

分数布朗运动噪声驱动的SIS流行病模型解的存在唯一性

俞乐梵, 田琳琳*, 闫理坦

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026年4月13日; 录用日期: 2026年5月7日; 发布日期: 2026年5月19日

摘要

现实中, 传染病的传播过程往往受到具有长程相关特征的环境噪声影响。本文研究了一类由Hurst指数 $H \in (1/2, 1)$ 的分数布朗运动驱动的随机SIS 流行病模型。首先, 通过压缩映射原理, 证明了该方程局部解的存在唯一性。其次, 针对分数Malliavin 导数矩估计中的相关技术难题, 本文通过合适的变量变换与不等式放缩技巧, 证明了状态比值过程的有界性。最后, 通过构造Lyapunov函数并结合反证法, 严格证明了该随机微分方程存在唯一的全局正解, 且方程轨道以概率1 始终保持在生物学合理区间 $(0, N)$ 内。

关键词

SIS生物模型, 分数布朗运动, Wick-Itô积分, 解的存在唯一性, Malliavin导数

Existence and Uniqueness of Solutions for an SIS Epidemic Model Driven by Fractional Brownian Motion

Lefan Yu, Linlin Tian*, Litan Yan

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

* 通讯作者

Abstract

Real-world epidemic transmission is frequently subject to environmental noise with long-range dependence. This paper investigates a stochastic SIS model driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (1/2, 1)$. First, the local existence and uniqueness of the solution are established using the contraction mapping principle. To address moment estimation challenges for fractional Malliavin derivatives, the boundedness of the state ratio process is proved via variable transformations and inequality scaling. Finally, by constructing a Lyapunov function and applying proof by contradiction, the existence and uniqueness of a global positive solution is rigorously demonstrated, with trajectories almost surely remaining within the biologically feasible interval $(0, N)$.

Keywords

SIS Epidemic Model, Fractional Brownian Motion, Wick-Itô Integral, Existence and Uniqueness, Malliavin Derivative

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

通过引入确定性仓室模型 (deterministic compartmental models) 开展传染病建模研究, 对于揭示疫情演变机理及制定致命疾病防控策略具有重要意义。在这一建模框架下, 受病人群通常根据生理状态被划分为若干类, 如易感者、感染者和移除者。经典的Kermack-McKendrick 模型 [1] 是此类研究的基石, 常用于模拟具有“感染即免疫”特征的典型童年疾病: 个体最初处于易感状态, 在特定阶段被感染, 经过短暂病期后获得永久免疫。这一种群演化过程通常被刻画为SIR 模型。然而, 某些疾病如细菌感染并不具备永久免疫特性。易感个体被感染后, 经过一段较短的时间, 染病者会重新转化为易感状态。此演化过程通常被描述为SIS模型 [2], 关于SIS 及其推广模型的性质, 已有大量确定性研究结果, 可参见 [3-7]。若用 $S(t)$ 表示 t 时刻易感者的数量, $I(t)$ 表示

感染者的数量，则描述该疾病传播过程的微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu N - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中初始值满足 $S_0 + I_0 = N$ ， N 表示总人口数量。参数 μ 代表人均死亡率， γ 表示感染者的康复率， β 为疾病传播系数。利用条件 $S(t) + I(t) = N$ ，可将原始方程组(1) 改写为

$$dI(t) = [\beta(N - I(t))I(t) - (\mu + \gamma)I(t)]dt. \quad (2)$$

现实世界中，由于参数极易受各种不确定性因素的影响，确定性模型往往难以准确描述实际问题。因此，引入环境噪声的随机模型更适用于传染病问题的研究。例如，Gray 等人 [8] 考虑了确定性SIS 模型中传播系数 β 的扰动。首先，他们在微小时间间隔 $[t, t + dt)$ 内分析方程(2)，并使用符号 $d\cdot$ 表示该区间内的无限小变化。由此得到 $dI(t) = I(t + dt) - I(t)$ 。在此时间段内，传播系数 β 可视为每个染病个体与其他个体接触的速率，故新增感染总数为 $\beta I(t)S(t)dt$ 。此外，单个染病个体在该时段内与其他个体产生的潜在传染性接触为 βdt 。假设某种随机环境因子同时影响种群中的每个个体，此时 β 变为随机变量 $\tilde{\beta}$ ，满足

$$\tilde{\beta}dt = \beta dt + \sigma dB(t),$$

其中 $dB(t) = B(t + dt) - B(t)$ 为标准布朗运动的增量。因此，在区间 $[t, t + dt)$ 内，单个染病个体与另一人之间的潜在传染性接触数服从均值为 βdt 、方差为 $\sigma^2 dt$ 的正态分布。此外，Zhao 等人 [9] 在SIS 模型中采用了相同的扰动方式并引入疫苗接种机制，给出了疾病发生及平稳持久性的判别准则。目前已有大量研究探讨了不同传染病模型中各种环境噪声的应用 [10–13]。在流行病学建模中，大多数随机模型采用标准布朗运动描述环境噪声，这实际上说明系统未来所受的随机影响仅依赖于当前状态而与历史无关。然而，现实中的许多环境因素并不满足这一假设。例如，气候变化通常具有持续性和季节性累积效应，社会行为模式往往表现出长期惯性，公共卫生政策的实施效果也常常通过一段时间后逐步显现。这些因素都会使传染病传播过程中所受扰动呈现明显的长程相关性。因此，采用能够刻画长记忆特征的分数布朗运动来驱动SIS 模型，不仅在理论上拓展了经典随机流行病模型的研究框架，而且在应用上更有助于反映实际传播环境中的持续性随机影响。

本文将考虑一种不同类型的随机扰动，即利用Hurst 指数为 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的分数布朗运动代替标准布朗运动。分数布朗运动是一种零均值高斯过程，其特殊的协方差函数由Hurst 参数 $H \in (0, 1)$ 决定。当 $H = \frac{1}{2}$ 时，该过程退化为标准布朗运动。当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时，分数布朗运动既不是半鞅也不是马尔可夫过程，这意味着经典的随机分析理论不再适用。特别地，当 $H > \frac{1}{2}$ 时，该过程具有长程记忆性，使其非常适合刻画具有长程相关特征的现象。这一特性使得分数布朗运动成为解决应用科学中“长记忆问题”的现实选择，也是此类噪声目前被广泛应用的原因。

目前已有若干研究利用分数布朗运动作为工具，模拟长程相关性 & 环境噪声对传染病传播的影响。例如，Caraballo 等人 [14] 研究了一类以分数布朗运动作为噪声源的非自治随机SIR 模型。

此外，针对更复杂的随机扰动结构，Mao 等还研究了受两个独立标准布朗运动驱动 SIS 随机微分方程模型，进一步揭示了多重噪声作用下系统动力学行为的复杂性 [15]。

在 SIS 模型中，环境因素可能对传染病的传播率产生持久影响。这些影响通常并非瞬时发生，而是一个累积过程。因此，由于个体行为模式或季节性因素会影响传染病的长期传播趋势，利用分数布朗运动代替标准布朗运动来刻画感染率 β 中的噪声更为贴切。将 β 替换为

$$\tilde{\beta}dt = \beta dt + \sigma dB^H(t),$$

其中 $B^H(t)$ 为 Hurst 指数 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的分数布朗运动， $dB^H(t)$ 表示文献 [16] 中定义的 Wick-Itô 型随机微分。据此，我们考虑如下模型：

$$dI(t) = I(t)[\beta(N - I(t)) - (\mu + \gamma)]dt + \sigma I(t)(N - I(t))dB^H(t), \tag{3}$$

其中初始值为 $I(0) = I_0 \in (0, N)$ ，且参数 $\beta, \mu, \gamma, \sigma, N$ 均为正常数。为了计算方便，下文记 $a = \beta N - \mu - \gamma$ 。

参数条件 $\beta N > \mu + \gamma$ 具有明确的流行病学含义。注意到确定性 SIS 方程可写为

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t)[\beta(N - I(t)) - (\mu + \gamma)].$$

当 $I(t)$ 接近 0 时，其线性化形式为

$$\frac{dI(t)}{dt} \approx (\beta N - \mu - \gamma)I(t).$$

因此， $\beta N > \mu + \gamma$ 意味着在疾病尚处于低流行水平时，单位时间内由传播机制带来的新增感染效应大于死亡与康复造成的移出效应，表明疾病具有侵入种群并形成持续传播的可能性。

另一方面，本文取 Hurst 指数 $H \in (1/2, 1)$ ，既有建模上的考虑，也有数学上的考虑。就建模而言，此时，分数布朗运动具有长程相关性，能够刻画气候变化、社会接触行为及公共卫生干预等环境因素对传播率产生的持续性影响；而标准布朗运动对应的无记忆噪声则难以反映这种累积效应。就分析而言， $H > 1/2$ 时分数布朗运动样本路径具有较好的 Hölder 正则性，相关的 Wick-Itô 积分、分数 Itô 公式及 Malliavin 导数估计工具可在这一框架下得到有效应用。

通常情况下，我们自然要求随机项 $\sigma dB^H(t)$ 的均值为零。然而，根据文献 [17, 18] 的研究，当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时，关于分数布朗运动的路径型随机积分可能不满足零均值特性。受此启发，本文采用了文献 [16, 17, 19, 20] 中利用 Wick 乘积定义的 Wick-Itô 型随机积分。该积分具有优良的性质，能够确保其数学期望始终为零，即

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma I(t)(N - I(t))dB^H(t) \right] = 0.$$

在接下来的章节中，我们将着重研究该随机微分方程解 $I(t)$ 的存在唯一性。

2. 预备知识

若均值为零的高斯过程 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ 的协方差函数满足:

$$R_H(t, s) = E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

则称其为Hurst 参数为 $H \in (0, 1)$ 的分数布朗运动。本文全文假设 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 。令 $B^H = \{B_t^H, 0 \leq t \leq T\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}^H, P)$ 上的Hurst 指数为 H 的一维分数布朗运动。记 (\mathcal{F}^H) 为由 B^H 生成的流, 并假设文中所涉及的所有过程均是对该流自适应的。固定 $T > 0$, 记 $\Theta_H([0, T])$ 为 Θ_H 。令 Θ_H 为由指示函数 $1_{[0,t]}(t \in [0, T])$ 生成的线性空间 \mathcal{E} 关于如下内积的完备化空间:

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\Theta_H} = R_H(t, s).$$

空间 Θ_H 配备范数:

$$\|\varphi\|_{\Theta_H}^2 := \alpha_H \int_0^T \int_0^T \varphi(s)\varphi(r)|s - r|^{2H-2} ds dr,$$

其中 $\alpha_H = H(2H - 1)$ 。设 $\{\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)\} \subset \Theta_H$ 。对于形如

$$F = f\left(\int_0^T \eta_1(t) dB_t^H, \dots, \int_0^T \eta_n(t) dB_t^H\right)$$

的光滑随机变量 F (其中 $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且具有界导数), 其Malliavin 导数定义为:

$$D_s F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^T \eta_1(t) dB_t^H, \dots, \int_0^T \eta_n(t) dB_t^H \right) \eta_i(s).$$

空间 $\mathbb{D}^{1,2}$ 与光滑随机变量集在如下范数下的闭包一致:

$$\|F\|_{1,2}^2 = \mathbb{E}(F^2) + \mathbb{E}(\|DF\|_{\Theta_H}^2).$$

下述结论 (参见文献 [21]) 为随机变量 F 与第一混沌空间中的元素 $X(h)$ 之积的Wick 乘积的存在性提供了一个简单的充分条件。注意到 $X(h)$ 是一个均值为零的高斯随机变量。

引理2.1. 设 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且 $h \in \Theta_H$, 则 F 与 $X(h)$ 的Wick 乘积 $F \diamond X(h)$ 存在且可表示为

$$F \diamond X(h) = FX(h) - \langle DF, h \rangle_{\Theta_H}.$$

该引理表明, Wick 乘积等于随机变量间的普通乘积减去 DF 在 h 上的投影 $\langle DF, h \rangle_{\Theta_H}$ 。鉴于 $\mathbb{E}(F \diamond X(h)) = (\mathbb{E}F)(\mathbb{E}X(h)) = 0$, 可知随机变量 $FX(h)$ 与 $\langle DF, h \rangle_{\Theta_H}$ 具有相同的数学期望, 即

$$\mathbb{E}[FX(h)] = \mathbb{E}[\langle DF, h \rangle_{\Theta_H}].$$

Wick 乘积的概念引出了如下Wick 积分 (亦称分数Itô 积分) 的定义。

定义2.2. 设 $\{u_t, t \geq 0\}$ 为一随机过程, 且对任意 t 满足 $u_t \in \mathbb{D}^{1,2}$. 若前向黎曼和 (forward Riemann sums)

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_{t_i} \diamond (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

在概率意义下存在极限, 则定义其为 Wick 积分 $\int_0^T u_t \diamond dX_t$. 其中 $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ 为区间 $[0, T]$ 的任一划分, 且当网格直径 $|\pi| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ 时取极限.

设 $f_1, f_2 \in \Theta_H$, 由空间 $\Theta_{H,t}$ 的定义可知:

$$\|f\|_{\Theta_{H,t}}^2 = H(2H - 1) \int_0^t \int_0^t |v - u|^{2H-2} f(u) f(v) dudv.$$

根据文献 [17] 中 $L^2([0, T]) \subset \Theta_H([0, T])$ 的包含关系, 易得:

$$\|f\|_{\Theta_{H,t}}^2 \leq C \|f\|_2^2.$$

若 f 在 $[0, T]$ 上连续, 则 $\|f\|_{\Theta_{H,t}}^2$ 关于 t 连续可微, 且其导数满足:

$$\frac{d}{dt} \|f\|_{\Theta_{H,t}}^2 = 2H(2H - 1) f(t) \int_0^t |t - u|^{2H-2} f(u) du, \quad 0 \leq t \leq T.$$

在此基础上, 给出针对 Wick-Itô 积分的 Itô 公式.

定理2.3. 设 $f \in \Theta_{H,T} \cap L^2([0, T])$ 为确定性函数, 且 $f(t) \in \Theta_{H,t}$. 若 $\|f(t)\|_{\Theta_{H,t}}$ 关于变量 $t \in [0, T]$ 连续可微, 记

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s) ds + \int_0^t f(s) dB_s^H, \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中 X_0 为常数, g 为满足 $\int_0^T |g(s)| ds < \infty$ 的确定性函数. 设 F 为增长阶小于 2 的整函数, 则对于 $0 < t < T$, 有

$$\begin{aligned} F(t, B_t^H) &= F(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, B_s^H) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s^H) dB_s^H \\ &\quad + H \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, B_s^H) s^{2H-1} ds, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} F(t, X_t) &= F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \left[\frac{d}{ds} \|f_s\|_{\Theta_{H,s}}^2 \right] ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

定理2.4. 设 f 为指数大于 $1 - H$ 的 H -lder 连续函数, g 为连续函数. 令

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) dB_s^H + \int_0^t g(s) ds,$$

其中 X_0 为常数。假设 $\mathbb{D}_s^H f(s)$ 存在且关于 s 连续, 其中 $\mathbb{D}_s^H f$ 定义为

$$\mathbb{D}_s^H f = H(2H - 1) \int_0^T |s - r|^{2H-2} D_r^H f dr.$$

设函数 $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 关于变量 t 连续可微, 且关于变量 x 二阶连续可微。则有

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) = & F(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) f(s) dB_s^H \\ & + \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial s}(s, X(s)) + \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) g(s) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X(s)) f(s) \mathbb{D}_s^H X(s) \right] ds. \end{aligned}$$

关于Wick-Itô 积分与路径型积分之间的关系, 以及由此得到的含Malliavin 导数修正项的等价表示, 可参见Duncan [16] 以及Hu [22]。

3. 正解的存在唯一性

关于随机微分方程解的存在唯一性及Lyapunov 函数控制解的非爆性等经典理论, 可参见 [23-25]。不过, 由于本文研究的是分数布朗运动驱动并在Wick-Itô 积分框架下建立的模型, 相应论证仍需结合分数随机分析工具作专门处理。为确保模型的数学合理性及生物学意义, 需证明该随机微分方程存在唯一的全局正解, 且对于任意初值 $I_0 \in (0, N)$, 该解几乎处处位于区间 $(0, N)$ 内。

为证明定理我们先给出两个引理。

引理3.1. 对任意初值 $I_0 \in (0, N)$, 方程(3)的局部解存在。

证明. 记 $f(I) = \beta I(N - I) - (\mu + \gamma)I$, $g(I) = \sigma I(N - I)$ 。因 $I_0 \in (0, N)$, 存在紧区间 $D = [a, b] \subset (0, N)$ 使得 $I_0 \in D$ 。取光滑截断函数 $\psi \in C_c^\infty(0, N)$ 满足 $\psi|_D = 1$, 令

$$\tilde{f}(I) = f(I)\psi(I), \quad \tilde{g}(I) = g(I)\psi(I).$$

则 \tilde{f}, \tilde{g} 在 \mathbb{R} 上全局Lipschitz 且有界: 存在 $L, M > 0$ 使对任意 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq L|x - y|, \quad |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| \leq L|x - y|, \quad |\tilde{f}(x)| \leq M, \quad |\tilde{g}(x)| \leq M.$$

设 $T > 0$ 待定。考虑空间 \mathcal{H} 为 $[0, T]$ 上满足 $\|X\|^2 := \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[|X(t)|^2] < \infty$ 的连续适应过程, 它是Banach 空间。定义算子 $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$:

$$\mathcal{T}(X)(t) = I_0 + \int_0^t \tilde{f}(X(s)) ds + \int_0^t \tilde{g}(X(s)) dB_s^H, \quad t \in [0, T].$$

对 $X, Y \in \mathcal{H}$, 由Cauchy-Schwarz 及分数Wick-Itô积分的等距性质, 存在 $C_H > 0$ 使 $\mathbb{E}[(\int_0^t \varphi dB^H)^2] \leq$

$C_H t^{2H} \sup_{s \leq t} \mathbb{E}[|\varphi_s|^2]$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\mathcal{T}(X)(t) - \mathcal{T}(Y)(t)|^2 &\leq 2T \int_0^t \mathbb{E}|\tilde{f}(X) - \tilde{f}(Y)|^2 ds + 2C_H T^{2H} \sup_{s \leq t} \mathbb{E}|\tilde{g}(X) - \tilde{g}(Y)|^2 \\ &\leq 2L^2(T^2 + C_H T^{2H})\|X - Y\|^2. \end{aligned}$$

取 T 充分小使 $\lambda := 2L^2(T^2 + C_H T^{2H}) < 1$, 则 \mathcal{T} 为压缩映射. 由 Banach 不动点定理, 存在唯一 $I \in \mathcal{H}$ 使 $I = \mathcal{T}(I)$.

定义停时 $\tau = \inf\{t \in [0, T] : I(t) \notin D\}$. 当 $t < \tau$ 时 $I(t) \in D$, 此时 $\psi(I(t)) = 1$, 故 $\tilde{f}(I) = f(I)$, $\tilde{g}(I) = g(I)$, 即 $I(t)$ 在 $[0, \tau)$ 上满足原方程. 由于 I_0 在 D 内部且路径连续, $\tau > 0$ a.s.. 因此 $I(t)$ 在 $[0, \tau)$ 上即为原方程的局部解. \square

引理3.2. 假设 $\beta N > \mu + \gamma$, $I(t)$ 是方程(3) 在停时 τ_k 之前的局部解. 存在仅依赖于 $T, \beta, \mu, \gamma, \sigma, N, H$ 的常数 $C > 0$, 使得对任意 $t \in [0, T \wedge \tau_k)$, 有

$$\mathbb{E} \left[\frac{|\mathbb{D}_t^H I(t)|}{I(t)(N - I(t))} \right] \leq C_T t^{2H-1}.$$

证明. 令 $J(t) = \ln \frac{I(t)}{N - I(t)}$. 由 Malliavin 链式法则,

$$D_r J(t) = \frac{N}{I(t)(N - I(t))} D_r I(t).$$

因 \mathbb{D}_t^H 为线性积分算子, 原命题等价于证明 $\mathbb{E}[|\mathbb{D}_t^H J(t)|] \leq N C t^{2H-1}$.

记 $f(I) = \beta I(N - I) - (\mu + \gamma)I$, $g(I) = \sigma I(N - I)$. 对 $J(t)$ 应用定理2.4 中的分数 Itô 公式, 计算得

$$dJ(t) = \left[\beta N - (\mu + \gamma)(1 + e^{J(t)}) + \sigma \eta(J(t)) \mathbb{D}_t^H J(t) \right] dt + \sigma N dB_t^H,$$

其中 $\eta(J) = \frac{e^J - 1}{e^J + 1}$.

固定 $r \leq t$, 令 $Z(t) = D_r J(t)$. 对上式取 Malliavin 导数 D_r , 因扩散系数 σN 为常数, 其 Malliavin 导数为零, 得

$$Z(t) = \sigma N + \int_r^t \left[-(\mu + \gamma)e^{J(u)} Z(u) + \sigma \eta'(J(u)) Z(u) \mathbb{D}_u^H J(u) + \sigma \eta(J(u)) \mathbb{D}_u^H Z(u) \right] du,$$

其中 $\eta'(J) = \frac{2e^J}{(e^J + 1)^2}$.

定义积分因子 $\Phi(r, t) = \exp\left(\int_r^t (\mu + \gamma)e^{J(v)} dv\right) \geq 1$. 令 $Y(t) = Z(t)\Phi(r, t)$, 则

$$Y(t) = \sigma N \Phi(r, t) + \int_r^t \Phi(r, u) \left[\sigma \eta'(J(u)) Z(u) \mathbb{D}_u^H J(u) + \sigma \eta(J(u)) \mathbb{D}_u^H Z(u) \right] du.$$

两边除以 $\Phi(r, t)$, 由 $\Phi(r, u) \leq \Phi(r, t)$ 得

$$|Z(t)| \leq \sigma N + \frac{\sigma}{2} \int_r^t |\mathbb{D}_u^H J(u)| |Z(u)| du + \sigma \int_r^t |\mathbb{D}_u^H Z(u)| du.$$

由

$$\mathbb{D}_u^H Z(u) = H(2H - 1) \int_0^u (u - v)^{2H-2} D_v Z(u) dv.$$

注意到在引理3.1 的截断构造下, 局部方程对应的截断系数在 \mathbb{R} 上全局有界且具有有界导数。进一步地, 对变量代换后所得方程, 其漂移项与扩散项关于状态变量的一阶导数仍可由截断方程的系数一致控制。由Hu [22, Lemma 5.11–5.12] 可得其Malliavin 导数具有一致先验估计。于是存在仅依赖于 $T, \beta, \mu, \gamma, \sigma, N, H$ 的常数 $C_0 > 0$, 使得

$$\sup_{0 \leq r \leq t \leq T \wedge \tau_k} E[|D_r J(t)|] \leq C_0.$$

从而有

$$E[|\mathbb{D}_t^H J(t)|] \leq H(2H - 1) \int_0^t (t - r)^{2H-2} E[|D_r J(t)|] dr \leq C_0 H(2H - 1) \int_0^t (t - r)^{2H-2} dr = C_0 H t^{2H-1}.$$

再由Malliavin 链式法则可得

$$E\left[\frac{|\mathbb{D}_t^H I(t)|}{I(t)(N - I(t))}\right] = \frac{1}{N} E[|\mathbb{D}_t^H J(t)|] \leq \frac{C_0 H}{N} t^{2H-1}.$$

令 $C_T = \frac{C_0 H}{N}$, 即得

$$E\left[\frac{|\mathbb{D}_t^H I(t)|}{I(t)(N - I(t))}\right] \leq C_T t^{2H-1}.$$

引理得证。 □

接下来我们给出全局正解的存在唯一性。

定理3.3. 对于任意初始值 $I(0) = I_0 \in (0, N)$, 随机微分方程(3) 存在唯一的全局正解 $I(t)$ 。该解以概率1 始终保持在区间 $(0, N)$ 内, 即

$$\mathbb{P}\{I(t) \in (0, N), \forall t \geq 0\} = 1.$$

证明. 由引理3.1, 对任意初始值, 方程在 $t \in [0, \tau_e)$ 上存在唯一的局部解 $I(t)$, 使得 $\frac{1}{k_0} < I_0 < N - \frac{1}{k_0}$ 。对每个整数 $k \geq k_0$, 定义如下停时:

$$\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : I(t) \notin (\frac{1}{k}, N - \frac{1}{k})\}.$$

本文规定 $\inf \emptyset = \infty$ 。显然, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 是单调增加的。记 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 则有 $\tau_\infty \leq \tau_e$ 几乎处处成立。为完成证明, 只需证 $\tau_\infty = \infty$ 几乎处处成立, 进而可得 $\tau_e = \infty$ 且对所有 $t \geq 0$,

$I(t) \in (0, N)$ 几乎处处成立。

现假设 $\tau_\infty = \infty$ 不成立, 则存在常数 $T > 0$ 和 $\epsilon \in (0, 1)$, 使得

$$\mathbb{P}\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon.$$

由此可知, 存在足够大的整数 $k_1 \geq k_0$, 使得对所有 $k \geq k_1$, 均有

$$\mathbb{P}\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon, \quad \forall k \geq k_1.$$

记 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$ 。定义非负函数 $V : (0, N) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为

$$V(x) = -\ln\left(\frac{x}{N}\right) - \ln\left(\frac{N-x}{N}\right).$$

注意到, 当 $x \rightarrow 0^+$ 或 $x \rightarrow N^-$ 时, $V(x) \rightarrow +\infty$ 。其各阶导数为:

$$V'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x},$$

$$V''(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(N-x)^2}.$$

根据定理2.4, 有

$$V(I(t)) = V(I_0) + \int_0^t LV(I(s))ds + \int_0^t V'(I(s))\sigma I(s)(N-I(s))dB_s^H,$$

其中

$$LV(I(s)) = V'(I)f(I) + V''(I)g(I)\mathbb{D}_s^H I(s)$$

$$f(I) = \beta I(N-I) - (\mu + \gamma)I,$$

$$g(I) = \sigma I(N-I).$$

在Wick-Itô积分框架下, 随机积分项的期望为0, 我们只需关注漂移项 $LV(I(s))$, 其中

$$\begin{aligned} V'(I)f(I) &= V'(I) \cdot [\beta I(N-I) - (\mu + \gamma)I] \\ &= \left(\frac{1}{N-I} - \frac{1}{I}\right) \cdot [\beta I(N-I) - (\mu + \gamma)I] \\ &= \frac{\beta I(N-I)}{N-I} - \frac{(\mu + \gamma)I}{N-I} - \frac{\beta I(N-I)}{I} + \frac{(\mu + \gamma)I}{I} \\ &= \beta I - (\mu + \gamma)\frac{I}{N-I} - \beta(N-I) + (\mu + \gamma) \\ &= \beta I - (\mu + \gamma)\frac{I}{N-I} - \beta N + \beta I + \mu + \gamma \\ &= 2\beta I - \beta N + (\mu + \gamma) - (\mu + \gamma)\frac{I}{N-I}. \end{aligned}$$

注意到 $I(t) \in (0, N)$ 且 $I, N - I, \mu, \gamma$ 均为正, 则有

$$\begin{aligned} 2\beta I &< 2\beta N, \\ -(\mu + \gamma) \frac{I}{N - I} &< 0. \end{aligned}$$

因此, 我们得到不等式估计:

$$V'(I)f(I) \leq 2\beta N - \beta N + \mu + \gamma = \beta N + \mu + \gamma := K_1.$$

接下来处理修正项 $V''(I)g(I)\mathbb{D}_s^H I(s)$, 其表达式为:

$$\begin{aligned} V''(I)g(I)\mathbb{D}_s^H I(s) &= \sigma \left[\frac{N - I}{I} + \frac{I}{N - I} \right] \mathbb{D}_s^H I(s) \\ &= \sigma [(N - I)^2 + I^2] \frac{\mathbb{D}_s^H I(s)}{I(N - I)}. \end{aligned}$$

结合引理3.2, 可得

$$\mathbb{E} [|V''(I(s))g(I(s))\mathbb{D}_s^H I(s)|] \leq \sigma N^2 C_T s^{2H-1}.$$

从而对 $0 \leq s \leq T$,

$$\mathbb{E}[LV(I(s))] \leq K_1 + \sigma N^2 C_T T^{2H-1} =: K_T.$$

另一方面, 在Wick-Itô 积分框架下, 随机积分项的期望为零, 因此对任意 $t \leq T$,

$$\mathbb{E}[V(I(t \wedge \tau_k))] = V(I_0) + \int_0^t \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{s \leq \tau_k\}} LV(I(s))] ds \leq V(I_0) + K_T T.$$

特别地, 取 $t = T$, 有

$$\mathbb{E}[V(I(T \wedge \tau_k))] \leq V(I_0) + K_T T.$$

对任意 $k \geq k_1$, 假设 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, 有 $\mathbb{P}(\Omega_k) \geq \epsilon$. 对于任意 $\omega \in \Omega_k$, 在 $t = \tau_k(\omega)$ 时刻, $I(\tau_k)$ 必然触碰边界 $\frac{1}{k}$ 或 $N - \frac{1}{k}$. 此时必有:

$$V(I(\tau_k, \omega)) \geq \min \left\{ V\left(\frac{1}{k}\right), V\left(N - \frac{1}{k}\right) \right\}.$$

由于 $V(x)$ 在边界处趋于无穷, 当 k 充分大时, $V(I(\tau_k))$ 将大于任何预设常数, 我们可以得出

$$\begin{aligned} \infty &> V(I_0) + K_T \geq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Omega_k}(\omega)V(I(\tau_k, \omega))] \\ &\geq \mathbb{P}(\Omega_k) \min \left\{ V\left(\frac{1}{k}\right), V\left(N - \frac{1}{k}\right) \right\} \\ &= \epsilon \min \left\{ V\left(\frac{1}{k}\right), V\left(N - \frac{1}{k}\right) \right\}, \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得出矛盾

$$\infty > V(I_0) + KT = \infty.$$

故原假设错误, 即 $\tau_\infty = \infty$ a.s., 得证。 □

参考文献

- [1] Capasso, V. and Serio, G. (1978) A Generalization of the Kermack-Mckendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, **42**, 43-61.
[https://doi.org/10.1016/0025-5564\(78\)90006-8](https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90006-8)
- [2] Hethcote, H.W. and Yorke, J.A. (1984) Gonorrhoea Transmission Dynamics and Control. In: *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 56, Springer-Verlag.
- [3] Brauer, F., Allen, L.J.S., van den Driessche, P. and Wu, J. (2008) Mathematical Epidemiology. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag.
- [4] Lajmanovich, A. and Yorke, J.A. (1976) A Deterministic Model for Gonorrhoea in a Nonhomogeneous Population. *Mathematical Biosciences*, **28**, 221-236.
[https://doi.org/10.1016/0025-5564\(76\)90125-5](https://doi.org/10.1016/0025-5564(76)90125-5)
- [5] Nold, A. (1980) Heterogeneity in Disease-Transmission Modeling. *Mathematical Biosciences*, **52**, 227-240. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(80\)90069-3](https://doi.org/10.1016/0025-5564(80)90069-3)
- [6] Feng, Z., Huang, W. and Castillo-Chavez, C. (2005) Global Behavior of a Multi-Group SIS Epidemic Model with Age Structure. *Journal of Differential Equations*, **218**, 292-324.
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.009>
- [7] Lamb, K.E., Greenhalgh, D. and Robertson, C. (2011) A Simple Mathematical Model for Genetic Effects in Pneumococcal Carriage and Transmission. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 1812-1818. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.03.019>
- [8] Gray, A., Greenhalgh, D., Hu, L., Mao, X. and Pan, J. (2011) A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **71**, 876-902.
<https://doi.org/10.1137/10081856x>
- [9] Zhao, Y., Jiang, D. and O'Regan, D. (2013) The Extinction and Persistence of the Stochastic SIS Epidemic Model with Vaccination. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **392**, 4916-4927. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.06.009>
- [10] Greenhalgh, D., Liang, Y. and Mao, X. (2015) Demographic Stochasticity in the SDE SIS Epidemic Model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **20**, 2859-2884.
<https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.2859>
- [11] Greenhalgh, D., Liang, Y. and Mao, X. (2016) SDE SIS Epidemic Model with Demographic Stochasticity and Varying Population Size. *Applied Mathematics and Computation*, **276**, 218-238. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.094>

- [12] Hu, G., Liu, M. and Wang, K. (2012) The Asymptotic Behaviours of an Epidemic Model with Two Correlated Stochastic Perturbations. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10520-10532. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.105>
- [13] Liang, Y., Greenhalgh, D. and Mao, X. (2016) A Stochastic Differential Equation Model for the Spread of HIV amongst People Who Inject Drugs. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **2016**, 1-14. <https://doi.org/10.1155/2016/6757928>
- [14] Caraballo, T. and Keraani, S. (2018) Analysis of a Stochastic SIR Model with Fractional Brownian Motion. *Stochastic Analysis and Applications*, **36**, 895-908. <https://doi.org/10.1080/07362994.2018.1490912>
- [15] Cai, S., Cai, Y. and Mao, X. (2019) A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model with Two Independent Brownian Motions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **474**, 1536-1550. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.02.039>
- [16] Duncan, T.E., Hu, Y. and Pasik-Duncan, B. (2000) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion I. Theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**, 582-612. <https://doi.org/10.1137/s036301299834171x>
- [17] Hu, Y. (2005) Integral Transformations and Anticipative Calculus for Fractional Brownian Motions. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, AMS. <https://doi.org/10.1090/memo/0825>
- [18] Mishura, Y. and Shevchenko, G. (2012) Mixed Stochastic Differential Equations with Long-Range Dependence: Existence, Uniqueness and Convergence of Solutions. *Computers & Mathematics with Applications*, **64**, 3217-3227. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.061>
- [19] Biagini, F. (2008) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Probability and Its Applications. Springer.
- [20] Hu, Y. and Øksendal, B. (1996) Wick Approximation of Quasilinear Stochastic Differential Equations. In: Körezlioğlu, H., *et al.*, Eds., *Stochastic Analysis and Related Topics V*, Birkhäuser, 203-231. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2450-1_10
- [21] Nualart, D. (2006) The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer.
- [22] Hu, Y. (2018) Itô Type Stochastic Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motions of Hurst Parameter. *Stochastics*, **90**, 720-761. <https://doi.org/10.1080/17442508.2017.1415342>
- [23] Arnold, L. (1972) Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. Wiley.
- [24] Hasminskii, R.Z. (1980) Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff & Noordhoff.
- [25] Friedman, A. (1976) Stochastic Differential Equations and Their Applications. Academic Press.