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rates. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **31**, Article 053112. <https://doi.org/10.1063/5.0040518>
- [11] Sharkey, K.J., Kiss, I.Z., Wilkinson, R.R. and Simon, P.L. (2015) Exact Equations for SIR Epidemics on Tree Graphs. *Bulletin of Mathematical Biology*, **77**, 614-645.
<https://doi.org/10.1007/s11538-013-9923-5>
- [12] Li, Y., Shang, Y. and Yang, Y. (2017) Clustering Coefficients of Large Networks. *Information Sciences*, **382**, 350-358. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.12.027>
- [13] Frasca, M. and Sharkey, K.J. (2016) Discrete-Time Moment Closure Models for Epidemic Spreading in Populations of Interacting Individuals. *Journal of Theoretical Biology*, **399**, 13-21. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2016.03.024>

- [14] Malizia, F., Gallo, L., Frasca, M., Kiss, I.Z., Latora, V. and Russo, G. (2025) A Pair-Based Approximation for Simplicial Contagion. *Chaos, Solitons & Fractals*, **199**, Article 116776. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2025.116776>
- [15] Karst, N.J. and Geddes, J.B. (2025) Isolas in Nonlinear Fluid Networks. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **24**, 259-276. <https://doi.org/10.1137/24m1657146>
- [16] Giri, A. and Kar, S. (2021) Incoherent Modulation of Bi-Stable Dynamics Orchestrates the Mushroom and Isola Bifurcations. *Journal of Theoretical Biology*, **530**, Article 110882. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2021.110882>